MINESEC

CETIG SACRE CŒUR DE MOKOLO

Département de mathématiques

Année scolaire 2024/2025

Evaluation N°1

Niveau : TleC

Durée : 4h, Coef : 7

Date : 26/10/2024

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

PARTIE A : ÉVALUATION DES RESSOURCES — 15points

Exercice 1 : 03 points

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 2x^2 - 1$

1) Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations. 1pt

2) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α tel que $2 < \alpha < 3$. 0,75pt

3) Donner un encadrement d'amplitude 0.1 du nombre α. 0,75pt

4) Déterminer le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x. 0,75pt

Exercice 2 : 03,5 points

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$

On considère l'expression $P(z) = z^3 + (2-2i)z^2 + (2+4i)z - 12i$

1) Montrer que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure z_0 que l'on déterminera.

2) Déterminer les racines carrées de $\delta = 12 - 16i$. 0,75pt

3) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + (2-4i)z - 6 = 0$. 0,75pt

4) Déterminer le polynôme Q de degré 2 tel que $P(z) = (z - z_0)Q(z)$. 0,75pt

5) En déduire la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$. 0,5pt

Exercice 3 : 03,75 points

1) Soit a et b deux entiers naturels.

Montrer que si 3 divise $a^3 + b^3$, alors 3 divise $(a+b)^3$. 0,5pt

2) Soit $c \in \mathbb{Z}$ tel que $c^{19} \equiv 1[139]$.

Montrer que c et 139 sont premiers entre eux. 0,5pt

3) Soit A et B deux nombres entiers tels que $A = \overline{1a3a}^4$ et $B = \overline{bca3}^7$

a) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(E) : 7x + 2y = 50$. 0,75pt

b) Sachant que A est divisible par 11 et que le couple $(b; c)$ est solution de l'équation (E), donner les écritures de A et B en base 10. 1,25pt

4) x et y sont deux entiers naturels non nuls ($x < y$). Trouver x et y sachant que $xy = 1734$ et $PGCD(x; y) = 17$. 1pt

Exercice 4 : 04,75 points

A-1) Énoncer le théorème de BEZOUT. 0,75pt

2.a) Montrer en utilisant le théorème de BEZOUT que $(E) : 21x - 17y = 4$ admet au moins une solution. 0,5pt

b) Montrer que l'équation $(E) : 21x - 17y = 4$ est équivalente à l'équation $(E_0) : 21x \equiv 4[17]$. 0,5pt

3.a) Déterminer l'inverse modulo 17 de 21. 0,25pt

b) Montrer que les solutions de (E_0) sont des entiers relatifs $x = 1 + 17k$. 0,5pt

4) En déduire l'ensemble solutions de $(E) : 21x - 17y = 4$. 0,5pt

B-1) Résoudre dans $\mathbb{Z}$: $x^2 + 2x - 3 \equiv 0[7]$. 0,75pt

2) Démontrer que pour tout entier naturel n, $3^{2n+1} + 2.4^{3n+1}$ est divisible par 11. 1pt

PARTIE B : ÉVALUATION DES COMPÉTENCES 04,5points

Situation :

Sur un plan de relevé topographique menant vers une base militaire, une portion de la route menant à cette base est matérialisée par la courbe (C_f) de la fonction f telle que $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$. Un pont doit être urgemment construit à l'unique point d'abscisse solution de l'équation $f(x) = 0$ mais le maire de la localité n'arrive plus à trouver l'encadrement à $0,1$ près de cette abscisse.

L'un des soldats TEVOU de cette base travaille sur circule RLC top secret de cette base dont les trois impédances complexes sont solutions de l'équation $z^3 - 4iz^2 - (6 + i)z - 1 + 3i = 0$ tel que l'une des impédances soit imaginaire pure. Afin de capter les positions d'éventuels ennemis par un appareil il faut introduire uniquement la partie réelle du nombre.

Madame Irène femme de TEVOU possède un terrain qu'elle veut absolument clôturer avec un fil barbelé vendu à $10000FCFA$ le rouleau équivalent à la moitie du décamètre. Ce terrain forme de tous les points $M(x, y)$ du plan solution de l'équation $Re(\frac{z - 4 - 6i}{z - 2i}) = 0$, avec $z = x + iy$

Tâches :

1) Aider le soldat TEVOU à trouver les valeurs de ces impédances. 1,5pts

2) Aider le maire de cette localité à trouver un encadrement à $0,1$ près de cette abscisse. 1,5pts

3) Évaluer le montant que doit dépenser Madame Irène pour clôturer son terrain. 1,5pts

Présentation : 0,5pt