Ministère des Enseignements Secondaires
Office du Baccalauréat du Cameroun

Examen : Bacc **Session :** 2019
Série : C-E.
Epreuve : Mathématiques.
Durée : 4 heures.
Coefficient : 5 (C) ; 4(E).

L'épreuve est constituée de 3 exercices et d'un problème que chaque candidat traitera obligatoirement.

EXERCICE 1/(3 points)

Dans l'espace orienté et rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\ \vec{i},\vec{j},\vec{k})$, A, B, C et D sont 4 points tels que A, B et C soient non alignés. On pose $\vec{u} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

1. Déterminer l'ensemble (Γ) des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM}.\vec{u} = 0$. **0,75pt**
2. On donne pour toute la suite de l'exercice : A(1 ; 2 ; 1), B(2 ; 1 ; 1), C(0 ; 1 ; -1) et D(2 ; 4 ; 1).
   a. Montrer que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires. **0,75pt**
   b. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC). **0,75pt**
   c. Déterminer l'expression analytique de la réflexion par rapport au plan (ABC). **0,75pt**

EXERCICE 2/(4 points)

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation: $z^2-(1-2i)z + 1+5i= 0$. **1pt**
2. On suppose le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\ \vec{u},\vec{v})$. A et B sont les points d'affixes respectives $z_A = 2-3i$ et $z_B = -1 + i$.
   a. Soient $(\mathscr{C})$ le cercle de centre A et de rayon 7 et $(\mathscr{C}')$ le cercle de centre B et de rayon 1.
      i. Montrer que tout point du cercle $(\mathscr{C}')$ est intérieur au cercle $(\mathscr{C})$. **0,5pt**
      ii. Soit $(\mathscr{C}'')$ un cercle de centre Ω, extérieurement tangent à $(\mathscr{C}')$ et intérieurement tangent à $(\mathscr{C})$. Justifier que $\Omega A + \Omega B = 8$. **0,5pt**
   b. O' désigne le milieu de [AB] ; on pose $\vec{i} = \frac{\overrightarrow{BA}}{AB}$ et on désigne par $\vec{j}$ le vecteur unitaire tel que $(O';\ \vec{i},\vec{j})$ soit un repère orthonormé direct auquel le plan est maintenant rapporté. On pose $\overrightarrow{O'\Omega} = x\vec{i} + y\vec{j}$ où $x \in [-4 ; 4]$ et on désigne par (D), la droite d'équation : $x = \frac{32}{5}$.
      i) Justifier que $\Omega A=\sqrt{\left(x-\frac{5}{2}\right)^2 + y^2}$, $\Omega B=\sqrt{\left(x+\frac{5}{2}\right)^2 + y^2}$. **0,5pt**
      ii) Montrer que : $\Omega A + \Omega B = 8 \Rightarrow \Omega A = -\frac{5}{8}x + 4$. **0,75pt**
      iii) En déduire que si $\Omega A + \Omega B = 8$ alors $\frac{\Omega A}{d(\Omega;(D))} = \frac{5}{8}$ et donner la nature de la conique à laquelle Ω appartient. **0,75pt**

EXERCICE 3/(3 points)

Une urne contient 7 boules noires et 7 boules jaunes indiscernables au toucher. On tire au hasard et successivement avec remise, n boules de cette urne avec n > 1.

1. Calculer la probabilité d'obtenir des boules de même couleur. **0,75pt**
2. Justifier que la probabilité p d'obtenir exactement une boule noire est : $p= \frac{n}{2^n}$. **0,75pt**
3. On désigne par (u_n) la suite définie par $u_n = \frac{n}{2^n}$ avec n > 1. Soit n un entier strictement supérieur à 1 :
   a. Calculer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et en déduire que la suite (u_n) est décroissante. **0,75pt**
   b. Montrer que la suite (u_n) converge vers 0. **0,75pt**

PROBLEME (10 points).

On considère la fonction g définie dans l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = x^2 + \ln x$.

PARTIE A (3 points).

(E_0) et (E) sont les équations différentielles définies par : (E_0) : $v(x) + xv'(x) = 0$;

(E) : $v(x) + xv'(x) = 3x^2 + \ln x + 1$ où v est une fonction définie et dérivable dans l'intervalle $]0;+\infty[$ et v' sa dérivée.

1. Vérifier que g est une solution de (E) et justifier que la fonction u définie dans $]0;+\infty[$ par $u(x) = \frac{1}{x}$ est une solution de (E_0). **1pt**
2. Soit w une autre solution de (E_0) et k la fonction définie dans l'intervalle $]0;+\infty[$ par $k(x) = \frac{w(x)}{u(x)}$.
   Montrer que k est une fonction constante et en déduire toutes les solutions de (E_0). **1pt**
3. Soit h une fonction définie et dérivable dans $]0\,;+\infty[$.
   a. Montrer que h est solution de (E) si et seulement si $h - g$ est solution de (E_0). **0,5pt**
   b. Déduire la forme générale des solutions de (E). **0,5pt**

PARTIE B (1,75 point).

1. Etudier les variations de la fonction g. **1pt**
2. En déduire que :
   a. L'équation $g(x) = 0$ admet sur $]0\,;+\infty[$ une unique solution α et justifier que $\alpha_0 = 0{,}65$ est une valeur approchée de α à 10^{-2} près par défaut. **0,5pt**
   b. $g(x) > 0 \Leftrightarrow x > \alpha$. **0,25pt**

PARTIE C(5,25 points).

Pour toute la suite, f est la fonction définie dans l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x^2 + \ln^2(x)}$ et on désigne par (C_f), sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$. La fonction g reste la même.

1. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. **0,5pt**
2. Déterminer f' et vérifier que pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = \frac{g(x)}{xf(x)}$. **0,5pt**
3. Dresser le tableau de variation de f. **0,5pt**
4. **a.** Montrer que la droite d'équation $y = x$ est asymptote oblique à (C_f) en $+\infty$. **0,5pt**
   b. Tracer (C_f) avec soin. (unités d'axe : 1,5 cm ; Prendre α = 0,6). **1pt**
5. Soit M($x\,;\,y$) un point de la courbe représentative de la fonction : $x \longmapsto \ln x$.
   a. Justifier que OM = $f(x)$. **0,25pt**
   b. En déduire l'abscisse du point M en lequel la distance OM est minimale. **0,25pt**
6. Soit x un réel strictement positif,
   a. Justifier que $x \leq f(x)$. **0,25pt**
   b. Montrer que $\sqrt{x^2 + \ln^2(x)} - x \leq \frac{\ln^2(x)}{2x}$. **0,5pt**
7. **a.** Déduire que : $\frac{3}{2} \leq \int_1^2 f(x)dx \leq \frac{1}{6}\ln^3(2) + \frac{3}{2}$. **0,5pt**
   b. En déduire en unité d'aire, une valeur approchée à 10^{-1} près par défaut de l'aire de la portion du plan constituée des points M(x ; y) tels que : $\begin{cases} 1 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$. **0,5pt**