Examen : $2^{\text{è}}$ **Séquence**
Session : Nov-Dec 2017
Série : Tle $C_{1,2}$
Épreuve : Mathématiques
Durée : 3h
Coef : 5

NB : La qualité du raisonnement sera prise en compte

Exercice 1

1. (a) En utilisant l'algorithme d'euclide, déterminer les entiers naturels a et b sachant qu'on a eu dans la division euclidienne de a par b les quotients suivants 1, 2, 1, 1, 2 et que $pgcd(a,b) = 9$. 0.5pt
   (b) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $162x + 117y = 27$. 0.75pt
2. Soit $n \in \mathbb{Z}$. On donne $A = 11n + 3$ et $B = 13n - 1$.
   (a) Montrer que $pgcd(A,B) = pgcd(n-27, 50)$. 0.5pt
   (b) Déterminer les valeurs de n pour lesquelles :
      i. $pgcd(A,B) = 50$; 0.5pt
      ii. $pgcd(A,B) = 25$; 0.5pt
      iii. $pgcd(A,B) = 4$. 0. 25pt
   (c) Déterminer les valeurs de n pour lesquelles $\frac{B}{A}$ est une fraction irréductible. 0.5pt

Exercice 2

Soient x et y des entiers naturels non nuls. On pose $d = pgcd(x,y)$ et $\mu = ppcm(x,y)$.

On considère l'équation $(E) : d + \mu - x = 8$

1. Montrer qu'il existe un couple (x', y') d'entiers naturels premiers entre eux tel que $\mu = d \cdot x' \cdot y'$. 0.25pt
2. En déduire que si (x,y) est solution de (E) alors $d \in \{1;\ 2;\ 4;\ 8\}$. 0.5pt
3. En déduire toutes les solutions de (E) pour lesquelles $d \in \{4; 8\}$. 0.75pt

Exercice 3

Le plan complexe est muni du repère $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. On considère l'application f du plan dans lui-même vérifiant $f(O) = O$ et qui à tout point M d'affixe z non nul associe le point M' d'affixe z' telle que : **z'z=4**
Soit A et B les points d'affixe 2 et -2.

1. Quel est l'ensemble des points invariants par f . ? 0.5pt
2. Démontrer que pour tout point M distinct du point O et son image M', la droite (AB) est la bissectrice de l'angle $\widehat{MOM'}$. 0.75pt
3. (a) Vérifier que : $\forall z \in \mathbb{C},\ (\dfrac{z+z'}{2} - 2) \times (\dfrac{z+z'}{2} + 2) = (\dfrac{z-z'}{2})^2$. 0.5pt
   (b) En déduire $IA \times IB = IM^2$ où I est milieu du segment $[MM']$. 0.5pt
   (c) Montrer que pour tout M distinct de A et B, la droite (MM') est la bissectrice de l'angle $\widehat{AIB}$. 0.75pt
4. On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ avec $z \neq 0$. Soit $(\mathscr{D})_{a,b}$ la droite d'quation $y = ax + b$ où a et b sont des réels avec $a \neq 0$.
   (a) Ecrire x et y en fonction de x' et y'. 0.5pt
   (b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'image par f de $(\mathscr{D})_{a,b}$ lorsque $b \neq 0$. 0.5pt
   (c) Quelle est l'image par f de $(\mathscr{D})_{a,0}$? 0.25pt
   (d) Que peut on conclure ? 0.5pt

Problème

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A

L'espace est muni du repère orhtonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit m un réel et S_m l'ensemble des points $M(x, y, z)$ vérifiant l'équation : $x^2 + y^2 + z^2 - 2mx - 2(m-1)y - 2(m+1)z + 1 = 0$.

1. Montrer que S_m est une sphère dont on précisera le centre Ω_m et de rayon R_m. 0.5pt
2. Quel est le lieu des points Ω_m lorsque m parcourt $\mathbb{R}$? 0.5pt
3. Soit le plan (P) : $x + 2y + 2 + \sqrt{5} = 0$
   (a) Soit $m \in \mathbb{R}$. Déterminer les coordonnées du point H_m projété orthogonal de Ω_m sur le plan (P). 0.5pt
   (b) Déterminer suivant les valeurs de m la nature et les éléments caractéristiques de $(P) \cap S_m$. 0.75pt
4. Montrer que toutes les sphères S_m passent par un cercle fixe situé dans le plan $(Q) : x + y + z = 0$. 0.75pt
5. Déterminer les équations des plan (Q_1) et (Q_2) qui sont parallèles à (Q) et tangents à S_{-1}. 0.5pt
6. Déterminer la distance entre les plans (Q_1) et (Q_2). 0.5pt

PARTIE B

On considère la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2 - x + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

On note $(\mathscr{C}_f)$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$ 0.5pt
2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$ 0.25pt
3. Déterminer les branches infinies de la de la représentation graphique de f . 0.5pt
4. (a) Calculer $f'(x)$, puis $f'(0)$ 0.5pt
   (b) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $f'(x) < 0$, puis dresser le tableau de variation de f . 0.5pt
5. (a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$ et que $\alpha \in [2, 3]$ 0.5pt
   (b) Donner par une méthode de votre choix un encadrement de α dans un intervalle d'amplitude 10^{-2} 0.5pt
   (c) Déminer le signe de f sur $\mathbb{R}$ 0.25pt
6. Construire $(\mathscr{C}_f)$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ 0.75pt
7. On admet que f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et que f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculer $f(2)$, puis le nombre dérivé de f^{-1} en $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ 0.5pt
8. Soit la fonction h de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $h(x) = 2 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$
   (a) Montrer que $h(\alpha) = \alpha$ 0.25pt
   (b) Montrer que $\forall x \in [2, 3]$, on a : $|h'(x)| \leq \frac{1}{2}$ 0.25pt
   (c) Montrer que $\forall x \in [2, 3]$, on a : $|h(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$. 0.25pt
9. Donner la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui prend la valeur 2 en 0. 0.5pt