EPREUVE DE MATHEMATIQUES N°2 DU 1er TRIMESTRE

PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES : (15 points)

EXERCICE 1 : (4,5 points)

On considère les fonctions g et f définies par $g(x) = 4x^3 - 3x - 8$ et $f(x) = \dfrac{x^3+1}{4x^2-1}$.

1. Etudie les variations de la fonction g et dresse son tableau de variations. **1pt**
2. **(a)** Montre que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique λ sur $\mathbb{R}$. **0,5pt**

   (b) Justifie que $1 < \lambda < 2$, puis donne un encadrement de λ à 10^{-2} près. **0,5pt**

   (c) Détermine le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x. **0,5pt**
3. Montre que pour tout $x \in D_f$, $f'(x) = \dfrac{xg(x)}{(4x^2-1)^2}$. Dresse le tableau de variations de f. **1pt**
4. **(a)** Montre que $f(\lambda) = \dfrac{3}{8}\lambda$. **0,5pt**

   (b) Déduis-en une valeur approchée de $f(\lambda)$ à 10^{-2} près. **0,5pt**

EXERCICE 2 : (3,5 points)

E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ dont une base est $\mathscr{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit φ l'endomorphisme de E qui à tout vecteur $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ associe le vecteur $\varphi(\vec{u}) = (-x-y+2z)\vec{i} + (2x-y+z)\vec{j} + (x-2y+3z)\vec{k}$.

1. Détermine la matrice de φ dans la base $\mathscr{B}$. **0,5pt**
2. **(a)** Détermine le noyau $\ker\varphi$ de φ et en donne une base. **0,75pt**

   (b) Déduis-en la dimension de $\operatorname{Im}\varphi$, image de φ. φ est-elle bijective ? Justifie. **0,75pt**
3. On considère les vecteurs $\vec{e_1} = 2\vec{j} - \vec{k}$; $\vec{e_2} = 3\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$; $\vec{e_3} = \vec{i} - \vec{k}$.

   (a) Démontre que la famille $\mathscr{B}' = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ est une base de l'espace vectoriel E. **0,5pt**

   (b) Détermine la matrice de φ dans la base $\mathscr{B}'$. **1pt**

EXERCICE 3 : 3,75 points

1. Calcule $PGCD(4^5-1, 4^6-1)$. **0,5pt**
2. Soit (U_n) la suite définie par : $U_0 = 0, U_1 = 1$ et, $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+2} = 5U_{n+1} - 4U_n$.

   (a) Calcule les termes U_2, U_3 et U_4. **0,75pt**

   (b) Montre que $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = 4U_n + 1$ et que, $U_n \in \mathbb{N}$. **0,75pt**

   (c) Déduis-en, pour tout $n \in \mathbb{N}, PGCD(U_n, U_{n+1})$. **0,25pt**
3. Soit (V_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $V_n = U_n + \dfrac{1}{3}$.

   (a) Montre que (V_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le 1er terme V_0. Exprimer V_n puis U_n en fonction de n. **1pt**

   (b) Détermine, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $PGCD(4^{n+1}-1, 4^n-1)$. **0,5pt**

EXERCICE 4 : (3,5 points)

1. **(a)** Utilise l'algorithme d'Euclide pour déterminer un couple (x_0, y_0) d'entiers relatifs solution de l'équation $48x+35y=1$. **0,75pt**

   (b) Déduis-en l'ensemble des solutions dans $\mathbb{Z}^2$ de cette équation. **0,75pt**

   (c) Donne l'ensemble des solutions dans $\mathbb{Z}^2$ de l'équation $336x+245y=7$. **0,25pt**

2. L'espace étant rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on donne le vecteur $\vec{u}(48,35,24)$ et le point $A(-11,35,-13)$.

   (a) Précise la nature et donne une équation cartésienne de l'ensemble $\mathscr{P}$ des points M de l'espace, de coordonnées (x,y,z) tels que : $\vec{u}\cdot\overrightarrow{AM}=0$. **0,75pt**

   (b) Soit $\mathscr{D}$ la droite d'intersection de $\mathscr{P}$ avec le plan d'équation $z=16$.

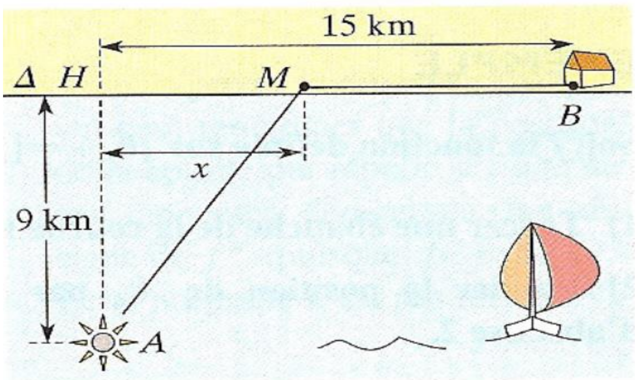
   Détermine tous les points de $\mathscr{D}$ à coordonnées entières appartenant à l'intervalle $[-100;100]$. **1pt**

PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES (5 points)

<u>SITUATION</u> :

M. BELL habite la localité d'Edéa en bordure du fleuve Sanaga. Il a une vieille pirogue à moteur qui lui permet de se déplacer sur la Sanaga pour creuser du sable.

Pour des raisons obscures, **M. BELL** (point A) doit rejoindre le plus rapidement la maison côtière (point B). Il se déplace sur la pirogue à la vitesse de $4km/h$ puis à pied à la vitesse de $5km/h$. La côte est rectiligne et la dérive due au courant de l'eau est nulle.
Les dimensions utiles sont sur le dessin (voir figure).



Pour stocker son sable, **M. BELL** dispose d'un domaine ayant la forme d'un rectangle acquis à 2500 **FCFA** le m^2 dont la longueur L et la largeur l sont telles que $L=|b-c|$ et $l=\dfrac{aL}{5}$, a entier naturel avec a,b et c les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation : $(E): z^3-(4+4i)z^2-(7-14i)z+30-6i=0$. Le plan complexe étant rapporté au repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$ d'unité graphique $10m$.

M. BELL a entre 800 et 1000 brouettes de sable de 1200 **FCFA**. S'il fait des tas de 12 brouettes, il lui en restera 4 et s'il fait des tas de 11 brouettes, il lui en restera 3.

Tâches :

1. Où doit accoster **M. BELL** pour que le temps de parcours soit minimal ? **1,5pt**
2. A combien **M. BELL** avait-il acquis son domaine pour le stockage du sable ? **1,5pt**
3. Quelle somme gagnera **M. BELL** après la vente de toutes ses brouettes de sable ? **1,5pt**

Présentation générale : 0,5pt