Etude de fonctions classe de terminale

Exercice 1

1. Soit g la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par : $g(x) = 4x^3 - 3x - 8$.

a. Etudier le sens de variation de g sur $\mathbb{R}$.

b. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $\mathbf{R}$ une unique solution que l'on note α. Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

c. Déterminer le signe de g sur $\mathbf{R}$.

2. Soit f la fonction définie sur $[1\ ;\ +\infty\ [$ par : $f(x) = \dfrac{x^3+1}{4x^2-1}$.

a. Démontrer que le signe de $f'(x)$ est le même que le signe de $g(x)$ sur $[1\ ;\ +\infty\ [$.

b. En déduire le sens de variation de f sur $[1\ ;\ +\infty\ [$.

c. En utilisant la définition de α, démontrer que : $f(\alpha) = \dfrac{3}{8}\alpha$. En déduire un encadrement de $f(\alpha)$.

Exercice 2

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = x\sqrt{1-x}$.

1. a. Déterminer l'ensemble de définition de f.

b. Etudier la dérivabilité de f en 1 et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

c. Montrer que f est dérivable sur $]-\infty\ ; 1[$ et que $f'(x) = \dfrac{2-3x}{2\sqrt{1-x}}$ pour tout $x < 1$.

d. Dresser le tableau de variation de f.

e. Représenter graphiquement la fonction f.

2. a. Montrer que l'équation $f(x) = \dfrac{-1}{3\sqrt{3}}$ admet une seule solution x_1 dans $]-\infty\ ; 0]$ et que $-\dfrac{1}{3} < x_1 < 0$.

b. Montrer que l'équation $f(x) = \dfrac{1}{3\sqrt{3}}$ admet exactement deux solutions x_2 et x_3 dans $[0\ ; 1]$ et que $0 < x_2 < \dfrac{2}{3} < x_3 < 1$. Donner une valeur décimale approchée à 10^{-3} près de x_1.

3. a. On pose $u = \dfrac{3}{2}(x - \dfrac{1}{3})$. Montrer que l'équation (E) : $\left|x\sqrt{1-x}\right| = \dfrac{1}{3\sqrt{3}}$ est équivalente à (E') :

$$8u^3 - 6u - 1 = 0.$$

b. Pour i = 1, 2, 3, on pose $u_i = \dfrac{3}{2}(x_i - \dfrac{1}{3})$. Montrer qu'il existe un unique réel θ_i de $[0\ ; \pi]$ tel que $u_i = \cos\theta_i$.

c. Prouver que $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ pour tout θ réel.
(On rappelle que $\cos(a+b) = \cos a.\cos b - \sin a.\sin b$ et $\sin 2a = 2\sin a.\cos a$)

d. Déduire des questions précédentes que (E') est équivalente à l'équation $\cos 3\theta = \dfrac{1}{2}$. Résoudre cette équation dans $[0\ ; \pi\ ]$ et en déduire les valeurs exactes de x_1, x_2 et x_3.

Exercice 3

Partie A

Soit g la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $g(x)=x^2(x+2)$.

1. Etudier les variations de g sur $[0\,;+\infty[$.

2. Démontrer que l'équation $g(x)=4$ admet, sur $[0\,;+\infty[$, une unique solution α dont on donnera une valeur approchée à 10^{-2}.

3. En déduire la résolution de l'inéquation $g(x)>4$ sur $[0\,;+\infty[$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ par $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+2}}{x}+x$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormal (unité 1 cm).

1. Etudier la parité de f.

2. Déterminer $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, en déduire $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

Peut-on en déduire une ou plusieurs droites asymptotes à la courbe (C_f) ¿

3. Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x + 1$ est asymptote à la courbe (C_f) en $+\infty$, en déduire l'équation d'une droite asymptote à (C_f) en $-\infty$.

4. a. Démontrer que f est dérivable sur les intervalles $]-\infty\,;0[$ et $]0\,;+\infty[$ puis que $f'(x)=\dfrac{\sqrt{g(x^2)}-2}{x^2\sqrt{x^2+2}}$.

b. Déduire de la partie A que $f'(x)>0$ sur $]\sqrt{\alpha}\,;+\infty[$.

c. En déduire les variations de f sur $]0\,;+\infty[$ puis sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Dresser le tableau de variations complet de f sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

5. Déterminer une équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse $\sqrt{2}$.

6. Tracer la courbe (C_f) en vous aidant de tous les renseignements obtenus précédemment.