Ministère des Enseignements Secondaire
Cours de Répétition Excellence++
Tél : 678538676 / 673882629
Enseignant : Chinois Noubissi

Votre SUCCES EST NOTRE PRIORITE

Année Scolaire : 2023/2024
Classe : Tle D et TI
Durée : x heurs
Epreuve : Mathématiques

FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGES SUR LES NOMBRES COMPLEXES ET TRANSFORMATIONS DU PLAN.

EXERCICE 1

1) Résoudre dans $\mathbb{C}^2$ le système suivant : $\begin{cases} 4iz - iz' = 5 + 3i \\ (2-i)z - (2+i)z' = -6i \end{cases}$
2) écrire z et z' sous la forme algébrique puis sous la forme trigonométrique
3) a- determiner la partie réelle et imaginaire du nombre complexe $z = \frac{2(1-3i)}{1-i}$
   b- Determiner le module et un argument de $1+i$
   c- En déduire la forme trigonométrique de $z_2 = (\overline{z})^2$
4) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E): $z^2 - 2i\overline{z} = 0$, où $\overline{z}$ est le conjugué du nombre complexe z

EXERCICE 2

On donne deux nombres complexes $z_1 = -1 + i$ et $z_2 = -\sqrt{2} - i\sqrt{6}$
1) Donner la forme trigonométrique de chacun des nombres complexe z_1 et z_2
2) Ecrire le quotient $\frac{z_1^3}{z_2^2}$ sous la forme algébrique puis sous la forme trigonométrique.
3) En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right)$

EXERCICE 3

Soit θ un nombre réel appartenant à $]0\,;\frac{\pi}{2}[$ et z un nombre complexe. On pose :
$P(z) = z^3 - (2sin\theta + icos\theta)z^2 + (1 + isin2\theta)z - icos\theta$.

1. a) Calculer $P(icos\theta)$.
   b) En déduire que $P(z) = (z - icos\theta)(z^2 - 2sin\theta z + 1)$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation P(z) = 0 et écrire ses solutions sous forme exponentielle.

EXERCICE 4

On donne : $z_0 = 1 - i\sqrt{3}$.

1. Montrer que $z_0^4 = -8 + 8i\sqrt{3}$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 = 1$.
3. En déduire les solutions de (E) : $z^4 = -8 + 8i\sqrt{3}$ sous forme algébrique et sous forme Trigonométrique. On remarquera que (E) est équivaut à $\left(\frac{z}{1-i\sqrt{3}}\right)^4 = 1$.
4. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O;\,\vec{u};\,\vec{v})$, unité graphique 2 cm, Placer les points A, B, C et D d'affixes respective .$z_A = 1 - i\sqrt{3}$, $z_B = -1 + i\sqrt{3}$, $z_C = \sqrt{3} + i$ et $z_D = -\sqrt{3} - i$.
5. Donner une écriture complexe de la rotation r de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

EXERCICE 5

On donne le nombre complexe $u = \sqrt{2-\sqrt{2}} + i\sqrt{2+\sqrt{2}}$

1. a) calculer u^2 et u^4, puis calculer le module et un argument de u^4
   b) En déduire le module et un argument de u
   c) Déduire de la question précédente les valeurs exactes de $cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)$.
2. On considère dans un plan complexe P muni d'un repère orthonormé(o, $\vec{u},\vec{v}$). À tout point M(x,y)

On associe le point son affixe $z = x + iy$.
Déterminer l'ensemble des points M de P pour lesquels le module de uz est égal à 8

EXERCICE 6

On considère le complexe p défini par : $P(z) = z^2 + (1-i)z + 2 - 2i = 0$.

1. a) Calculer $(1+3i)^2$.
   b) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres $P(z) = 0$.
2. Soit φ l'application du plan complexe qui à tout point M d'affixe z ; z≠ -1 associe le Point M' d'affixe z' tel que $z' = \frac{iz-2+2i}{z+1}$.
   a) Montrer que l'application φ admet deux point invariants dont on précisera les affixes
   b) Déterminer l'ensemble (D) des points M du plan tels que |z'| = 1
   c) On pose $z = x + iy \ \ et \ \ z' = x' + iy'$, $x, y, x', et\ y'$ sont des réels.
   Exprimer $x' et\ y'$ en fonction de $x\ et\ y$.
   d) Montrer que l'ensemble (H) des points M tels que z' soit réel est un cercle privé D'un point. Préciser le centre et le rayon de (H)
   e) Montrer que l'ensemble (K) des points M tels que z' soit imaginaire pur est une droit Privée d'un point. Donner une équation de (K).

EXERCICE 7

Soit E, F, G et H les points d'affixes respectives $2+i$; $-1+2i$; $-2-i$ et $1-2i$. S est la similitude Direct du plan qui transforme O en F et H en G

a) Déterminer sous forme exponentielle le complexe $\frac{z_G - z_F}{z_H}$.
b) En déduire l'angle et le rapport de S
c) Donner l'écriture complexe de S, puis préciser son centre

EXERCICE 8

A- 1. Linéariser $cos^3 x$ et $cosxsin^3 x$

2. écrire le nombre complexe $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{1800}$ sous la forme $a + ib\ (où\ b = 0)$

B- Déterminer les racines quatrième de –8-8i$\sqrt{3}$ et représenter leur point images dans Le plan complexe.

I- θ est le nombre réel de l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Déterminer le module et l'argument de chacun des nombres complexes suivant :

$.a)\ \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}$; $b)\ \frac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1}$ et $c)\ \frac{1+itan\theta}{1-itan\theta}$.

II- θ désigne un réel appartenant à $[0, 2\pi]$.

Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation d'inconnue z : $z^2 - \left(2^{\theta+1}cos\theta\right)z + 2^{2\theta} = 0$.

EXERCICE 9

Soit P le polynôme défini par : $P(z) = z^3 - (6+9i)z^2 + (-15+33i)z + 42 + 2i$.

1. Démontrer que p admet une solution imaginaire z_0.
2. Déterminer les réels α et β tels que : $P(z) = (z - z_0)(z^2 + \alpha z + \beta)$.
3. Résoudre l'équation dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.
4. On rapporte le plan complexe au repère orthonormé(o, $\vec{u}, \vec{v}$) et on considère les points A, B et C d'affixes respective $z_A = 2i, z_B = 3 + 2i\ et\ z_C = 3 + 5i$
   a) Placer les points A, B et C dans le repère
   b) Calculer $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$ et en déduire la nature précise du triangle ABC
5. On désigne par r la rotation de centre B qui transforme C en A
   a) quel est l'angle de la rotation r

b) En déduire l'écriture complexe de r

6. Déterminer l'écriture complexe de la similitude directe s de centre A qui transforme B en C

EXERCICE 10

Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct$(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

1) On considère le polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ par $p(z) = z^3 - (2 + i\sqrt{2})z^2 + 2(1 + i\sqrt{2})z - 2i\sqrt{2}$.
   a) Montrer que le nombre complexe $z_0 = i\sqrt{2}$ est une racine de p(z)
   b) Déterminer les couples a et b tels que $\forall\, z \in \mathbb{C}, P(z) = (z - i\sqrt{2})(z^2 + az + b)$.
   c) En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation P(z)=0
2) On considère les points A, B, J et K d'affixes respectives$z_A = 1 + i, z_B = 1 - i, z_j = i\sqrt{2}, z_K = e^{i\frac{3\pi}{4}}$.
   a) Placer les points A, B, J et K
   b) Soit L le symétrique du point J par rapport au point K.
      Montrer que l'affixe du point L est $z_L = -\sqrt{2}$.
   c) Montrer que les points A, B et J appartiennent au cercle de centre O et de rayon $\sqrt{2}$.
   d) Soit D le point d'affixe $z_D = -1 + i$. On considère la rotation r de centre O qui transforme J en D. Déterminer l'écriture complexe de r
3) Déterminer et construire l'ensemble (C) des point M(z) tels que $|2z - 2 - 2i| = 8$
4) Soit S la transformation qui a tout point M(z) associe le point M'(z') tel que :$z' = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)z$.
   a) Donner la nature et les éléments caractéristiques de S
   b) Calculer l'affixe du point A' image du point A par S
   c) Déterminer l'expression analytique de S

EXERCICE 11

Dans le plan complexe P, on considère les points M et M'd'affixe respectives $z = x + iy$ et $z' = x' + iy$ où $(x, y, x' et\ y') \in \mathbb{R}$ soit S la transformation du plan P dans lui-même

Telle que $S(M) = M'$ avec :$\begin{cases} x' = x + y + 2 \\ y' = -x + y + 1 \end{cases}$.

1) Exprimer z' en fonction de z
2) En déduire que S est une similitude directe, préciser ses éléments caractéristiques
3) On considère la rotation R de P dans P d'angle 60° et de centre $\Omega(1, -2)$ telle que R(M)=M'.
   Exprimer z' en fonction de z
4) On pose $H = SoR$, telle que H(M)= M'
   a- Exprimer z' en fonction de z
   b- En déduire la nature de H et ses éléments caractéristiques

EXERCICE 12

Determiner la nature des transformations suivantes du plan complexe et donner tous leurs éléments Caractéristique.

a) $z' = z + 1 + i$

b) $z' = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z + 1 - i$

c) $z' = -z + 1 - 2i$

d) $z' = 4z + 5 - 4i$

e) $z' = (2 - 2i)z - 1 + i$

EXERCICE 13

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2z + 2 = 0$.
2) Soit K, L et M les points d'affixes respectives :$z_K = 1 + i$; $z_L = 1 - i$ et $z_M = -i\sqrt{3}$.
   Placer ces points dans un repère orthogonale direct $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$.
3) a. Soit N le symétrique de M par rapport à L. Démontrer que $z_N = 2 + i(\sqrt{3} - 2)$.
   b. La rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ transforme M en le point A et N en le point C.
      Déterminer les affixes respectives z_A et z_C des points A et C
   c. La translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe 2i transforme M en D et N en B

Déterminer les affixes respectives z_D et z_B des points D et B

4) a. Démontrer que K est le milieu des segments [DB] et [AC]

b. Calculer $\frac{z_C-z_K}{z_B-z_K}$. Puis en déduire la nature du quadrilatère ABCD

SITUATION PROBLEME 1 ; 4.5 points

M. CHINOIS possède trois terrain

Le terrain 1 a la forme telle que la représentation dans le plan complexe rapporté á un repère Orthonormé (unité graphique des axes 6cm) est un polygone dont les sommets A, B et C ont pour affixes respectives $e^{-\frac{\pi}{2}}$; 2 ; $-3+i$

Le terrain 2 a la forme telle que dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé(unité graphique 6cm) est l'ensemble des points M d'affixe z tel que $|iz+1-3i|=4$.

Le terrain 3 a la forme d'un carré dont la longueur du coté est l'unique solution réelle de l'équation (E): $z^3-(10+3i)z^2-(2-30i)z+20=0$ d'inconnue z = x+iy

M. CHINOIS veut clôturer ses trois terrains à l'aide d'un grillage vendu à 5000Frs les 3m

<u>Tâches</u>:

1. Combien va-t-il dépenser pour clôturer le terrain 1 **1,5pt**
2. Combien va-t-il dépenser pour clôturer le terrain 2 **1,5pt**
3. Combien va-t-il dépenser pour clôturer le terrain 3 **1,5pt**

SITUATION PROBLEME 2 : 4.5 points

M. Noubissi possède trois terrains dont il veut absolument clôturer car il lui est rapporté que les personnes mal intentionnées utilisent ces espaces non occupes à des mauvaises fins. M. Noubissi décide donc d'utiliser le fil barbelé vendu à 10500 FCFA le rouleau de 0,05hm.

- le premier terrain a la forme d'un rectangle dont les dimensions sont les parties réelle et imaginaire de la solution de l'équation : $(1+4i)z+(3-4i)\overline{z}=4-8i$, $z=x+iy$.
- le deuxième quant à lui est formé de tous les points $M(x,y)$ du plan vérifiant $|z-3-i|=3$,
- le troisième terrain est formé de tous les points $M(x,y)$ du plan solution de l'équation $R_e(Z)=0$ où .$z'=\frac{z-4-6i}{z-2i}$. $z=x+iy$.

Tâche 1 : Déterminer la somme à dépenser par M. Noubissi pour clôturer le premier terrain **1,5pt**
Tâche 2 : Déterminer la somme à dépenser par M. Noubissi pour clôturer le deuxième terrain **1,5pt**
Tâche 3 : Déterminer la somme à dépenser par M. Noubissi pour clôturer le troisième terrain **1,5pt**

« Quoi qu'il arrive dans la vie, faites toujours le bien… »