Ministère des Enseignements Secondaire
Cours de Répétition La Reussite Plus
Tél : 673882629 / 691544970
Enseignant : Chinois Noubissi

Votre SUCCÈS EST NOTRE PRIORITÉ

Année Scolaire: 2021/2022
Classe : **Tle C/E**
Durée :4 heures ,Coef : 7/6
Epreuve : Mathématiques

FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGÉS N° 1

EXERCICE 1 :

On considère les expréssions (F) et (G) suivant : (F): $3^{2n} - 2^n$ et (G): $3^n + 4 \times 2^{3n}$.

1. a l'aide d'un raissonement par récurrence, démontrer que (F) est divisible par 7 et (G) est un multiple de 5
2. Soit a et b deux nombres réels.
   a) Vérifier que pour tout entier naturel $n \geq 2$; $a(a^n - b^n) + b^n(a - b) = a^{n+1} - b^{n+1}$.
   b) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 2$, on a :
   $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + b^{n-1})$.

EXERCICE 2:

Soit x, y et z trois entiers naturels tels que : $y = \overline{131}^{x}$ et $z = \overline{101}^{x}$.

a) Montrer que l'on peut sans conaitre x, exprimer dans le système de base x le produit xyz
b) Sachant que $x + y + z = 50$ dans le système décimale. Déterminer alors dans le système décimale les entiers x et xyz.
c) Montrer que le nombre qui s'écrit $\overline{10101}$ en base b est divisible par $\overline{111}$ en base b

EXERCICE 3:

1. a) Donner le reste de la division de 6^{10} par 11
   b) Donner le reste de la division de 6^4 par 5
   c) Endeduire que $6^{40} \equiv 1[11]$ et que $6^{40} \equiv 1[5]$
   d) Démontrer que $6^{40} - 1$ est divisible par 55
2. On considère l'équation $17x - 40y = 1$ (E).
   a) justifier que $17x \equiv 1[40]$ et montrer que $x \equiv -7[40]$
   b) Déduire les solutions de (E)

EXERCICE 4:

I-1) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) : $45x - 28y = 1$ d'inconnue (x;y)
2) Endéduire la résolution dans $\mathbb{Z}^2$ de l'équation (E') : $45x - 28y = 6$.
3. Soit x un nombre réel.
   a) Montrer que : $x^4 + 4 = (x^2 + 2)^2 - 4x^2$.
   b) Endéduire que $x^4 + 4$ est le produit de deux trinome à coefficients entiers.
4. Soit un entier naturel n. On considère la fraction $a = \frac{n+7}{n+2}$.
   a) Déterminer n tel que a soit un entier naturel.
   b) Déterminer n tel que a soit une fraction irréductible.
5. Soit n un entier naturel supérieur ou égale à 2. On considère l'entier naturel $a = n^5 - n$.
   a) Demontrer que a est divisible par $n^3 - n$.
   b) Démontrer que a est divisible par

EXERCICE 5:

1) Résoudre l'équation (E): $8x + 5y = 100$.
2) Un groupe d'hommes et de femmes a dépensé 100 pièces de monaie dans une auberge. Les Hommes ont dépensé 8 pièces chacun et les femmes 5 pièces chacune.
   Combien pouvait-il avoir d'hommes et de femmes dans le groupes

EXERCICE 6;

Pour tout entier naturel n≥ 5 , on considère les nombres $a = n^3 - n^2 - 12n$ et $b = 2n^2 - 7n - 4$.

1. Montrer que a et b sont des nombres divisibles par $n - 4$
2. On pose $\alpha = 2n + 1$; $\beta = n + 3$ et $d = PGCD(\alpha, \beta)$.
   a) Etablir une relation indépendente de n entre α et β
   b) Montrer que d est un diviseur de 5

c) Démontrer que les nombres α et β sont multiple de 5 si et seulement si $n - 2$ est multiple de 5

EXERCICE 7:

1) Donner l'écriture du nombre $2^8 - 1$ en base 2
2) Un nombre s'écrit $\overline{x43y}$ dans le système décimale. Déterminer x et y pour qu'il soit divisible Par 5 et 9.
3) Démontrer en utilisant les congruences que pour tout entier naturel n : $3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$. Est divisible par 17

EXERCICE 8:

1) Résoudre dans $\mathbb{Z}$: $x^2 - 4x + 2 \equiv 0[7]$
2) m et n désignent deux entiers naturel non nuls, Déterminer le $PGCD(mn\,;(2m+1)n)$
3) Déterminer les couples (x, y) d'entiers naturels solutions du système: $\begin{cases} xy = 1452 \\ PGCD(x\,,y) = 11 \end{cases}$

EXERCICE 9:

A) Soit g la fonction définie sur [0 ; +∞[par $g(x) = 2 - (x^2+1)\sqrt{x^2+1}$

1. (a) Montrer que $\forall x \in [0\,;\,+\infty[\,, g'(x) = -3x\sqrt{x^2+1}$
   (b) Dresser le tableau de variation de g.
2. (a) Montrer que l'équation g(x) = 0 admet une unique solution α dans [0 ; +∞ [et Vérifier que $0{,}7 < \alpha < 0{,}8$. En déduire le signe de g(x) pour tout $x \in [0\,;\,+\infty\,[$.

B) On considère la fonction f définie sur [0 ; +∞ [par $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} - x + 1$. soit (C) sa courbe Représentative dans un repère orthonormé $(O\,,I\,,J)$ (unité graphique : 2cm)

1. (a) Déterminer la limite de f en +∞
   (b) Montrer que pour tout $x \in [0\,;\,+\infty\,[\,, f'(x) = \frac{g(x)}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$
   (c) Drésser le tableau de variation de f
2. Montrer que la droite (D) : $y = -x + 3$ est asymptote á (C) au voisinage de + ∞
3. Montrer que $\forall x \geq 0,\ \ x - \sqrt{x^2+1}\ < 0$. En déduire la position relative de (C) et (D)
4. (a) Montrer que $\sqrt{\alpha^2+1} = \frac{2}{\alpha^2+1}$ et en déduire que $f(\alpha) = \alpha^3 + 1$
   (b) Tracer (D) et (C). On prendra $\alpha \cong\ 0{,}75$

EXERCICE 10:

Soit la fontion h telle que $h(x) = x - \ln(x+3)$.

1. Etudier les variation de h et en déduire le nombre de solution de l'équation $h(x) = 0$. On note β la plus grande d'entre –elles. Justifier que $1 < \beta < 2$.
2. On considère la suite u définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$; n entier naturel où $g(x) = \ln(x+3)$
   a) Démontrer pour tout $x \in [1\,;2], |\,g'(x)| \leq \frac{1}{4}$
   b) Démontrer que pour tout entier naturel n, $1 \leq u_n \leq 2\ \ et\ \ |u_{n+1} - \beta| \leq \frac{1}{4}|u_n - \beta|$.
   c) En déduire que pour tout entier naturel n, $|u_n - \beta| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$ et préciser la limite de u

EVALUATION DES COMPETENCES : 4,5 points

Sur les billets de banque en euros figure un code de 11 chiffres précédé d'une lettre.On remplace la lettre par son rang dans l'alphabet habituel comportant 26 lettres. Ce reste est le męme pour tous les billets authentique et vaut 8

Un billet de banque A porte le code u01308937097. et sur un billet authentique B figure le code S0216644810x. x pour le dernier chiffre illisible

Sur un autre billet de banque C la partie du code formée par les 11 chiffres est 16122340242, mais la lettre qui les précède est éffacée. sachant qu'on obtient le même reste en divisant un nombre par 9 qu'en divisant la somme des chiffres par 9

Tâches:

1) Le billet A est –il authentique ? 1,5pt
2) Déterminer la valeur de x 1,5pt
3) Quelle est la lettre éffacée ? 1,5pt

≪ **Quoi qu'il arrive dans la vie, faites toujour du bien...**≫