C.K.Y.M
TC

TRAVAUX DIRIGES FONCTIONS LOGARITHMES CJT

EXERCICE 1

Partie A. Étude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]\,0\,;\,+\infty\,[$ par :

$$g(x) = x + 1 + \ln x$$

1. Étudier les variations de g sur l'intervalle $]\,0\,;\,+\infty\,[$.
2. Démontrer qu'il existe une solution unique α de l'équation $g(x) = 0$ dans l'intervalle $[\,0,1\,;\,0,5\,]$.
3. Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.
4. Étudier le signe de $g'(x)$ sur l'intervalle $]\,0\,;\,+\infty\,[$.

Partie B. Étude de la fonction f

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]\,0\,;\,+\infty\,[$ par

$$f(x) = \frac{x\ln x}{x+1} + 2$$

On appelle C la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ d'unité graphique 2 cm.

1. On rappelle que $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$. Déterminer la limite de f en 0.
2. Montrer que, pour tout nombre réel strictement positif x : $f(x) = \dfrac{\ln x}{1+\frac{1}{x}} + 2$.
   En déduire la limite de f en $+\infty$.
3. Soit f' la dérivée de f. Montrer que, pour tour nombre réel strictement positif x, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(x+1)^2}$.
4. Étudier, en utilisant les résultats de la partie A, le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x.
5. Dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   (On indiquera une valeur approchée de $f(\alpha)$ en prenant $\alpha \approx 0,28$.)
6. Déterminer une équation de la tangente T à C au point d'abscisse 1.
7. On a tracé ci-dessous la courbe représentative C' de la fonction h définie dans la partie C. Sur le graphique, tracer la tangente T ainsi que la courbe C.

EXERCICE 2

Déterminez une primitive de la fonction f proposée sur l'intervalle I donné :

1) $f(x) = x^2 - 5x + \dfrac{1}{x}$ sur $I =]0;+\infty[$
2) $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x}$ sur $I =]0;+\infty[$
3) $f(x) = \dfrac{7}{x} + \dfrac{5}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{x^2}$ $I =]0;+\infty[$
4) $f(x) = \dfrac{3}{3x-4}$ sur $I = \left]\dfrac{4}{3};+\infty\right[$
5) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ sur $I =]-1;+\infty[$
6) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ sur $I =]-\infty;-1[$
7) $f(x) = \dfrac{2x}{x^2-4}$ sur $]2;+\infty[$
8) $f(x) = \dfrac{1}{3x-5}$ sur $[2;+\infty[$
9) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+2x+2}$ sur $\mathbb{R}$
10) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$ sur $]-1;1[$

EXERCICE 3

Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2 + \ln x\right)$
2) $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-x)\ln x$
3) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln 2 - 3\ln x)$
4) $\lim\limits_{x\to 0}(x - 4 + \ln x)$
5) $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln x^2$
6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{x}$
7) $\lim\limits_{x\to+\infty} x - \ln x$
8) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ (Poser $X = \dfrac{1}{x}$)
9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)}{x}$ (Poser $X = 2x$)

EXERCICE 4

Partie I

La fonction f est définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=x-2+\frac{1}{2}\ln x$

1) Etudier le sens de variations de f. Calculer le slimites de f aux bords de l'ensemble de définition et dresser le tableau de variations de f.

2) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution l dans l'intervalle $]0;+\infty[$. Déterminer l'entier n tel que $l\in\,]n;n+1[$

3) Déterminer le signe de $f(x)$

Partie II

La fonction g est définie sur $[0;+\infty[$ par : $g(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x=0 \\ -\frac{7}{8}x^2+x-\frac{1}{4}x^2\ln x & \text{si } x>0 \end{cases}$

1) Montrer que la fonction g est continue en 0. Déterminer la limite de g en $+\infty$

2) Montrer que pour tout $x>0$, $g'(x)=xf\left(\frac{1}{x}\right)$

3) Montrer que On calcule $g\left(\frac{1}{l}\right)=\frac{1+4l}{8l^2}$. Dresser le tableau de variation de g.

4) Donner les équations des tangentes à la courbe Γ représentative de g aux points d'abscisses 1 et $\frac{1}{l}$. Calculer $\lim\limits_{x\to 0} g'(x)$ et interpréter graphiquement cette limite.

5) Représenter succinctement Γ et ses tangentes dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

EXERCICE 5

~~On considère la suite (u_n) de réels strictement positifs, définie par : $u_0=2$, et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\ln(u_{n+1})=1+\ln(u_n)$.~~

1) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n et préciser la nature de la suite (u_n).

2) Déterminer la monotonie de la suite (u_n), et préciser sa limite.

3) Exprimer la somme $\sum_{k=0}^{n} u_k$ en fonction de n.

4) Exprimer la somme $\sum_{k=1}^{n} \ln(u_k)$ en fonction de n. En déduire le calcul de $u_1\times u_2\times\ldots\times u_n$ en fonction de n.

EXERCICE 6

1. La fonction g est définie sur $]0\,;\,+\infty\,[$ par $g(x)=2x\sqrt{x}-3\ln x+6$.

En utilisant les variations de g, déterminer son signe suivant les valeurs de x.

2. La fonction numérique f est définie sur $]0,+\infty[$ par

$$f(x)=\frac{3\ln x}{\sqrt{x}}+x-1.$$

b. Déterminer les limites de f en 0 et $+\infty$ (en $+\infty$, on pourra poser $X=\sqrt{x}$).

c. Utiliser la première partie pour déterminer le sens de variation de f.

3. Soit Δ la droite d'équation $y=x-1$ et C la représentation graphique de f dans un repère orthonormé du plan. Montrer que Δ est asymptote de C et étudier leurs positions relatives. construire C et Δ.