COLLEGE JEAN TABI
Département de mathématiques
B.P : 4147 YAOUNDE
TEL/FAX : 222 21 60 53
N/REF : CJT/17-18/DH/AB/NMA

ANNEE ACADEMIQUE 2018-2019
Séquence I
Classe : TC
Durée : 4h
Coef : 6

EPREUVE DE LA SESSION INTENSIVE D'OCTOBRE 2018

L'épreuve, sur deux pages, comporte deux exercices et un problème de deux parties indépendantes.

EXERCICE 1 (5 points)

1- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\sqrt{6-x}+\sqrt{3-x}=\sqrt{x+5}+\sqrt{4-3x}$ (0,75pt)

2- Montrer que pour tout $(a;b)\in\mathbb{Z}^2$, $24a^2+1=b^2 \Rightarrow 5\ divise\ ab.$ (1pt)

3- Déterminer tous les entiers n tels que $n^2+7 divise\ n^3+5$. (1pt)

4- Démontrer par récurrence que « pour tout entier naturel n non nul,
$\frac{\sqrt{n+1}}{2n+1}<\frac{1\times3\times\ldots\times(2n-1)}{2\times4\times\ldots\times(2n)}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ » (1,25pt)

5- Déterminer les chiffres $x\ et\ y$ pour que $\overline{28x75y}^{10}$ soit divisible par 3 et par 11. (1pt)

EXERCICE 2(5 points)

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC de sens direct. A l'extérieur de ce triangle, on construit les carrés ABDE et ACFG de centres respectifs I et J et le parallélogramme AGKE de centre I'. Soient J' le milieu de [BC] et H le projeté orthogonal de A sur (BC).

1/a) Montrer qu'il existe un unique déplacement f tel que $f(C)=A\ et\ f(A)=G$ que l'on caractérisera. (0,5pt)

b) Déterminer $f(B)$ puis montrer que $FB=CK$ et donner une mesure de l'angle $\widehat{\overrightarrow{FB};\overrightarrow{CK}}$ (1pt)

2/ soit $g=S_{I'}\,o\,f$.

a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de g. (1pt)

b) Montrer que $DC=BK$. (0,5pt)

3/ Montrer que $(AK),(DC)\ et\ (FB)$ sont concourantes. (0,5 pt)

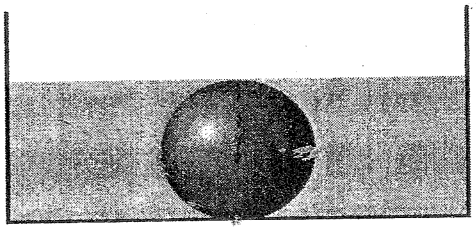
4/ a) Montrer qu'il existe un unique antidéplacement f' que l'on caractérisera tel que : $f'(A)=B\ et\ f'(E)=D$. (0,5pt)

b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $'=t_{\overrightarrow{AD}}\,of'$. (1pt)

PROBLEME (10 points)

PARTIE A

Une boite cylindrique de rayon 12 cm contient de l'eau jusqu'à une hauteur de 5 cm. On immerge une boule métallique dans ce récipient et on constate que la surface de l'eau est tangente à la boule. On désigne par x le rayon de la boule en millimètre



1- Démontrer que $25\le x\le 120$. (0,5pt)

2- Démontrer que x est solution de l'équation : $x^3-21600x+54400=0$ (E) (1pt)

3- Démontrer que l'équation (E) admet deux solutions positives $a_1\ et\ a_2$ telles que
$a_1\in[25{,}6;26]\ et\quad a_2\in[125;135]$ (1,5pt)

4- Déterminer alors une valeur approchée de la boule à 0,1mm près. (0,5pt)

.PARTIE B

I /Montrer que les ensembles $A_1 = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2, x - y = 0\}$ et $A_2 = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2, x + y = 0\}$ sont deux sous espaces supplémentaires de $(\mathbb{R}^2;+;-)$. (2pts)

II/ E est un plan vectoriel rapporté à la base $(\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{e_2})$.

1- f est un endomorphisme de E dont la matrice dans la base $(\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{e_2})$ est $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

a) Montrer que $f\ddot{o}f - 3f - 2Id_E = \theta$ où Id_E est l'application identique de E et θ est l'endomorphisme nul. (0,75pt)

b) Montrer que f est bijectif. (0,25pt)

c) Déterminer la matrice de f^{-1}dans la base $(\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{e_2})$. (0,5pt)

2- Dans cette question, f désigne un endomorphisme de E tel qu'il existe des réels a et b distincts vérifiant : $(f - aId_E)°(f - bId_E) = \theta$. soient p et q les endomorphismes de E définis par :

$$p = \frac{1}{b-a}(f - aId_E) \qquad q = \frac{1}{a-b}(f - bId_E)$$

a) Exprimer $f\ddot{o}f$ à l'aide de f et Id_E. (0,75pt)

b) Montrer que $p\ddot{o}p = p$ et que $q\ddot{o}q = q$ (1,25pt)

c) Déterminer $+q$. (1pt)