COLLEGE JEAN TABI
Département de mathématiques
B.P : 4147 YAOUNDE
TEL/FAX : 222 21 60 53
N/REF : CJT/18-19/DH/AB/NMA

ANNEE ACADEMIQUE 2018-2019
Séquence V
Classe :TC
Durée : 4
Coef : 5

Devoir harmonisé du 04 Mars 2019

L'épreuve sur trois pages comporte deux exercices et un problème de deux parties indépendantes. La clarté de la copie et la qualité de la rédaction seront prises en considération lors de la correction.

Exercice 1 (4,25 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$.
Soit K le point du plan tel que OIKJ soit un carré.
Soit M un point quelconque de la droite (OK) différent de O et s la similitude plane directe de centre J qui transforme O en M.
On note m l'affixe du point M ; I′ et M′ les images respectives de I et de M par s.

1- a)Montrer que $|m-1| = |m-i|$ et que les complexes $(m-1)(m-i)$ et $m(1+i)$ sont imaginaires purs. **(0,75pt)**
Indication : M est un point de la première bissectrice différent de O.
b) Vérifier que le rapport de s est $|m-i|$, calculer alors M′I′ en fonction m. **(0,5pt)**
c) Calculer le rapport de s ∘ s. En déduire que $M'J = |m-i|^2$. **(0,5pt)**
d) Démontrer que $M'J = M'I'$ **(0,5pt)**

2- a)Démontrer que l'écriture complexe de la similitude s est $z' = (1+im)z + m$ et en déduire les affixes des vecteurs $\overrightarrow{II'}$ et $\overrightarrow{M'I'}$. **(0,75pt+0,5pt)**
b)Montrer alors que I′ est le projeté orthogonal de M′ sur la droite (IK). **(0,75pt)**

Exercice 2 (4,75 points)

n étant un entier naturel non nul, on place dans une urne n boules rouges, $8+n$ boules noires et 20 boules blanches. Un joueur tire une boule de l'urne ; on suppose tous les tirages équiprobables.
S'il tire une boule rouge, il perd. S'il tire une boule noire, il gagne.
S'il tire une boule blanche, il remet cette boule dans l'urne et effectue un nouveau tirage, toujours avec équiprobabilité. S'il tire alors une boule noire, il gagne sinon il perd.

1- a)Démontrer que la probabilité que ce joueur a de gagner est f(n) où f est l'application de $\mathbb{R}^*$ vers $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = \frac{(x+8)(x+24)}{2(x+14)^2}$. **(1pt)**
b) Déterminer l'entier n pour que cette probabilité soit maximale. Calculer alors cette probabilité. **(0,75pt)**

2- Dans cette question, on suppose que n = 16.

Pour jouer, le joueur mise 8 pièces.

p et q étant des entiers naturels tels que $p > q > 8$, s'il gagne a l'issue du pre[illegible] tirage, on lui remet p pièces et s'il gagne a l'issue du deuxième tirage, on lui rem[illegible] q pièces. S'il perd il ne reçoit rien.

Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

a) Déterminer la loi de X en fonction de p et q ainsi que son espérance mathématique. **(0,75+0,5pt)**

b) On suppose que p et q sont tels que le jeu est équitable c'est à dire l'espérance mathématique du gain algébrique est nulle.
Montrer alors que $3p + q = 60$. Déterminer les couples (p, q) possibles pour que le jeu soit équitable. **(0,25 +0,75pt)**

c) Pour $p = 16$ et $q = 12$, calculer l'espérance mathématique et l'écart type X. **(0,25 +0,5pt)**

Problème (11 points)

Partie A (4 points)

Pour tout entier naturel non nul n, on considère la fonction f_n définie sur $[0,1]$ par : $f_n(x) = e^{-x} - x^{2n+1}$

1- Etudier les variations de f_n. **(1pt)**

2- Montrer que pour tout entier naturel non nul n, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution u_n et que $u_n \in]0,1[$. **(0,75pt)**
On définit ainsi sur $\mathbb{N}^*$, une suite (u_n).

3- a) Soit n un entier naturel non nul et x un réel de l'intervalle $]0,1[$.
Comparer les réels $f_{n+1}(x)$ et $f_n(x)$. **(0,25pt)**
b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(u_{n+1}) < 0$. **(0,25pt)**
c) Montrer que la suite (u_n) est croissante et en déduire qu'elle est convergente. **(0,75pt)**

4- a) Montrer que pour $n \geq 1$, $\ln(u_n) = -\frac{u_n}{2n+1}$. **(0,5pt)**
b) Calculer la limite de la suite (u_n). **(0,5pt)**

Partie B (07points)

Soit g la fonction définie sur $\left[e^{-\sqrt{2}}, e^{\sqrt{2}}\right]$ par $g(x) = \frac{\sqrt{2-ln^2x}}{x}$ et C_g sa représentation graphique.

1- a) Montrer que $\lim_{x \to e^{\sqrt{2}}} \left(\frac{lnx-\sqrt{2}}{x-e^{\sqrt{2}}}\right) = e^{-\sqrt{2}}$. **(0,5pt)**

b) En écrivant $\frac{g(x)}{x-e^{\sqrt{2}}} = \frac{-(lnx+\sqrt{2})}{x\sqrt{2-ln^2x}} \times \frac{lnx-\sqrt{2}}{x-e^{\sqrt{2}}}$, montrer que $\lim_{x \to (e^{\sqrt{2}})^-} \left(\frac{g(x)}{x-e^{\sqrt{2}}}\right) = -\infty$.
Interpréter graphiquement le résultat. **(0,75pt)**

c) Montrer que g n'est pas dérivable à droite en $e^{-\sqrt{2}}$. **(0,75pt)**

2- Observer, ci-dessous, le tableau donnant le signe de $g''(x)$, le signe de $g'(x)$ et les variations de la fonction g.

x	$e^{-\sqrt{2}}$		e^{-1}		α		β		$e^{-\sqrt{2}}$
$g''(x)$	‖	$-$		$-$		$+$		$-$	‖
$g'(x)$	‖	$+$			$-$				‖
g	0	$\nearrow$	e		$\searrow$				0

Justifier que les points C et D de coordonnées respectives $(\alpha, g(\alpha))$ et $(\beta, g(\beta))$ sont deux points d'inflexions de C_g. **(0,5pt)**

3- Soit φ la fonction définie sur $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ par $\varphi(x) = sinx$

a) Montrer que la fonction φ réalise une bijection de $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ sur $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$. **(0,5pt)**

On note h sa fonction réciproque.

b) Montrer que la fonction h est dérivable sur $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ et que $h'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ **(0,75pt)**

c) Soit u la fonction définie sur $[e^{-1}, e]$ par $u(x) = h(\frac{lnx}{\sqrt{2}})$;

Montrer que pour tout $x \in [e^{-1}, e]$, $u'(x) = \frac{1}{x\sqrt{2-ln^2x}}$. **(0,5pt)**

d) En déduire que $\int_{e^{-1}}^{e} \frac{dx}{x\sqrt{2-ln^2x}} = \frac{\pi}{2}$ **(0,5pt)**

4- Soit A l'aire de la partie du plan limitée par C_g, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = e^{-1}$ et $x = e$.

a) Montrer que $A = 2 + \int_{e^{-1}}^{e} (\frac{ln^2x}{x\sqrt{2-ln^2x}})\, dx$. **(0,75pt)**

b) Vérifier que pour tout $x \in [e^{-1}, e]$, $\frac{ln^2x}{x\sqrt{2-ln^2x}} = \frac{2}{x\sqrt{2-ln^2x}} - g(x)$. **(0,75pt)**

c) En déduire la valeur de A. **(0,75pt)**