COLLECTION
INTER
AFRICAINE DE
MATHEMATIQUES

1re Littéraire

# MATHEMATIQUES

EDICEF

Collection
Inter
Africaine de
Mathématiques

Sous la direction
de Saliou TOURÉ
Professeur à l'université
d'Abidjan

# MATHÉMATIQUES

## 1re LITTÉRAIRE

Mamadi CAMARA
Missa COULIBALY
Jules Kouadio N'DA
Paul-Florent ONGONE-EBE

EDICEF
58, rue Jean-Bleuzen
92178 Vanves Cedex

L'idée d'harmoniser les programmes de mathématiques entre les pays francophones d'Afrique et de l'océan Indien remonte à l'année 1983 où fut organisé par l'IRMA, à Abidjan, le premier séminaire d'harmonisation. Depuis, d'autres séminaires ont suivi : en 1985 à Cotonou, en 1988 à Conakry et en juin 1992 à Abidjan avec la participation de 20 pays.

## PARTICIPATION DES DIFFÉRENTS PAYS

| | | | |
|---|---|---|---|
| BÉNIN | COMORES | GUINÉE | RÉP. DÉM. CONGO |
| BURKINA FASO | CONGO | MADAGASCAR | RWANDA |
| BURUNDI | CÔTE D'IVOIRE | MALI | SÉNÉGAL |
| CAMEROUN | DJIBOUTI | MAURITANIE | TCHAD |
| CENTRAFRIQUE | GABON | NIGER | TOGO |

La suite logique, souhaitée par tous les participants, est l'élaboration d'une Collection Inter-Africaine de manuels de mathématiques pour l'enseignement secondaire. Des rédacteurs de tous les pays participent à la réalisation de ce projet. Un comité de coordination travaille avec les cellules nationales mises en place dans chaque pays.

## COMITÉ DE COORDINATION

| | |
|---|---|
| Missa COULIBALY | Denis OUEHI |
| Isidore KOFFI | Marie-Ange TANOE |
| Jules Kouadio N'DA | Soma TRAORÉ |

D'autres séminaires de concertation ont réuni les responsables de ces cellules, à Libreville en 1993, à N'djamena en 1994, à Yaoundé en 1995, à Antananarivo en 1996, à Dakar en 1997, à Niamey en 1998, à Nouakchott en 1999, à Ouagadougou en 2000 et à Cotonou en 2001.

ISSN 1248-587-X
ISBN 978-2-84129-757-3

# PRÉFACE

Dans un monde qui évolue rapidement, la maîtrise et l'approfondissement des mathématiques apparaissent comme une condition indispensable au développement des nations, plongées qu'elles sont dans l'ère de la haute technologie et de la mondialisation des marchés.

Voilà pourquoi les mathématiciens africains ont commencé, dès 1983, à organiser des réunions de concertation sur les problèmes posés par l'enseignement des mathématiques qui jouent un rôle essentiel dans la préparation des jeunes aux défis de l'avenir.

La Collection Inter-Africaine de Mathématiques que nous proposons aujourd'hui aux élèves de l'Enseignement Secondaire des pays francophones d'Afrique et de l'Océan Indien est le fruit de cette collaboration franche et fraternelle qui a abouti, au mois de juin 1992, à l'élaboration et à l'adoption par tous ces pays des programmes des premier et second cycles de l'Enseignement Secondaire.

Elle a pour objectifs majeurs :

– l'harmonisation de la pédagogie des mathématiques et la mise à la disposition des élèves et des enseignants africains de manuels de qualité tenant compte du milieu socioculturel africain en tant que support et véhicule privilégiés des concepts mathématiques ;

– l'acquisition par les élèves des bases d'une formation mathématique solide qui leur permettent d'analyser une situation, de conjecturer des hypothèses et de les valider ou non à l'épreuve des faits ou du raisonnement, de recourir aux modèles mathématiques qu'ils connaissent et de dégager une conclusion ;

– la diminution du coût du manuel pour permettre la réalisation d'un vieux rêve : un élève, un livre.

Les ouvrages de la Collection Inter-Africaine de Mathématiques, rédigés par des équipes d'enseignants, de chercheurs et de responsables pédagogiques africains, belges et français, s'appuient sur l'environnement des élèves pour les motiver, les faire agir, les amener à comprendre et à agir de nouveau, de manière autonome et créatrice. Les contenus adoptés et les méthodes pédagogiques préconisées ont été systématiquement expérimentés dans plusieurs pays avant que ne soient entreprises les rédactions définitives.

Conformément à notre conception de l'enseignement des mathématiques, nous n'avons pas voulu présenter les leçons sous forme d'exposés théoriques, mais comme des séances de travail au cours desquelles des activités de calcul, de dessin, de lecture de documents (le plus souvent empruntés au milieu africain) sont mises en œuvre pour solliciter et provoquer constamment la participation active des élèves.

Insérés dans les leçons, des exercices d'application immédiate permettent l'assimilation des notions étudiées. Placés à la fin des chapitres, des exercices d'entraînement et d'approfondissement permettent aux élèves d'éprouver leur compétence et aux professeurs d'évaluer leur enseignement.

Nous exprimons notre gratitude aux différents Ministres chargés de l'Éducation dans les pays francophones d'Afrique et de l'océan Indien, ainsi qu'aux responsables de la Coopération Française et de la Coopération Belge qui, par leur compréhension, leurs encouragements et leur soutien constant tant moral que matériel, nous ont permis de réaliser ces ouvrages dans les meilleures conditions possibles.

Enfin, nous espérons que ce manuel répondra au mieux à l'attente et aux besoins des utilisateurs (professeurs et élèves). Afin d'en améliorer les prochaines éditions, nous accueillerons avec reconnaissance les remarques, les critiques et les suggestions qu'ils voudront bien nous faire et, par avance, nous les en remercions.

**Saliou TOURÉ**

# SOMMAIRE

# INDEX
## des notions abordées

# ALPHABET GREC

| Majuscule | Minuscule | Appellation |
|---|---|---|
| Α | α | alpha |
| Β | β | bêta |
| Γ | γ | gamma |
| Δ | δ | delta |
| Ε | ε | epsilon |
| Ζ | ζ | dzêta |
| Η | η | êta |
| Θ | θ | thêta |
| Ι | ι | iota |
| Κ | κ | kappa |
| Λ | λ | lambda |
| Μ | μ | mu |
| Ν | ν | nu |
| Ξ | ξ | ksi |
| Ο | ο | omicron |
| Π | π | pi |
| Ρ | ρ | rhô |
| Σ | σ | sigma |
| Τ | τ | tau |
| Υ | υ | upsilon |
| Φ | φ | phi |
| Χ | χ | khi |
| Ψ | ψ | psi |
| Ω | ω | oméga |

Imprimé en Inde par Thomson Press India Ltd
Dépôt légal : 05/2009 - Collection n° 61 - Edition n° 07
59/6157/8

Fruits de la collaboration entre les mathématiciens des pays francophones d'Afrique et de l'océan Indien, les ouvrages de la Collection Inter-Africaine de Mathématiques (CIAM) reposent sur un profond travail d'investigation et d'expérimentation.

Cette collection a pour objectifs :

• l'harmonisation de la pédagogie des mathématiques et la mise à la disposition des élèves et des enseignants africains de manuels de qualité, tenant compte du milieu socio-culturel africain en tant que support et véhicule privilégiés des concepts mathématiques ;

• l'acquisition par les élèves des bases d'une formation mathématique solide qui leur permettent d'analyser une situation, de conjecturer des hypothèses et de les valider ou non à l'épreuve des faits ou du raisonnement, de recourir aux modèles math[illegible] qu'ils connaissent [illegible] conclusion ;

• la diminution du [illegible] pour permettre la r[illegible] vieux rêve : un élève, un [illegible]

ISBN : 978-2-84129-757-3

9 782841 297573

DIFFUSION
R.C.I. : NOUVELLES ÉDITIONS IVOIRIENNES
AUTRES PAYS : EDICEF

59.6157.8

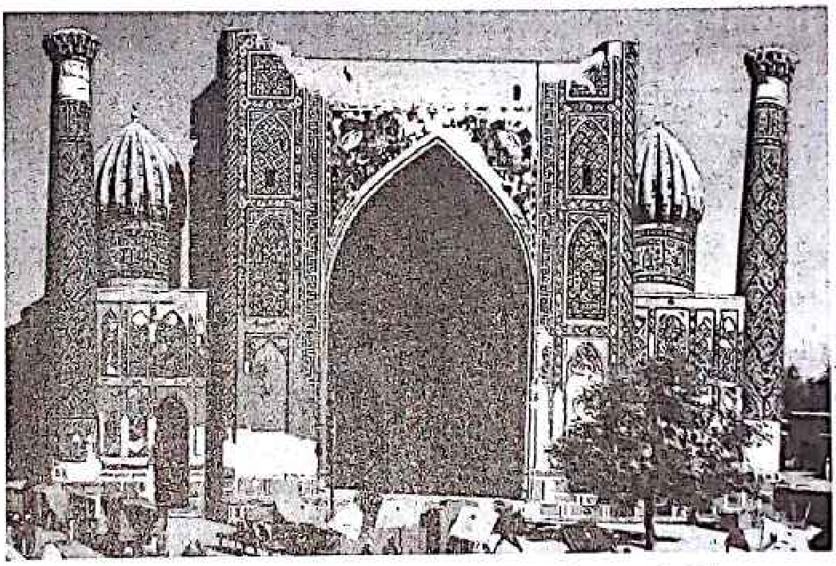
1

# Problèmes du second degré

## Introduction

*Ce chapitre renforce les acquis de l'élève sur le calcul littéral par la mise à sa disposition d'un nouvel outil pour résoudre les équations du second degré : le discriminant.*

*Il sera réinvesti dans la résolution de certains problèmes concrets et la représentation graphique de fonctions polynômes du second degré.*



© Scala – Galerie Tretiakov, Moscou

Samarcande accueillit de nombreux mathématiciens au XII[e] siècle, dont Omar al-Khayyâm.

## SOMMAIRE

# 1 Équations du second degré

## 1.1. Polynômes du second degré

### Introduction

Développer, réduire et ordonner les polynômes suivants.

$P(x) = (3 - 4x)(x + 2)$ ; $Q(x) = (x - 1)^2 - 25$ ; $R(x) = 3\left[\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{16}{9}\right]$.

**Définition**

**$x$ est une variable réelle.**
**Un polynôme de forme réduite $P(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ est appelé polynôme du second degré.**

### Vocabulaire

Le coefficient du terme de degré 2 est $a$ ;
le coefficient du terme de degré 1 est $b$ ;
le coefficient du terme de degré 0 est $c$.

*Exemples*

| | $P(y) = 3y^2 - 10$ | $Q(t) = t^2 - 4t + 7$ | $R(u) = -u^2 + 5u$ |
|---|---|---|---|
| $a$ | 3 | 1 | $-1$ |
| $b$ | 0 | $-4$ | 5 |
| $c$ | $-10$ | 7 | 0 |

### Forme canonique d'un polynôme du second degré

On donne le polynôme : $P(x) = 3x^2 - 6x + 24$.

- Vérifier l'égalité : $P(x) = 3[(x - 1)^2 + 7]$.
- Compléter les différentes étapes du calcul menant à ce résultat :

$$3x^2 - 6x + 24 = 3[x^2\boxed{\phantom{00}}x\boxed{\phantom{00}}]$$
$$= 3[(x\boxed{\phantom{00}})^2\boxed{\phantom{00}} + 8]$$
$$= 3[(x - 1)^2 + \boxed{\phantom{00}}].$$

### Vocabulaire

Tout polynôme $P(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ peut s'écrire sous la forme :
$P(x) = a[(x + p)^2 + q]$, $(a \in \mathbb{R}^*, p \in \mathbb{R}, q \in \mathbb{R})$.
On dit qu'on a écrit $P(x)$ sous **forme canonique**.

*Exemples*

- Écrire le polynôme $P(x) = -2x^2 + 5x + 3$ sous forme canonique.

On a : $P(x) = -2[x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{3}{2}]$

$$= -2[(x - \frac{5}{4})^2 - \frac{25}{16} - \frac{3}{2}]$$
$$= -2[(x - \frac{5}{4})^2 - \frac{49}{16}]$$

- À l'aide de la méthode utilisée précédemment, vérifier que les polynômes suivants ont pour forme canonique les expressions indiquées.

| Polynôme | $Q(x) = x^2 + 4x + 5$ | $S(x) = 2x^2 + 12x + 10$ | $T(x) = 4x^2 - 8x + 1$ |
|---|---|---|---|
| Forme canonique | $(x + 2)^2 + 1$ | $2[(x + 3)^2 - 4]$ | $4[(x - 1)^2 - \frac{3}{4}]$ |

**M**

Pour écrire un polynôme $P(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) sous forme canonique, on peut également utiliser la formule suivante que nous admettons :

$$P(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right], \text{ avec } \Delta = b^2 - 4ac.$$

Le nombre $\Delta$ est appelé **discriminant** de $P(x)$.

***Exemple***

On donne le polynôme : $P(x) = -2x^2 + 8x + 6$.
Écrire $P(x)$ sous forme canonique.
On a : $a = -2$, $b = 8$ et $c = 6$.
Donc : $\frac{b}{2a} = -2$ ;

$\Delta = b^2 - 4ac = 64 - 4 \times (-2) \times 6 = 112$ ;

$\frac{\Delta}{4a^2} = \frac{112}{4 \times (-2)^2} = 7.$

On en déduit que : $P(x) = -2[(x - 2)^2 - 7]$.

## Racines d'un polynôme du second degré

Compléter le tableau suivant.

| Polynôme | $x^2 - 5x + 10$ | $9x^2 - 6x + 1$ | $2x^2 + 5x - 12$ |
|---|---|---|---|
| Discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ | $\Delta = -15$ | | |
| Forme canonique | | | $2[(x + \frac{5}{4})^2 - \frac{121}{16}]$ |
| Forme factorisée | On ne peut pas factoriser | | |
| Racines | | Une racine : $\alpha = \frac{1}{3}$ | |

Cette activité suggère qu'il y a un lien entre le discriminant d'un polynôme du second degré et ses racines.
Le point méthode suivant précise ce lien.

**M**

Pour déterminer les racines d'un polynôme $P(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$), on peut :
- calculer son discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ ;
- utiliser le tableau ci-dessous.

| Discriminant | $\Delta < 0$ | $\Delta = 0$ | $\Delta > 0$ |
|---|---|---|---|
| Racines | $P(x)$ n'a pas de racine | $P(x)$ a une racine : $\alpha = -\frac{b}{2a}$ | $P(x)$ a deux racines : $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ |

**Remarques**

- *Si les coefficients $a$ et $c$ sont de signes contraires, alors $\Delta > 0$ ; donc $P(x)$ a deux racines.*
- *Lorsque $\Delta = 0$, on obtient une seule racine : $-\dfrac{b}{2a}$.*

## Utilisation des racines pour factoriser un polynôme

**M**

Soit le polynôme $P(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$.
Pour écrire $P(x)$ comme un produit de facteurs du premier degré, on peut utiliser le tableau suivant.

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Racines** | $P(x)$ n'a pas de racine | $P(x)$ a une racine : $\alpha$ | $P(x)$ a deux racines : $x_1$ et $x_2$ |
| **Factorisation** | On ne peut pas factoriser $P(x)$ | $P(x) = a(x - \alpha)^2$ | $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ |

***Exemples***

Factoriser, si possible, les polynômes suivants.

$P(x) = x^2 - x + 1$ ; $Q(x) = -\dfrac{1}{2}x^2 + 4x - 8$ ; $R(x) = 2x^2 + x - 3$.

- $P(x)$ a pour discriminant : $\Delta = (-1)^2 - 4 = -3$.

On a : $\Delta < 0$ ; donc, $P(x)$ n'a pas de racine ; on ne peut pas factoriser $P(x)$.

- $Q(x)$ a pour discriminant : $\Delta = 4^2 - 4 \times (-8) \times (-\dfrac{1}{2}) = 0$.

Donc, $Q(x)$ a une racine : 4 ; $Q(x) = -\dfrac{1}{2}(x - 4)^2$.

- $R(x)$ a pour discriminant : $\Delta = 1^2 - 4 \times 2 \times (-3) = 25$.

On a : $\Delta > 0$ ; donc, $R(x)$ a deux racines : $x_1 = \dfrac{-1-5}{4} = -\dfrac{3}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-1+5}{4} = 1$ ;

$R(x) = 2(x + \dfrac{3}{2})(x - 1) = (2x + 3)(x - 1)$.

## Résolution d'une équation du second degré

Soit le polynôme du second degré : $P(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$.
Toute équation du type $P(x) = 0$ est appelée **équation du second degré**.
Résoudre dans $\mathbb{R}$ une telle équation revient à déterminer les racines du polynôme $P(x)$.
Le discriminant du polynôme $P(x)$ est aussi appelé **discriminant de l'équation** $P(x) = 0$.

La méthode suivante se déduit de la méthode de détermination des racines d'un polynôme du second degré.

**M**

Pour résoudre une équation du second degré (E) : $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$, on peut :

- calculer son discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ ;
- utiliser le tableau ci-dessous.

| **Discriminant** | $\Delta < 0$ | $\Delta = 0$ | $\Delta > 0$ |
|---|---|---|---|
| **Solutions** | (E) n'a pas de solution | (E) a une solution : $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ | (E) a deux solutions : $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ ; $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ |

***Exemples***

**Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations du second degré suivantes.**

$(E_1) : 4x^2 - x + 1 = 0$ ;

$(E_2) : (\sqrt{2} + 1)x^2 - 2x + \sqrt{2} - 1 = 0$ ;

$(E_3) : 3x^2 + 11x - 20 = 0$.

*Résolution de $(E_1)$*

On a : $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 4 \times 1 = -15$.

L'équation $(E_1)$ n'a pas de solution.

*Résolution de $(E_2)$*

On a : $\Delta = (-2)^2 - 4(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1) = 0$.

L'équation $(E_2)$ a une solution : $\alpha = \dfrac{2}{2(\sqrt{2}+1)} = \sqrt{2} - 1$.

*Résolution de $(E_3)$*

On a : $\Delta = 11^2 - 4 \times 3 \times (-20) = 361 = 19^2$.

L'équation $(E_3)$ a deux solutions :

$$x_1 = \frac{-11 - 19}{6} = \frac{-30}{6} = -5 \quad ; \quad x_2 = \frac{-11 + 19}{6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}.$$

## 1.2. Somme et produit des solutions d'une équation du second degré

### Détermination de la somme et du produit des solutions

Considérons l'équation du second degré (E) : $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$.

Si son discriminant $\Delta$ est positif, alors (E) a deux solutions : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

On a : $x_1 + x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} + \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = -\dfrac{b}{a}$ ;

$$x_1 \times x_2 = \left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = \frac{c}{a}.$$

On a démontré la propriété suivante.

**Propriété**

**Si l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ a deux solutions $x_1$ et $x_2$,**

**alors $x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a}$ et $x_1 \times x_2 = \dfrac{c}{a}$.**

***Exemple***

Considérons l'équation du second degré : $2x^2 - 9x + 6 = 0$.

Son discriminant est : $\Delta = (-9)^2 - 4 \times 2 \times 6 = 33$.

L'équation a deux solutions $x_1$ et $x_2$.

On a : $x_1 + x_2 = \dfrac{9}{2}$ et $x_1 \times x_2 = \dfrac{6}{2} = 3$.

### Remarques

• *Le signe de la somme et du produit des solutions d'une équation du second degré permet, sans les calculer, de déterminer le signe de ces solutions.*

*Ainsi, dans l'exemple précédent, l'équation a deux solutions positives.*

• *Lorsque les coefficients a et c sont de signes contraires, l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ a deux solutions de signes contraires.*

## Détermination de deux nombres dont on connaît la somme et le produit

**1. Déterminer, lorsqu'ils existent, deux nombres ayant pour somme 2 et pour produit 4.**

### Solution

Désignons par $x$ et $y$ ces deux nombres.

On a : $\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - x \\ x(2 - x) = 4. \end{cases}$

$x(2 - x) = 4 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 4 = 0.$

Donc, si $x$ et $y$ existent, ils sont solutions de l'équation du second degré : $x^2 - 2x + 4 = 0$.
Son discriminant est : $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 4 = -12$.
On a : $\Delta < 0$ ; donc l'équation n'a pas de solution.
On ne peut pas trouver deux nombres ayant pour somme 2 et pour produit 4.

**2. Déterminer les dimensions d'un rectangle dont le périmètre est 70 m et l'aire 300 m².**

### Solution

Désignons par $x$ et $y$ les dimensions du rectangle.

On a : $\begin{cases} x + y = 35 \\ xy = 300 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 35 - x \\ x(35 - x) = 300. \end{cases}$

$x(35 - x) = 300 \Leftrightarrow x^2 - 35x + 300 = 0.$

Donc, si $x$ et $y$ existent, ils sont solutions de l'équation du second degré : $x^2 - 35x + 300 = 0$.
Son discriminant est : $\Delta = (-35)^2 - 4 \times 1 \times 300 = 25$.

L'équation a deux solutions : $x_1 = \dfrac{35 - 5}{2} = \dfrac{30}{2} = 15$ ;

$x_2 = \dfrac{35 + 5}{2} = 20.$

Le rectangle a pour largeur 15 m et pour longueur 20 m.

## Utilisation de la somme et du produit des solutions

**1. On considère l'équation (E) : $4x^2 + 17x - 15 = 0$.**
***a)* Justifier que $-5$ est solution de (E).**
***b)* En déduire l'autre solution, en utilisant la somme (ou le produit) des solutions.**

### Solution

*a)* On a : $4(-5)^2 + 17(-5) - 15 = 0$ ; donc $-5$ est solution de (E).

*b)* Désignons par $x$ l'autre solution de (E).

- La somme des solutions est $\dfrac{-17}{4}$, c'est-à-dire : $x - 5 = \dfrac{-17}{4}$ ; donc : $x = \dfrac{-17}{4} + 5 = \dfrac{3}{4}$.
- On aurait pu utiliser le produit : $-5x = \dfrac{-15}{4}$ ; donc : $x = \dfrac{3}{4}$.

**2. On considère l'équation (E) : $x^2 - (\sqrt{5} + \sqrt{7})x + \sqrt{35} = 0$.**
***a)* Justifier que (E) a deux solutions.**
***b)* Déterminer la somme et le produit des solutions.**
***c)* Déduire des questions précédentes les solutions de (E).**

### Solution

*a)* On a : $\Delta = (\sqrt{5} + \sqrt{7})^2 - 4 \times 1 \times \sqrt{35} = 12 - 2\sqrt{35}$.
$\Delta > 0$ ; donc l'équation (E) a deux solutions.

*b)* Désignons par $x$ et $y$ ces deux solutions.

On a : $\begin{cases} x + y = \sqrt{5} + \sqrt{7} \\ xy = \sqrt{35} \end{cases}$.

*c)* $\sqrt{5}$ et $\sqrt{7}$ vérifient le système ; donc les solutions de (E) sont $\sqrt{5}$ et $\sqrt{7}$.

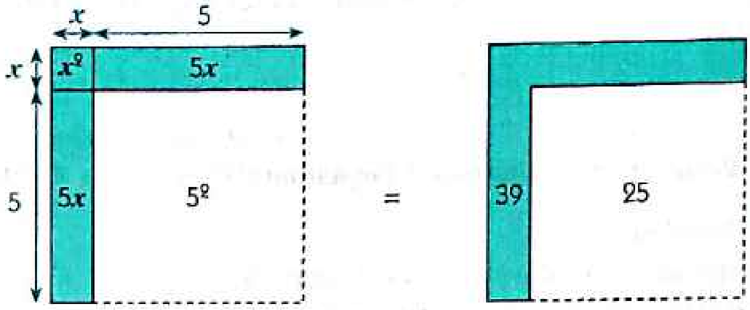
## 1.3. Travaux dirigés

### Résolution d'équations par la méthode d'Al-Khwarizmi

*Al-Khwarizmi (788 – 850) est un mathématicien arabe de Bayt al-hikma, un institut de recherches scientifiques créé à Bagdad par le calife Al-Ma'moun (813 – 833), qui n'est autre que le fils de Haroun Al-Rachid, le célèbre personnage des « Mille et Une Nuits ».*
*La publication de son traité « L'Abrégé du calcul par al-jabr et al-muqabala » donne l'acte de naissance officiel de l'algèbre en tant que discipline avec un nom (découlant du mot al-jabr), des objets, des outils, des preuves et des domaines d'application.*

**Nous allons présenter la méthode mise au point par Al-Khwarizmi pour résoudre l'équation $x^2 + 10x = 39$.**

- On dessine un carré de côté $x$.
- On colle à ce carré deux rectangles de côtés $x$ et 5, 5 étant la moitié de 10.
- On obtient ainsi un carré incomplet, mais incomplet d'une grandeur connue.




- On a donc :

$$x^2 + 2 \times 5x + 5^2 = 39 + 25$$
$$(x+5)^2 = 64$$
$$x + 5 = 8 \quad \text{ou} \quad x + 5 = -8$$

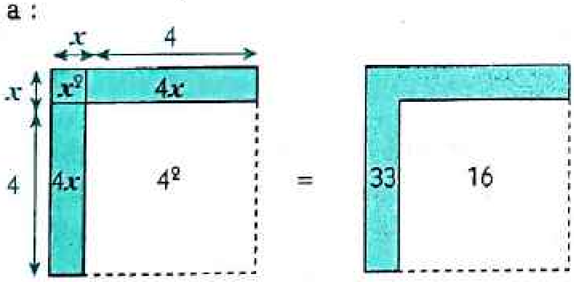
- En admettant la solution négative, on obtient :

$$x = 3 \quad \text{ou} \quad x = -13.$$

**Par la méthode d'Al-Khwarizmi, résoudre, en admettant les solutions négatives, les équations suivantes.**
**$(E_1) : x^2 + 8x = 33$ ; $(E_2) : x^2 + 20x = 125$.**

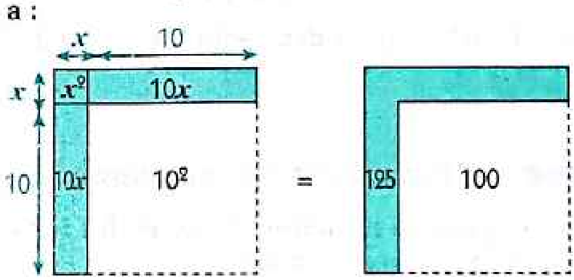
### Solutions

*Résolution de $(E_1)$*
On a :




$$x^2 + 2 \times 4x + 4^2 = 33 + 16$$
$$(x+4)^2 = 49$$
$$x + 4 = 7 \quad \text{ou} \quad x + 4 = -7$$
$$x = 3 \quad \text{ou} \quad x = -11.$$

*Résolution de $(E_2)$*
On a :




$$x^2 + 2 \times 10x + 10^2 = 125 + 100$$
$$(x+10)^2 = 225$$
$$x + 10 = 15 \quad \text{ou} \quad x + 10 = -15$$
$$x = 5 \quad \text{ou} \quad x = -25.$$

### Résolution d'équations par la méthode d'Al-Khayyâm

*Encouragés par les résultats obtenus sur les équations du second degré, les mathématiciens de Grèce, de l'Inde et du monde arabe se lancèrent à l'assaut des équations du troisième degré, sans succès. Vint alors le poète persan Omar Al-Khayyâm (1048 – 1131) qui proposa une méthode graphique pour trouver une solution approchée dont, disait-il, « il est possible d'augmenter la précision jusqu'à ce que l'erreur soit imperceptible ». Cette méthode peut également servir à résoudre graphiquement des équations du second degré.*

**1. Soit à résoudre graphiquement l'équation (E) : $x^2 + x - 1 = 0$.**

***a)* Démontrer que l'équation (E) est équivalente à : $x + 1 = \frac{1}{x}$.**

***b)* Dans le plan muni du repère (O, I, J), construire :**

- **la droite $(\mathscr{D})$ d'équation : $y = x + 1$ ;**
- **l'hyperbole $(\mathscr{H})$ d'équation : $y = \frac{1}{x}$.**

*c)* **Déduire de la question précédente des solutions approchées de (E).**

## Solution

*a)* L'équation (E) est équivalente à : $x(x+1) = 1$.

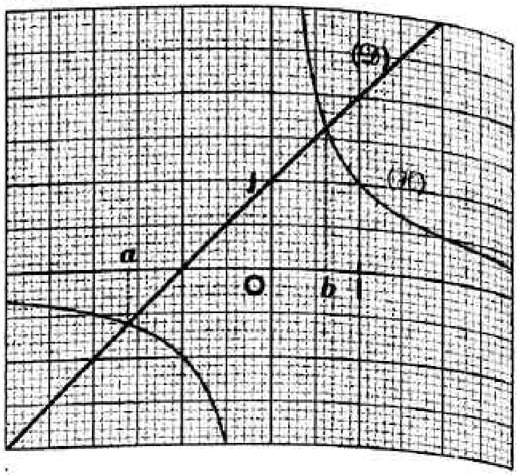
0 n'étant pas solution de (E), on a : $x + 1 = \frac{1}{x}$.

*b)* Résoudre l'équation (E), c'est déterminer les abscisses des points d'intersection des courbes $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{H})$ ci-contre.

$(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{H})$ se coupent en deux points d'abscisses $a$ et $b$ telles que : $-2 < a < -1$ et $0 < b < 1$.

On a : $a \approx -1{,}6$ et $b \approx 0{,}6$.

Les nombres $-1{,}6$ et $0{,}6$ sont des solutions approchées de l'équation (E).




**2. Résoudre graphiquement l'équation (H) : $x^2 - 3x + 2 = 0$.**

## Solution

L'équation (H) est équivalente à : $x(x-3) = -2$.

0 n'étant pas solution de (H), on a : $x - 3 = \frac{-2}{x}$.

Soit $(\mathcal{D}')$ la droite d'équation : $y = x - 3$ ;

et $(\mathcal{H}')$ l'hyperbole d'équation : $y = \frac{-2}{x}$.

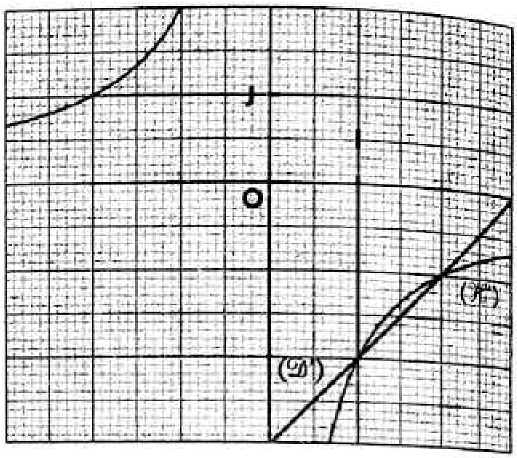
Résoudre l'équation (H), c'est déterminer les abscisses des points d'intersection des courbes $(\mathcal{D}')$ et $(\mathcal{H}')$ ci-contre.

$(\mathcal{D}')$ et $(\mathcal{H}')$ se coupent en deux points qui ont pour abscisses, par lecture graphique, 1 et 2.

On vérifie que : $1^2 - 3 \times 1 + 2 = 0$ ;

$2^2 - 3 \times 2 + 2 = 0$.

Donc, l'équation (H) a deux solutions : 1 et 2.




## Équations du troisième degré

**On se propose de résoudre l'équation (E) : $x^3 - 7x - 6 = 0$.**
**On va utiliser deux méthodes.**

**1. *Utilisation d'une solution « évidente »***

***a)* Vérifier que $-1$ est solution de (E).**

***b)* Vérifier que, pour tout $x$ élément de $\mathbb{R}$, $x^3 - 7x - 6 = (x+1)(x^2 - x - 6)$.**

***c)* Résoudre alors l'équation (E).**

## Solution

*a)* On a : $(-1)^3 - 7 \times (-1) - 6 = -1 + 7 - 6 = 0$ ; donc $-1$ est solution de (E).

*b)* On a : pour tout $x$ élément de $\mathbb{R}$, $(x+1)(x^2 - x - 6) = x^3 - x^2 - 6x + x^2 - x - 6$

$= x^3 - 7x - 6$.

*c)* L'équation $x^2 - x - 6 = 0$ a pour solutions : $-2$ et 3.

Donc, (E) a pour solutions : $-1$, $-2$ et 3.

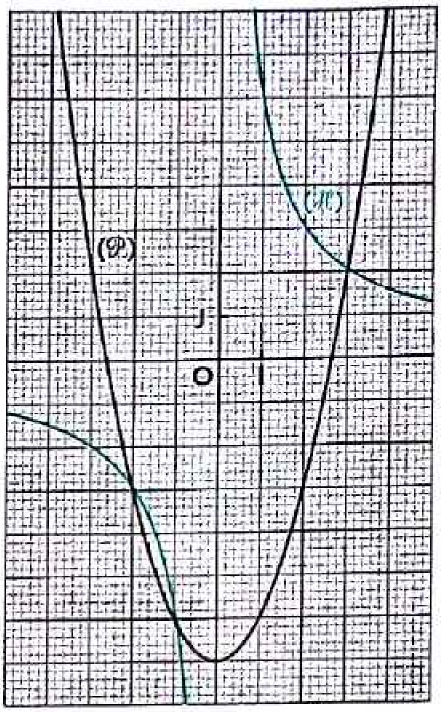
**2. *Utilisation de la méthode d'Al-Khayyâm***

***a)* Dans le plan muni du repère (O, I, J), construire :**

**– la parabole $(\mathcal{P})$ d'équation : $y = x^2 - 7$ ;**

**– l'hyperbole $(\mathcal{H})$ d'équation : $y = \frac{6}{x}$.**

***b)* Résoudre graphiquement l'équation (E).**




## Solution

*a)* $(\mathcal{P}) : y = x^2 - 7$.

***Table de valeurs***

| $x$ | −3,5 | −3 | −2 | −1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 3,5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 5,25 | 2 | −3 | −6 | −7 | −6 | −3 | 2 | 5,25 |

$(\mathcal{H}) : y = \dfrac{6}{x}$.

***Table de valeurs***

| $x$ | −4 | −3 | −2 | −1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | −1,5 | 2 | −3 | −6 | | 6 | 3 | 2 | 1,5 |

*b)* L'équation (E) est équivalente à : $x^2 - 7 = \dfrac{6}{x}$.

Résoudre l'équation (E), c'est déterminer les abscisses des points d'intersection des courbes $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{H})$ ci-contre.

$(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{H})$ se coupent en trois points qui ont pour abscisses, par lecture graphique : $-2$, $-1$ et 3.

On vérifie que : $(-2)^3 - 7 \times (-2) - 6 = 0$ ;
$(-1)^3 - 7 \times (-1) - 6 = 0$ ;
$3^3 - 7 \times 3 - 6 = 0$.

Donc, l'équation (E) a trois solutions : $-2$, $-1$ et 3.

## Équations bicarrées

**Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^4 + 2x^2 - 3 = 0$.**

Cette équation du quatrième degré, sans terme de degré impair, est appelée **équation bicarrée.**

Pour résoudre une telle équation, on peut effectuer le changement d'inconnue : $X = x^2$.

On doit alors résoudre l'équation du second degré : $X^2 + 2X - 3 = 0$.

Son discriminant est : $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16$.

L'équation a deux solutions : $X_1 = \dfrac{-2-4}{2} = -3$ ;

$X_2 = \dfrac{-2+4}{2} = 1$.

L'équation $x^2 = -3$ n'a pas de solution.

L'équation $x^2 = 1$ a deux solutions : $-1$ et 1.

Donc, l'équation $x^4 + 2x^2 - 3 = 0$ a deux solutions : $-1$ et 1.

# Exercices

**1.a** Dans chacun des cas suivants, écrire le polynôme $P(x)$ sous forme canonique.

*a)* $P(x) = x^2 - 6x + 10$
*b)* $P(x) = 2x^2 + 4x + 5$
*c)* $P(x) = x^2 - 4x - 5$
*d)* $P(x) = 2x^2 - 3x + 4$.

**1.b** Dans chacun des cas suivants, vérifier que le nombre $\alpha$ est racine de $P(x)$ et déterminer l'autre racine.

*a)* $P(x) = x^2 - x - 6$ ; $\alpha = -2$
*b)* $P(x) = 3x^2 - 5x + 2$ ; $\alpha = 1$
*c)* $P(x) = 2x^2 - 5x - 3$ ; $\alpha = -\dfrac{1}{2}$
*d)* $P(x) = -x^2 + 3x + 4$ ; $\alpha = -1$.

**1.c** Déterminer le nombre de solutions de chacune des équations suivantes.

*a)* $x^2 + x + 1 = 0$
*b)* $2x^2 - x - 3 = 0$
*c)* $9x^2 - 12x + 4 = 0$.

**1.d** Dans chacun des cas suivants, déterminer deux nombres réels dont la somme est S et le produit P.

*a)* $S = -1$ et $P = -6$
*b)* $S = -\dfrac{3}{2}$ et $P = -10$
*c)* $S = 7$ et $P = 12$
*d)* $S = 2$ et $P = -15$.

## Exercices

**1.e** Par la méthode d'Al-Khwarizmi, résoudre, en admettant les solutions négatives, les équations suivantes.
*a)* $x^2 + 12x = 108$ *b)* $x^2 + 14x - 176 = 0$.

**1.f** Soit l'équation (E) : $x^3 + 2x - 3 = 0$.
*a)* Vérifier que 1 est solution de (E).
*b)* Vérifier l'égalité :
$$x^3 + 2x - 3 = (x - 1)(x^2 + x + 3).$$
*c)* Résoudre alors (E).

**1.g** Par la méthode d'Al-Khayyâm, résoudre les équations suivantes.
*a)* $2x^2 + 2x + 1 = 0$ *b)* $x^2 - x - 6 = 0$
*c)* $x^2 - 4x + 1 = 0$ *d)* $2x^2 - x - 3 = 0$.

# 2 Inéquations du second degré

## 2.1. Résolution d'une inéquation du second degré

### Signe d'un polynôme du second degré

Soit le polynôme du second degré : $P(x) = ax^2 + bx + c$.
Le discriminant de $P(x)$ est le nombre réel : $\Delta = b^2 - 4ac$.

On a : $P(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$.

L'expression de la forme canonique montre que l'étude du signe d'un polynôme du second degré dépend du signe de son discriminant.

Examinons quelques cas.

***a) Le discriminant est négatif.***
On considère le polynôme : $P(x) = -x^2 + 3x - 5$.
- Calculer le discriminant de $P(x)$.
- Écrire $P(x)$ sous forme canonique.
- Justifier que : pour tout nombre réel $x$, $P(x) < 0$.

***b) Le discriminant est nul.***
On considère le polynôme : $Q(x) = 4x^2 - 20x + 25$.
- Calculer le discriminant de $Q(x)$.
- Justifier que : pour tout nombre réel $x$, $Q(x) = 4\left(x - \frac{5}{2}\right)^2$.
- Étudier le signe de $Q(x)$.

***c) Le discriminant est positif.***
On considère le polynôme : $S(x) = 2x^2 + 5x - 3$.
- Calculer le discriminant de $S(x)$.
- Justifier que : pour tout nombre réel $x$, $S(x) = 2(x + 3)\left(x - \frac{1}{2}\right)$.
- Étudier le signe de $S(x)$.

Plus généralement, on peut étudier le signe d'un polynôme du second degré à l'aide de la méthode suivante.

**M**

Soit le polynôme du second degré : $P(x) = ax^2 + bx + c$.
Pour étudier le signe de $P(x)$, on peut calculer son discriminant $\Delta$ et utiliser l'un des tableaux ci-dessous.

$\Delta < 0$ — $P(x)$ n'a pas de racine

| $x$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $P(x)$ | signe de $a$ | |

$\Delta = 0$ — $P(x)$ a une racine $-\frac{b}{2a}$

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{b}{2a}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(x)$ | | signe de $a$ | 0 | signe de $a$ | |

$\Delta > 0$ — $P(x)$ a deux racines $x_1$ et $x_2$

| $x$ | $-\infty$ | | $x_1$ | | $x_2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(x)$ | | signe de $a$ | 0 | signe de $-a$ | 0 | signe de $a$ | |

*Exemples*

Déterminer, suivant les valeurs de $x$, le signe des polynômes ci-dessous :
$P(x) = x^2 - x + 3$ ; $Q(x) = -9x^2 + 6x - 1$ et $S(x) = -x^2 + x + 2$.

• *Signe de P(x)*
On a : $\Delta = -11$.
Donc : $P(x)$ n'a pas de racine ;
pour tout nombre réel $x$, $P(x) > 0$.

• *Signe de Q(x)*
On a : $\Delta = 0$.
Donc : $Q(x)$ a une racine : $\frac{1}{3}$ ;
pour tout nombre réel $x$, distinct de $\frac{1}{3}$, $Q(x) < 0$.

• *Signe de S(x)*
On a : $\Delta = 9$.
Donc : $S(x)$ a deux racines : $x_1 = \frac{-1-3}{-2} = 2$ et $x_2 = \frac{-1+3}{-2} = -1$ ;

pour tout $x \in ]-\infty ; -1[ \cup ]2 ; +\infty[$, $S(x) < 0$ ;
pour tout $x \in ]-1 ; 2[$, $S(x) > 0$.

## Exemples de résolution d'inéquations du second degré

Soit le polynôme du second degré $P(x) = ax^2 + bx + c$.
Toute inéquation de l'un des types suivants est appelée inéquation du second degré :
$P(x) > 0$ ; $P(x) \geq 0$ ; $P(x) < 0$ ; $P(x) \leq 0$.
Résoudre dans $\mathbb{R}$ une telle inéquation revient à étudier le signe du polynôme $P(x)$.

**1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $x^2 - x + 3 \leq 0$.**

### Solution

Posons : $P(x) = x^2 - x + 3$.
$P(x)$ a pour discriminant : $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 3 = -11$.
$\Delta$ est négatif et le coefficient de $x^2$ est positif ; donc, pour tout nombre réel $x$, on a : $P(x) > 0$.
L'ensemble des solutions de l'inéquation est : $\varnothing$.

**2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $9x^2 - 6\sqrt{2}x + 2 > 0$.**

### Solution

Posons : $P(x) = 9x^2 - 6\sqrt{2}x + 2$.
$P(x)$ a pour discriminant : $\Delta = (-6\sqrt{2})^2 - 4 \times 9 \times 2 = 0$.

Donc : $P(x)$ a une racine $\alpha = \frac{6\sqrt{2}}{18} = \frac{\sqrt{2}}{3}$ ;

pour tout nombre réel $x$, $P(x) = 9\left(x - \frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2$ ;

pour tout nombre réel $x$, différent de $\frac{\sqrt{2}}{3}$, $P(x) > 0$.

L'ensemble des solutions de l'inéquation est : $\mathbb{R} - \{\frac{\sqrt{2}}{3}\}$.

**3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $-2x^2 + x + 3 < 0$.**

### Solution

Posons : $P(x) = -2x^2 + x + 3$.
$P(x)$ a pour discriminant : $\Delta = 1^2 - 4 \times (-2) \times 3 = 25$.

Donc : $P(x)$ a deux racines $x_1 = \frac{-1-5}{-4} = \frac{3}{2}$ et $x_2 = \frac{-1+5}{-4} = -1$.

Le signe de $P(x)$ est donné par le tableau ci-contre.
L'ensemble des solutions de l'inéquation est :
$]-\infty\ ; -1[ \cup ]\frac{3}{2}\ ; +\infty[$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $\frac{3}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | |

## 2.2. Travaux dirigés

### Résolution graphique d'une inéquation du second degré

**Dans le plan muni du repère (O, I, J), construire :**

**– la parabole $(\mathscr{P})$ d'équation $y = x^2$ ;**

**– la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $y = 3x - 2$.**

**En déduire l'ensemble des solutions de l'inéquation (I) : $x^2 - 3x + 2 > 0$.**

### Solution

L'inéquation (I) est équivalente à : $x^2 > 3x - 2$.

Résoudre (I), c'est déterminer les abscisses des points de $(\mathscr{P})$ situés au-dessus de $(\mathscr{D})$.

$(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{P})$ se coupent en deux points qui ont pour abscisses, par lecture graphique : 1 et 2.

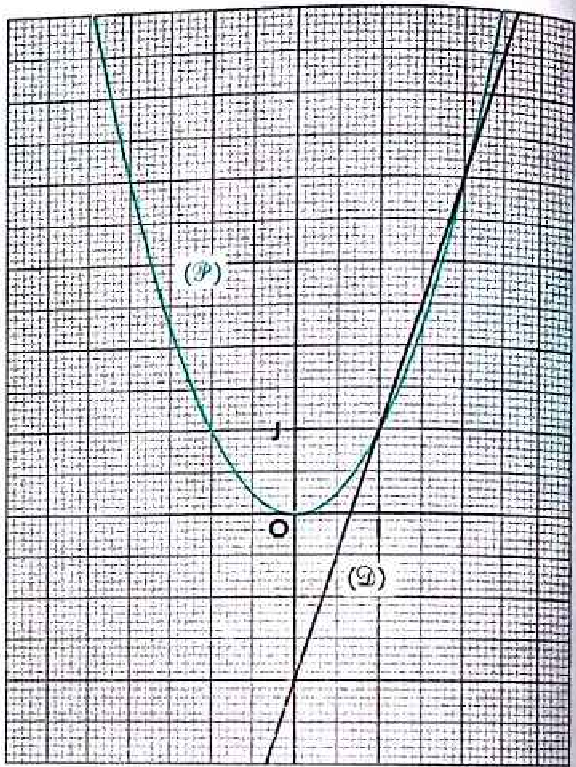
On a : $1^2 - 3 \times 1 + 2 = 0$ ;

$2^2 - 3 \times 2 + 2 = 0$.

Donc, 1 et 2 sont solutions de l'équation $x^2 - 3x + 2 = 0$.

L'ensemble des solutions de l'inéquation est :

$$]-\infty\ ; 1[ \cup ]2\ ; +\infty[.$$




### Inéquations bicarrées

**Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $-x^4 + 2x^2 + 3 \geq 0$.**

### Solution

Posons : $P(x) = -x^4 + 2x^2 + 3$ et $X = x^2$.

On a : $P(x) = -X^2 + 2X + 3$

$= (X + 1)(3 - X)$

$= (x^2 + 1)(3 - x^2)$

$= (x^2 + 1)(\sqrt{3} + x)(\sqrt{3} - x)$.

On a : pour tout nombre réel $x$, $x^2 + 1 > 0$ ; donc, $P(x)$ est du signe de $(\sqrt{3} + x)(\sqrt{3} - x)$.

Le tableau ci-contre donne le signe de $P(x)$.

L'ensemble des solutions de l'inéquation est :

$$[-\sqrt{3}\ ; \sqrt{3}].$$

| $x$ | $-\infty$ | | $-\sqrt{3}$ | | $\sqrt{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | |

# Exercices

**2.a** Dans chacun des cas suivants, déterminer le signe du polynôme du second degré $P(x)$.
*a)* $P(x) = x^2 - 6x + 9$
*b)* $P(x) = 3x^2 - 10x + 8$
*c)* $P(x) = -2x^2 - 5x + 3$
*d)* $P(x) = x^2 - x + 4$.

**2.b** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations du second degré suivantes.
*a)* $9 - x^2 \geq 0$
*b)* $2x^2 - x - 3 > 0$
*c)* $-x^2 + x - 5 < 0$
*d)* $4x^2 - 12x + 9 \leq 0$.

**2.c** Dans le plan muni du repère (O, I, J), construire :
– la parabole $(\mathcal{P})$ d'équation $y = x^2$ ;
– la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y = 2x$.
En déduire l'ensemble des solutions de l'inéquation : $x^2 \geq 2x$.

**2.d** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation :
$x^4 + x^2 - 6 \leq 0$.

# 3 Résolution de problèmes

## 3.1. Problèmes conduisant à une équation du second degré

### Problèmes d'optimisation

**1. De tous les rectangles d'aire 100 m², quel est celui qui a le plus petit périmètre ?**

**Solution**

Désignons par $x$ et $y$ les dimensions du rectangle, et par $p$ son périmètre.

On a : $\begin{cases} xy = 100 \\ p = 2(x+y) \end{cases}$ ; donc : $\begin{cases} y = \frac{p}{2} - x \\ x\left(\frac{p}{2} - x\right) = 100 \end{cases}$.

L'équation $x\left(\frac{p}{2} - x\right) = 100$ est équivalente à l'équation (E) : $x^2 - \frac{p}{2}x + 100 = 0$.

L'équation (E) a pour discriminant : $\Delta = \frac{p^2}{4} - 400 = \left(\frac{p}{2} - 20\right)\left(\frac{p}{2} + 20\right)$.

(E) a des solutions si $\Delta \geq 0$ ; c'est-à-dire : $p \geq 40$.
La plus petite valeur possible de $p$ est atteinte lorsque $p = 40$ ; c'est-à-dire : $\Delta = 0$.
L'équation (E) a alors une solution : $x = y = 10$.

Donc, le rectangle de périmètre minimal est un carré.

*Plus généralement :*
*de tous les rectangles ayant une aire donnée, celui qui a le plus petit périmètre est le carré ;*
*de tous les rectangles ayant un périmètre donné, celui qui a la plus grande aire est le carré.*

**2. Une société de vente de livres par correspondance a actuellement dix mille abonnés qui payent chacun cinq mille francs CFA par mois. Une étude a révélé qu'une variation de cent francs CFA du prix de l'abonnement mensuel ferait varier le nombre d'abonnés d'une centaine.**

**Comment faut-il modifier le prix de l'abonnement mensuel pour obtenir le maximum de revenu ?**

**Solution**

Remarquons qu'une augmentation du prix d'abonnement fait diminuer le nombre d'abonnés et qu'une diminution du prix de l'abonnement le fait augmenter.
Désignons par $n$ la variation du prix en francs CFA.
Le nouveau prix, en francs CFA, est : $5\,000 + n$.
Le nombre d'abonnés est alors : $10\,000 - n$.

Si $n$ est négatif, il s'agit d'une diminution de prix et d'une augmentation du nombre d'abonnés.
Si $n$ est positif, il s'agit d'une augmentation de prix et d'une diminution du nombre d'abonnés.
Le revenu mensuel est donc : $R = (5\,000 + n)(10\,000 - n)$.

On a : $R = -n^2 + 5\,000n + 50\,000\,000$
$= -[(n - 2\,500)^2 - 56\,250\,000]$
$= 56\,250\,000 - (n - 2\,500)^2$.

On a : pour tout nombre entier $n$, $(n - 2\,500)^2 \geq 0$ ; donc : $R \leq 56\,250\,000$.
La plus grande valeur de R est atteinte lorsque : $R = 56\,250\,000$ ;
c'est-à-dire : $56\,250\,000 - (n - 2\,500)^2 = 56\,250\,000$ ;
$(n - 2\,500)^2 = 0$ ;
$n = 2\,500$.

L'augmentation est de 2 500 F CFA.
Donc, le nouvel abonnement mensuel est de 7 500 F CFA.

## Au marché

**Madame Ouattara a acheté un certain nombre de pièces de tissu pour 43 200 F CFA. Si, pour la même somme, elle avait eu 2 pièces de moins, la pièce lui aurait coûté 300 F CFA de plus.**

**Déterminer le nombre de pièces achetées et le prix d'une pièce.**

### Solution

Désignons par : $x$ le nombre de pièces ;
$y$ le prix d'une pièce.

$x$ et $y$ sont des entiers positifs vérifiant le système : $\begin{cases} xy = 43\,200 \\ (x - 2)(y + 300) = 43\,200 \end{cases}$ ;

c'est-à-dire : $\begin{cases} xy = 43\,200 \\ 300x - 2y - 600 = 0 \end{cases}$ ;

ou : $\begin{cases} y = \dfrac{43\,200}{x} & (1) \\ 300x - \dfrac{86\,400}{x} - 600 = 0 & (2). \end{cases}$

L'équation (2) est équivalente à : $x^2 - 2x - 288 = 0$.
On a : $\Delta = 1\,156 = 34^2$.
L'équation a deux solutions : $x_1 = \dfrac{2 - 34}{2} = -16$ ;

$x_2 = \dfrac{2 + 34}{2} = 18$.

$x$ étant positif, la solution acceptable est 18.
On en déduit que : $y = \dfrac{43\,200}{18} = 2\,400$.
Le nombre de pièces achetées est de 18 ; le prix d'une pièce est de 2 400 F CFA.

## Un problème de bateau

**Un bateau descend une rivière sur un parcours de 30 km, puis la remonte sur 12 km. Le voyage dure 4 heures. La vitesse du courant est de 2,5 km/h.**

**Quelle est la vitesse propre de ce bateau ?**

### Solution

Désignons par $v$ la vitesse, en km/h, du bateau.
La vitesse du bateau à la descente est : $v + 2{,}5$.
La vitesse du bateau à la remontée est : $v - 2{,}5$.
L'énoncé nous dit que le voyage dure 4 heures ; donc nous allons raisonner sur la durée.
Le temps mis pour descendre la rivière est : $t_1 = \dfrac{30}{v + 2{,}5}$.

Le temps mis pour remonter la rivière est : $t_2 = \dfrac{12}{v - 2,5}$.

On a : $t_1 + t_2 = 4$ ; c'est-à-dire : $\dfrac{30}{v + 2,5} + \dfrac{12}{v - 2,5} = 4$.

On en déduit l'équation du second degré : $2v^2 - 21v + 10 = 0$.
Son discriminant est : $\Delta = 441 - 80 = 361 = 19^2$.
Cette équation admet deux solutions : $v_1 = \dfrac{21 - 19}{4} = 0,5$ et $v_2 = \dfrac{21 + 19}{4} = 10$.
La première solution est inacceptable puisque le bateau ne pourrait pas remonter le courant.
Donc, la vitesse du bateau est de 10 km/h.

### Excursion à Bafoussam

**Les élèves d'un lycée de Bafoussam organisent une excursion.**
**Pour cela, ils louent un car à 120 000 F CFA. Au moment du départ, 4 nouveaux élèves s'ajoutent et chacun des partants doit alors payer 1 000 F CFA de moins.**
**Déterminer le nombre d'élèves qui participent à l'excursion et la somme que chacun doit payer.**

#### Solution

Désignons par : $x$ le nombre initial de participants à l'excursion ;
$y$ la somme que chaque participant devait payer initialement.

La somme totale à payer est : $xy = 120\,000$.

Avec l'arrivée des 4 derniers élèves, le nombre de participants à l'excursion devient : $x + 4$ ;
chaque participant doit alors payer : $y - 1\,000$.

La somme totale à payer est : $(x + 4)(y - 1\,000) = 120\,000$.

On obtient le système : $\begin{cases} xy = 120\,000 \\ (x + 4)(y - 1\,000) = 120\,000 \end{cases}$ ;

c'est-à-dire : $\begin{cases} xy = 120\,000 \\ -1\,000x + 4y - 4\,000 = 0 \end{cases}$ ;

ou : $\begin{cases} y = \dfrac{120\,000}{x} & (1) \\ 1\,000x - \dfrac{480\,000}{x} + 4\,000 = 0 & (2) \end{cases}$

L'équation (2) est équivalente à : $x^2 + 4x - 480 = 0$.
On a : $\Delta = 1\,936 = 44^2$.

L'équation a deux solutions : $x_1 = \dfrac{-4 - 44}{2} = -24$ ;

$x_2 = \dfrac{-4 + 44}{2} = 20$.

$x$ désignant le nombre d'élèves, la solution acceptable est 20.

On en déduit que : $y = \dfrac{120\,000}{20} = 6\,000$ F CFA.

Donc, au départ 20 élèves se sont inscrits pour l'excursion et chacun devait payer 6 000 F CFA.

Avec l'arrivée des 4 derniers élèves, l'excursion compte finalement 24 participants et chacun doit payer 5 000 F CFA.

## 3.2. Problèmes conduisant à une inéquation du second degré

### Production d'une entreprise

**Une PME (Petite et Moyenne Entreprise) fabrique chaque jour S serpillières et T torchons. La courbe de production journalière de cette entreprise est donnée par : $S^2 + 10S + 25T \leq 4\,000$.**

**1°) Déterminer le nombre maximal de serpillières que cette entreprise produit en une journée où elle fabrique 40 torchons, puis 80 torchons.**

**2°) Cette entreprise peut-elle produire 200 torchons par jour ?**

## Solution

1°) • Pour T = 40, on obtient l'inéquation du second degré : $S^2 + 10S - 3\,000 \leq 0$
ou : $(S + 60)(S - 50) \leq 0$.

Or : $S + 60 > 0$ ; donc : $S \leq 50$.

La valeur maximale de S est 50.

• Pour T = 80, on obtient l'inéquation du second degré : $S^2 + 10S - 2\,000 \leq 0$
ou : $(S + 50)(S - 40) \leq 0$.

Or : $S + 50 > 0$ ; donc : $S \leq 40$.

La valeur maximale de S est 40.

2°) Pour T = 200, on obtient l'inéquation du second degré : $S^2 + 10S + 1\,000 \leq 0$.
L'équation $S^2 + 10S + 1\,000 = 0$ a pour discriminant : $\Delta = 10^2 - 4 \times 1\,000 = -3\,900$.
$\Delta$ étant négatif, on a : $S^2 + 10S + 1\,000 > 0$ ; l'inéquation n'a pas de solution.

Donc, cette entreprise ne peut pas produire 200 torchons par jour.

### Au spectacle

**Un promoteur de spectacles veut organiser un festival de reggae dans un stade de football pouvant contenir 20 000 personnes. Il a constaté que le nombre de spectateurs $x$ est fonction du prix $p$ du ticket d'entrée, suivant la relation : $x = -8p + 20\,000$.**
**Les charges fixes (location du stade, cachet des musiciens et divers) s'élèvent à 8 000 000 de F CFA.**

**1°) Démontrer que, pour amortir les dépenses, le prix $p$ du ticket doit vérifier l'inéquation :**

$$-8p^2 + 20\,000p - 8\,000\,000 \geq 0.$$

**2°) Déterminer alors le prix du ticket pour avoir le maximum de spectateurs.**

## Solution

1°) Le nombre de spectateurs étant positif, on a : $-8p + 20\,000 \geq 0$ ; c'est-à-dire : $p \leq 2\,500$.
La recette totale est : $px$.
Donc, le revenu du promoteur est : $R = px - 8\,000\,000$
$= -8p^2 + 20\,000p - 8\,000\,000$.
Pour amortir les dépenses, il faut : $-8p^2 + 20\,000p - 8\,000\,000 \geq 0$.

2°) On a : $R = -8(p^2 - 2\,500p + 1\,000\,000)$
$= -8(p - 500)(p - 2\,000)$.
Le signe de R est donné par le tableau suivant.

| $p$ | 0 | | 500 | | 2 000 | | 2 500 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 20 000 | | 16 000 | | 2 000 | | 0 |
| R | | − | 0 | + | 0 | − | 0 |

Le promoteur perd en vendant les tickets à moins de 500 F CFA ou à plus de 2 000 F CFA.
Pour réaliser des bénéfices, le prix doit être compris entre 500 F CFA et 2 000 F CFA.

Pour avoir le maximum de spectateurs, le prix doit être le plus bas possible, c'est-à-dire 500 F CFA.
Il y aura alors 16 000 spectateurs.

# Exercices

## APPRENTISSAGE

## Équations du second degré

**1** Dans chacun des cas suivants, écrire le polynôme du second degré $P(x)$ sous forme canonique.

*a)* $P(x) = x^2 - 2x + 5$ *b)* $P(x) = x^2 + 10x + 16$

*c)* $P(x) = 4x^2 - 12x - 7$ *d)* $P(x) = -3x^2 + 12x + 8$.

**2** Dans chacun des cas suivants, vérifier que le nombre $\alpha$ est une racine de $P(x)$.
Factoriser alors $P(x)$ et en déduire l'autre racine.

*a)* $P(x) = 2x^2 + 3x - 5$ ; $\alpha = 1$

*b)* $P(x) = 3x^2 - x - 4$ ; $\alpha = -1$

*c)* $P(x) = -2x^2 - 5x + 3$ ; $\alpha = \frac{1}{2}$.

**3** Donner la forme générale des polynômes du second degré ayant pour racines $-1$ et $2$.

**4** Déterminer le polynôme du second degré $P(x)$ ayant pour racines $-3$ et $2$, tel que : $P(0) = 4$.

**5** Déterminer la forme générale des polynômes du second degré admettant $1$ pour seule racine.
Préciser celui qui prend la valeur $-2$ en $0$.

**6** Dans chacun des cas suivants, factoriser, si possible, le polynôme du second degré $P(x)$.

*a)* $P(x) = x^2 + 6x - 7$ *b)* $P(x) = x^2 - 8x + 17$

*c)* $P(x) = -2x^2 + 4x + 6$ *d)* $P(x) = -9x^2 + 6x - 1$.

**7** Dans chacun des cas suivants, vérifier que $\alpha$ est solution de (E). Trouver l'autre solution.

*a)* (E) : $7x^2 - 4x - 11 = 0$ ; $\alpha = -1$

*b)* (E) : $2x^2 - 3x - 2 = 0$ ; $\alpha = 2$

*c)* (E) : $5x^2 - x - 4 = 0$ ; $\alpha = 1$.

**8** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

*a)* $2x^2 - 5x - 3 = 0$ *b)* $-4x^2 + 10x - 6 = 0$

*c)* $3x^2 - 14x + 8 = 0$ *d)* $2x^2 - 4\sqrt{3}x + 6 = 0$

*e)* $5x^2 - 7x - 6 = 0$ *f)* $4x^2 - x + 3 = 0$.

**9** Par la méthode d'Al-Khwarizmi, résoudre, en admettant les solutions négatives, les équations suivantes.

*a)* $x^2 + 4x = 45$ *b)* $x^2 + 6x = 16$.

**10** Déterminer, s'ils existent, deux nombres réels dont la somme est S et le produit P.

*a)* $S = 3$ et $P = -10$ *b)* $S = 5$ et $P = 6$

*c)* $S = -3$ et $P = 9$ *d)* $S = -6$ et $P = 9$.

**11** 1. On considère l'équation (E) :
$$x^2 - 2\,000x + 1\,000 = 0.$$

*a)* Justifier que (E) admet deux solutions.
*b)* Déterminer la somme et le produit de ces deux solutions. *(On ne demande pas de déterminer les solutions.)*
*c)* Déterminer le signe des solutions.
2. Démontrer que l'équation $x^2 + 2\,000x + 1\,000 = 0$ a deux solutions négatives.

**12** On considère l'équation (E) :
$$x^2 - (\sqrt{3} - \sqrt{2})x - \sqrt{6} = 0.$$

1. Justifier que (E) a deux solutions de signes contraires.
2. Déterminer la somme et le produit des solutions.
3. Déduire des questions précédentes les solutions de (E).

**13** On considère l'équation (E) :
$$x^2 - 9x - 90 = 0.$$

1. Justifier que $-6$ est solution de (E).
2. Déduire l'autre solution en utilisant le produit (ou la somme) des solutions.

**14** On considère l'équation (E) :
$$12x^2 - 13x - 25 = 0.$$

1. Justifier que $-1$ est solution de (E).
2. Déduire l'autre solution en utilisant le produit (ou la somme) des solutions.

## Inéquations du second degré

**15** Étudier, suivant les valeurs de $x$, le signe du polynôme $P(x)$.

*a)* $P(x) = 4x^2 - x + 1$ *b)* $P(x) = -2x^2 + 7x - 3$

*c)* $P(x) = -9x^2 + 6x - 1$ *d)* $P(x) = x^2 - 5x + 6$.

**16** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

*a)* $4 - 9x^2 \leq 0$ *b)* $-x^2 - x + 12 \geq 0$

*c)* $2x^2 - x - 3 > 0$ *d)* $8x^2 + 34x + 21 < 0$

*e)* $-3x^2 + 4x - 2 < 0$ *f)* $-9x^2 + 12x - 4 > 0$.

**17** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

*a)* $x \geq 4x^2$ *b)* $3x^2 > x - 5$

*c)* $(2x - 3)^2 > (3x + 4)^2$

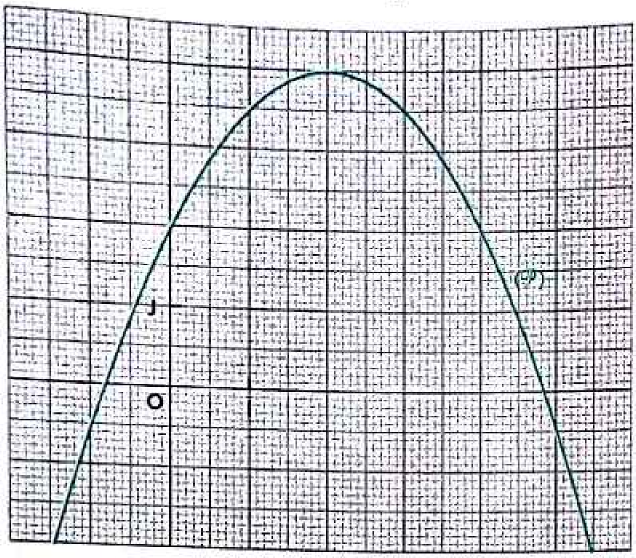
*d)* $(x^2 + x + 1)^2 < (x^2 - x + 1)^2$.

**18** Le plan est muni du repère (O, I, J).
1. Construire sur le même graphique :
– la parabole $(\mathcal{P})$ d'équation : $y = 2x^2$ ;
– la droite $(\mathcal{D})$ d'équation : $y = -x + 3$.
2. *a)* Étudier graphiquement la position relative des courbes $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{D})$.
*b)* Vérifier par le calcul.

**19** Le plan est muni du repère (O, I, J).
$(\mathcal{P})$ est la parabole d'équation $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 2$.
1. Vérifier que $(\mathcal{P})$ passe par les points $A(2 - 2\sqrt{2} ; 0)$, $B(0 ; 2)$, $S(2 ; 4)$, $C(4 ; 2)$ et $D(2 + 2\sqrt{2} ; 0)$.

**2.** Résoudre graphiquement les inéquations :

*a)* $-\frac{1}{2}x^2 + 2x + 2 \geq 0$ *b)* $-\frac{1}{2}x^2 + 2x < 0$.




# Résolution de problèmes

**20** Bintou a acheté un certain nombre d'actions d'une banque A pour 600 000 F CFA. Pour la même somme, elle aurait pu acheter, d'une autre banque B, 100 actions de moins à 3 000 F CFA de plus par action. Déterminer le nombre d'actions que Bintou a achetées de la banque A et la valeur d'une action.

**21** Combien a-t-on acheté de mètres de tissu pour 10 800 F CFA, sachant que, si le mètre coûtait 100 F CFA de moins, on aurait 9 mètres de tissu en plus ?

**22** Deux automobilistes parcourent un même trajet de 400 km. L'un le fait à 20 km/h de plus que l'autre et en une heure de moins.
Déterminer, pour chacun des automobilistes, la vitesse et le temps nécessaires pour parcourir le trajet.

**23** Yannick bénéficie habituellement d'une remise de $x$ %. Un jour de solde, on lui accorde une réduction supplémentaire de $y$ %. Déterminer $x$ et $y$, sachant que la somme de ces deux remises est de 10 % et que Yannick a payé 90 160 F CFA un article étiqueté 100 000 F CFA. On sait que $x$ est inférieur à $y$.

**24** Un cycliste parcourt un trajet de trois tronçons. Le premier tronçon est une montée de 15 km, le deuxième est une descente de 20 km et le troisième est une montée de 30 km. Le cycliste fait 10 km/h de moins en montée qu'en descente et il met 2 heures pour faire le trajet complet. Déterminer la vitesse du cycliste en montée et en descente.

**25** On doit partager une somme de 30 000 F CFA entre un certain nombre de personnes. S'il y avait 4 personnes de moins, la part de chacune serait augmentée de 1 250 F CFA. Déterminer le nombre de personnes et la part de chacune d'elles.

**26** Antoine place, à un taux inconnu, un capital de 2 000 000 F CFA. Après un an, il retire ce capital et les intérêts produits et place le tout à un taux supérieur de 2 % au premier taux.
Un an après, il retire 147 000 F CFA d'intérêt.
Déterminer le premier taux.

**27** Deux associés ont retiré de la vente de leur entreprise 5 000 000 F CFA correspondant à leurs placements et aux bénéfices proportionnels à ces derniers. Le premier a retiré 600 000 F CFA de bénéfice. Le second, qui a un placement inférieur à celui du premier, avait mis 1 600 000 F CFA dans l'entreprise.
Déterminer le placement du premier et le bénéfice du second.

**28** Un commerçant doit acheter un lot de vestes. Le grossiste lui demande 800 000 F CFA pour le lot. Après négociations, le grossiste lui consent un rabais de 5 000 F CFA par veste. Il décide alors de prendre 4 vestes de plus et paie 840 000 F CFA. Déterminer le nombre de vestes achetées et le prix de chacune avant le rabais.

**29** Un rectangle a pour dimensions 160 m et 120 m. De quelle longueur faut-il augmenter le plus grand côté et diminuer le plus petit pour réduire l'aire de moitié ?

## APPROFONDISSEMENT

**30** On considère le polynôme : $P(x) = x^3 - 7x + 6$.
**1.** Vérifier que 1 est racine de $P(x)$.
**2.** Écrire $P(x)$ comme produit de facteurs du premier degré.
**3.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $P(x) = 0$.

**31** **1.** On se propose de résoudre l'équation (E) : $x^3 - 2x - 3 = 0$.
*a)* Démontrer que (E) est équivalente à : $x^2 - 2 = \frac{3}{x}$.
*b)* Dans le plan muni du repère (O, I, J), construire :
– la parabole $(\mathcal{P})$ d'équation : $y = x^2 - 2$ ;
– l'hyperbole $(\mathcal{H})$ d'équation : $y = \frac{3}{x}$.
*c)* Déduire de la question précédente une solution approchée de l'équation (E).
**2.** Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation : $x^3 - 3x - 1 = 0$.

**32** Patricia a placé 10 000 F CFA au taux annuel de 8 %, pendant un certain nombre de mois, puis a placé le capital et les intérêts acquis pendant la même durée au taux annuel de 12 %. Elle possède à la fin 12 650 F CFA.
Déterminer la durée du premier placement.

**33** Un paysan emprunte à la coopérative du village la somme de 500 000 F CFA à un certain taux d'intérêt annuel. À la fin de la première année, il rembourse la somme de 300 000 F CFA. Le taux d'intérêt de la seconde année est celui de l'année précédente majoré de 2 %. À la fin de la seconde année, le paysan rembourse 280 000 F CFA, éteignant ainsi sa dette.
Quel est le taux d'intérêt de la première année ?

# 2

# Représentations graphiques de fonctions

## Introduction

« **U**n bon dessin n'est pas une ligne dure, cruelle, despotique, immobile, enfermant une figure comme une camisole de force. »

BAUDELAIRE

© Hachette

Eugène Delacroix, Tête de lion, Musée du Louvre.

## SOMMAIRE

# 1 Fonctions élémentaires

## 1.1. Fonction cube

On se propose d'étudier la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$ appelée **fonction cube.**

### Égalités remarquables

**Propriétés**

***a* et *b* sont des nombres réels ; on a :**
- $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
- $(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$
- $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$.

### Variations de la fonction cube

***Ensemble de définition***

On a : $D_f = \mathbb{R}$.

***Sens de variation***

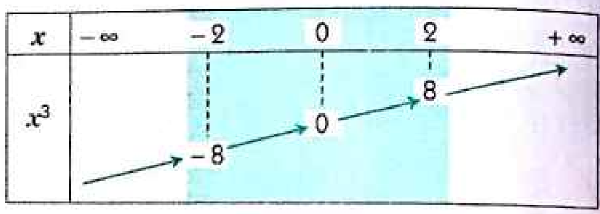
Soit $a$ et $b$ deux nombres réels tels que : $a < b$.
On veut comparer $a^3$ et $b^3$. On sait que :

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$
$$= (a - b)\left[\left(a + \frac{1}{2}b\right)^2 + \frac{3}{4}b^2\right].$$

Or : $\left(a + \frac{1}{2}b\right)^2 + \frac{3}{4}b^2 > 0$ et $a - b < 0$ ; donc : $a^3 < b^3$.

La fonction $f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

***Tableau de variation***




*On tracera la représentation graphique sur [– 2 ; 2].*

### Représentation graphique de la fonction cube

***Table de valeurs***

| $x$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-8$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $8$ |

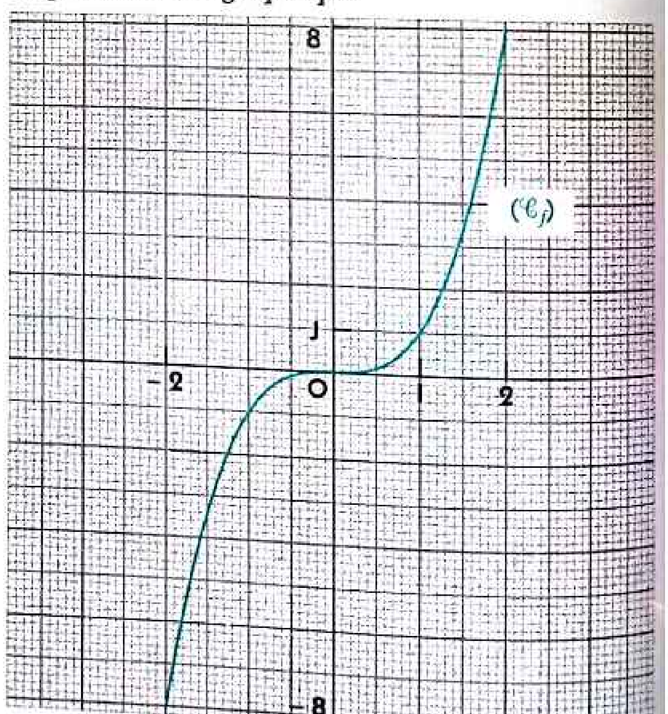
- On admet que la représentation graphique $(\mathscr{C}_f)$ de la fonction cube est une courbe d'un seul morceau et sans partie rectiligne.

- Démontrons que O est un centre de symétrie de la courbe $(\mathscr{C}_f)$.

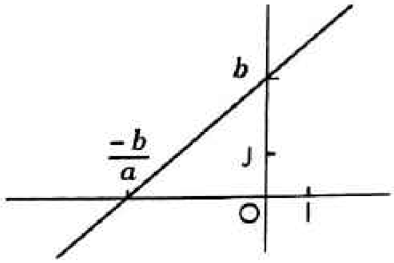
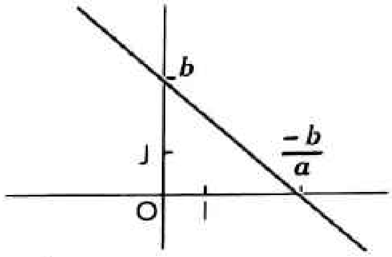
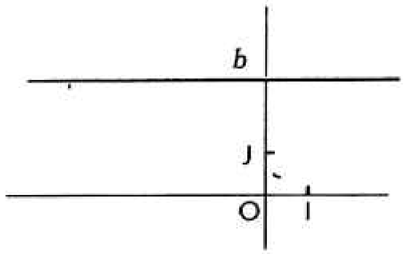
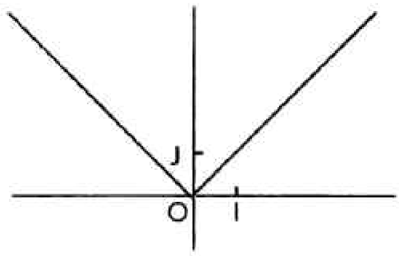
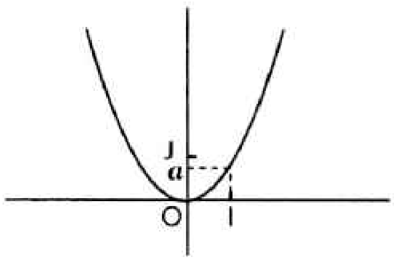
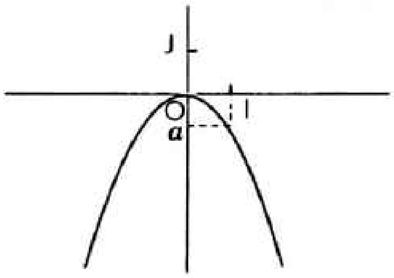
Soit $x$ un nombre réel et $M(x ; x^3)$ le point de $(\mathscr{C}_f)$ d'abscisse $x$. Son symétrique par rapport à O est le point $M'(-x ; -x^3)$.

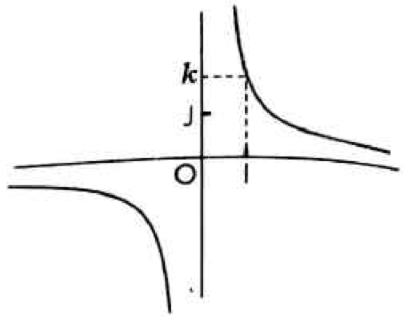
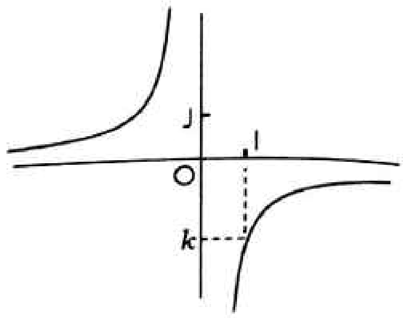
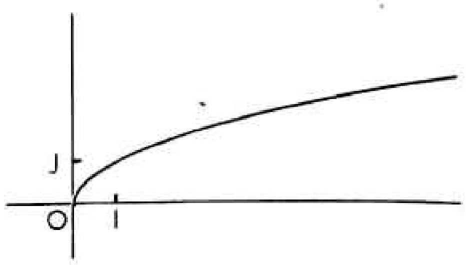
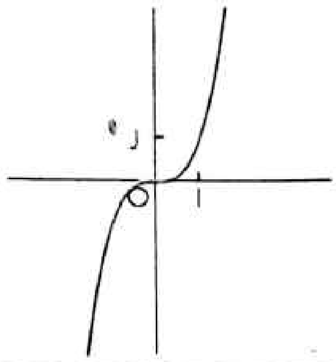
M' est un point de $(\mathscr{C}_f)$ car $-x^3 = (-x)^3$.
Ainsi, tout point M de $(\mathscr{C}_f)$ a pour symétrique par rapport à O un point M' de $(\mathscr{C}_f)$.

***Représentation graphique***



## 1.2. Tableau récapitulatif

<table>
<tr><th>Fonction</th><th>Tableau de variation</th><th>Représentation graphique</th></tr>
<tr><td rowspan="3">$f : x \mapsto ax + b$</td><td>$a > 0$<br><table><tr><td>$x$</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td colspan="2">↗</td></tr></table></td><td></td></tr>
<tr><td>$a < 0$<br><table><tr><td>$x$</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td colspan="2">↘</td></tr></table></td><td></td></tr>
<tr><td>$a = 0$<br><table><tr><td>$x$</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td colspan="2">→</td></tr></table></td><td></td></tr>
<tr><td>$f : x \mapsto |x|$</td><td><table><tr><td>$x$</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>↘</td><td>0</td><td>↗</td></tr></table></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">$f : x \mapsto ax^2$</td><td>$a > 0$<br><table><tr><td>$x$</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>↘</td><td>0</td><td>↗</td></tr></table></td><td></td></tr>
<tr><td>$a < 0$<br><table><tr><td>$x$</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>↗</td><td>0</td><td>↘</td></tr></table></td><td></td></tr>
</table>

| Fonction | Tableau de variation | Représentation graphique |
|---|---|---|
| $f : x \mapsto \dfrac{k}{x}$ | $k > 0$ <br> $x$ : $-\infty$ … $0$ … $+\infty$ <br> $f(x)$ : ↘ ‖ ↘ |   |
| | $k < 0$ <br> $x$ : $-\infty$ … $0$ … $+\infty$ <br> $f(x)$ : ↗ ‖ ↗ |   |
| $f : x \mapsto \sqrt{x}$ | $x$ : $0$ … $+\infty$ <br> $f(x)$ : $0$ ↗ |   |
| $f : x \mapsto x^3$ | $x$ : $-\infty$ … $0$ … $+\infty$ <br> $f(x)$ : ↗ $0$ ↗ |   |

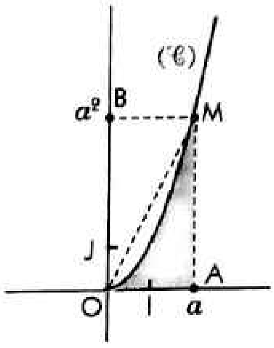
## 1.3. Travaux dirigés

### 1. Quadrature de la parabole

*Archimède de Syracuse (287–212 avant Jésus-Christ) laissa à la postérité un immense héritage dans plusieurs domaines des sciences, particulièrement en géométrie, en mécanique et en hydrostatique.*
*Il démontra, entre autres, la propriété suivante : « L'aire d'un segment de parabole est égale aux $\frac{4}{3}$ de celle du triangle de même base et de même sommet. »*

**Sur la figure ci-dessous, $(\mathscr{C})$ est la branche de parabole d'équation $\begin{cases} y = x^2 \\ x \geq 0 \end{cases}$, M est le point de $(\mathscr{C})$ d'abscisse $a$, A est le projeté orthogonal de M sur (OI) et B est le projeté orthogonal de M sur (OJ).**

**On se propose de calculer, à l'aide de la propriété d'Archimède, l'aire de la surface coloriée.**




**1. Exprimer, en fonction de $a$, l'aire $\mathcal{A}$ de la surface comprise entre les courbes (𝒞), (OB) et (BM).**

**2. En déduire l'aire de la surface coloriée.**

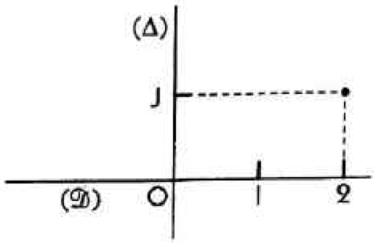
## Solution

1. D'après la propriété d'Archimède : $\mathcal{A} = \frac{4}{3}$ aire(OBM) $= \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2} \times a \times a^2\right) = \frac{2}{3} a^3$.

2. Donc, l'aire de la surface coloriée est : $\mathcal{A}' = a^3 - \frac{2}{3} a^3 = \frac{a^3}{3}$.

## 2. Recherche de lieu

*On se propose de déterminer l'ensemble (E) des points du plan dont le produit des distances à deux droites perpendiculaires (𝒟) et (Δ) est égal à 2.*




**On munit le plan du repère orthonormé (O, I, J) tel que :**
**{O} = (𝒟) ∩ (Δ), I ∈ (𝒟) et J ∈ (Δ).**

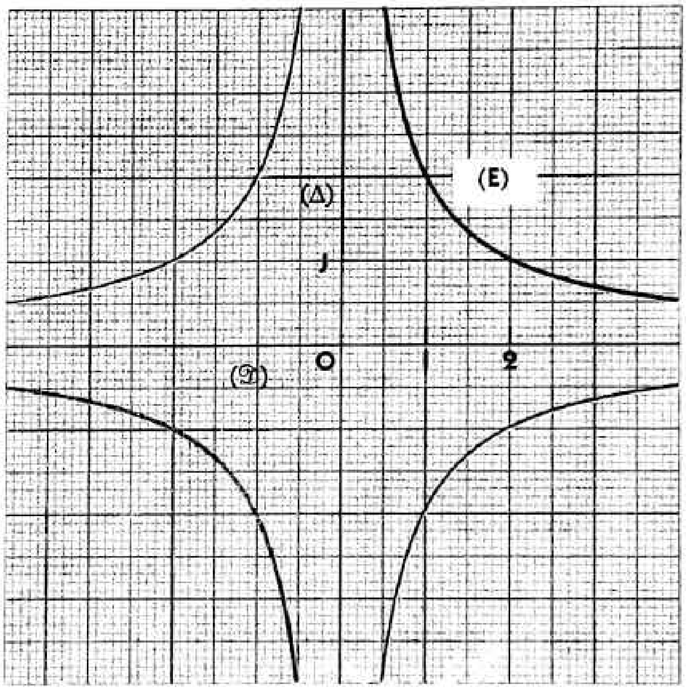
**1. Démontrer que (E) est l'ensemble des points M($x$ ; $y$) du plan tels que : $x^2y^2 = 4$.**

**2. Représenter graphiquement l'ensemble (E).**

## Solution

1. Soit M($x$ ; $y$) un point du plan.
Les projetés orthogonaux de M sur (𝒟) et (Δ) sont respectivement H($x$ ; 0) et K(0 ; $y$).
On a :
$MH^2 = y^2$ et $MK^2 = x^2$.
M ∈ (E) *équivaut à* $MH^2 \times MK^2 = 4$
M ∈ (E) *équivaut à* $x^2y^2 = 4$.

2. On a :
$x^2y^2 = 4$ *équivaut à* $y = \frac{2}{x}$ ou $y = -\frac{2}{x}$.
Soit (ℋ) l'hyperbole d'équation $y = \frac{2}{x}$.
L'hyperbole (ℋ') d'équation $y = -\frac{2}{x}$ est le symétrique de (ℋ) par rapport à (OI).
On a : (E) = (ℋ) ∪ (ℋ').




# Exercices

**1.a** Soit $f$ la fonction de ℝ vers ℝ définie par :
$$f(x) = -2x^2.$$
1. Étudier les variations de $f$.
2. Construire la représentation graphique de $f$.

**1.b** Soit $f$ la fonction de ℝ vers ℝ définie par :
$$f(x) = \frac{x^2}{3}.$$
1. Étudier les variations de $f$.
2. Construire la représentation graphique de $f$.

**1.c** Soit $f$ la fonction de ℝ vers ℝ définie par :
$$f(x) = \frac{3}{x}.$$
1. Étudier les variations de $f$.
2. Construire la représentation graphique de $f$.

**1.d** Soit $f$ la fonction de ℝ vers ℝ définie par :
$$f(x) = -\frac{1}{2x}.$$
1. Étudier les variations de $f$.
2. Construire la représentation graphique de $f$.

# 2 Fonctions et transformations du plan

## 2.1. Transformations usuelles

Le repère (O, I, J) est orthogonal.

Soit les points $M(x\,;\,y)$, $M'(x'\,;\,y')$ et le vecteur $\vec{u}\binom{\alpha}{\beta}$ ;

$S_{(OI)}$ la symétrie orthogonale d'axe (OI) ;

$S_{(OJ)}$ la symétrie orthogonale d'axe (OJ) ;

$S_O$ la symétrie de centre O ;

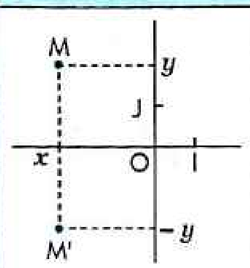
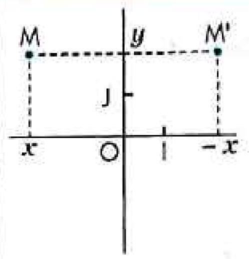
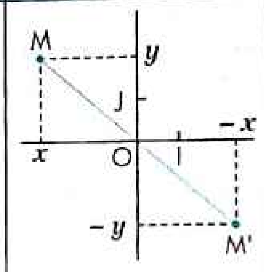
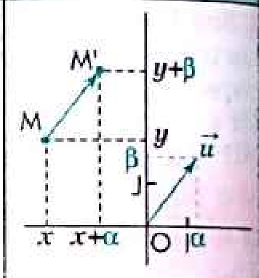
$t_{\vec{u}}$ la translation de vecteur $\vec{u}$.

On a : $M' = S_O(M)$ *équivaut à* $\overrightarrow{OM'} = -\overrightarrow{OM}$.

Donc : $x' = -x$ et $y' = -y$.

On dit que le système $\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$ est une **expression analytique** de la symétrie de centre O.

Le tableau ci-dessous résume les caractérisations des transformations usuelles et leurs expressions analytiques que nous admettons.

| | $S_{(OI)}$ | $S_{(OJ)}$ | $S_O$ | $t_{\vec{u}}$ |
|---|---|---|---|---|
| Image d'un point |  |  |  |  |
| Caractérisation | • Si $M \in (OI)$, $M' = M$ <br> • Si $M \notin (OI)$, $(OI) = $ méd $[MM']$ | • Si $M \in (OJ)$, $M' = M$ <br> • Si $M \notin (OJ)$, $(OJ) = $ méd $[MM']$ | $\overrightarrow{OM'} = -\overrightarrow{OM}$ | $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$ |
| Expression analytique | $\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$ | $\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$ | $\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$ | $\begin{cases} x' = x + \alpha \\ y' = y + \beta \end{cases}$ |

***Exemple***

Soit $(\mathscr{D})$ la droite d'équation $2x - 3y = 4$ et $\vec{u}$ le vecteur de coordonnées $(2\,;\,-1)$.

Déterminer une équation de la droite $(\mathscr{D}')$, image de $(\mathscr{D})$ par la translation de vecteur $\vec{u}$.

L'expression analytique de $t_{\vec{u}}$ est : $\begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y - 1 \end{cases}$ ; donc : $\begin{cases} x = x' - 2 \\ y = y' + 1 \end{cases}$.

Une équation de $(\mathscr{D}')$ est donc : $2(x' - 2) - 3(y' + 1) = 4$ ; c'est-à-dire : $2x' - 3y' = 11$.

**M**

Soit $(\mathscr{C})$ une courbe et $f$ une transformation dont on connaît respectivement une équation et une expression analytique.

Pour déterminer une équation de l'image de $(\mathscr{C})$ par $f$, on peut :

- à partir de l'expression analytique de $f$, exprimer $x$ et $y$ en fonction de $x'$ et $y'$ ;
- remplacer $x$ et $y$ par leurs expressions dans l'équation de $(\mathscr{C})$.

## 2.2. Fonctions et transformations usuelles

### Représentation graphique de la fonction $g : x \mapsto -f(x)$

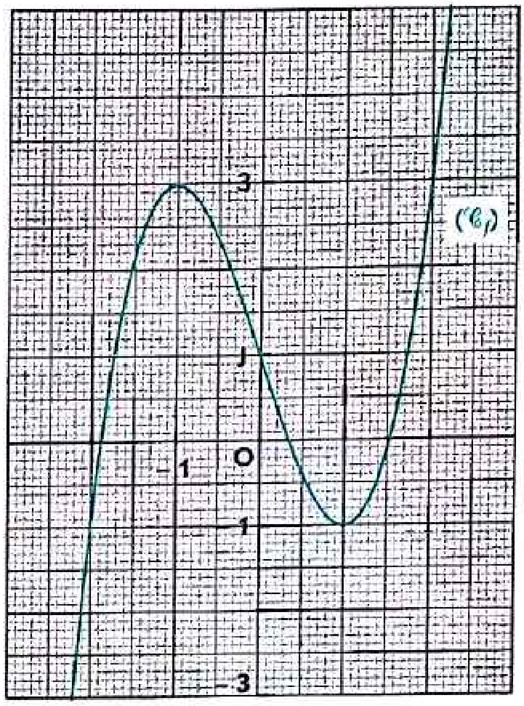
La courbe $(\mathscr{C}_f)$ ci-contre est la représentation graphique d'une fonction $f$ ayant pour ensemble de définition $\mathbb{R}$.

Soit $g$ la fonction définie par $g(x) = -f(x)$ et $(\mathscr{C}_g)$ sa représentation graphique.

- Quel est l'ensemble de définition de la fonction $g$ ?
- En utilisant le graphique et la définition de la fonction $g$, compléter le tableau suivant :

| $x$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | | |
| $g(x)$ | | | | | |

- Construire, point par point, la courbe $(\mathscr{C}_g)$.




Plus généralement, nous admettons la propriété suivante.

**Propriété**

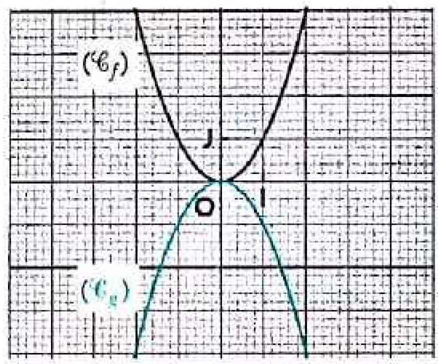
**Le repère (O, I, J) est orthogonal.**
**Soit $f$ une fonction de représentation graphique $(\mathscr{C}_f)$.**
**La représentation graphique de la fonction $g : x \mapsto -f(x)$ est le symétrique de $(\mathscr{C}_f)$ par rapport à (OI).**

**Remarque**

*La fonction $g : x \mapsto -f(x)$ est appelée opposée de $f$.*
*On note : $g = -f$.*

***Exemple***

Le repère (O, I, J) est orthogonal.
Construire la représentation graphique de la fonction $g$ définie par : $g(x) = -x^2$.
Soit $f$ la fonction définie par : $f(x) = x^2$.
$(\mathscr{C}_g)$ est le symétrique de $(\mathscr{C}_f)$ par rapport à (OI).




### Représentation graphique de la fonction $g : x \mapsto |f(x)|$

Le repère (O, I, J) est orthogonal.

On se propose de construire la représentation graphique $(\mathscr{C}_g)$ de la fonction $g : x \mapsto \left|\dfrac{1}{x}\right|$.

- Construire la représentation graphique $(\mathscr{C}_f)$ de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$.
- En déduire la représentation graphique $(\mathscr{C}_{-f})$ de la fonction $-f$.
- Justifier que $(\mathscr{C}_g)$ est la réunion des parties de $(\mathscr{C}_f)$ et de $(\mathscr{C}_{-f})$ situées au-dessus de la droite (OI).

M

Le repère (O, I, J) est orthogonal.

Soit $f$ une fonction de représentation graphique $(\mathscr{C}_f)$.

Pour construire la représentation graphique $(\mathscr{C}_g)$ de la fonction $g : x \mapsto |f(x)|$, on peut procéder de la façon suivante :

- construire $(\mathscr{C}_f)$ ;
- construire la représentation graphique $(\mathscr{C}_{-f})$ de la fonction $-f$ ;
- colorier les parties de $(\mathscr{C}_f)$ et de $(\mathscr{C}_{-f})$ situées au-dessus de la droite (OI).

*La partie coloriée est la représentation graphique $(\mathscr{C}_g)$ de $g$.*

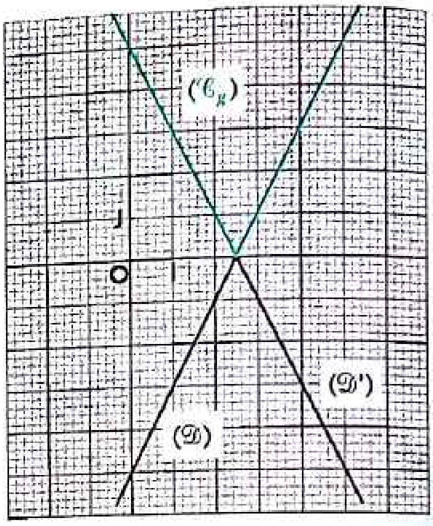
***Exemple***

Le repère (O, I, J) est orthogonal.

Soit à construire la représentation graphique $(\mathscr{C}_g)$ de la fonction $g : x \mapsto |2x - 5|$.

On construit les droites $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ d'équations respectives $y = 2x - 5$ et $y = -2x + 5$.

$(\mathscr{C}_g)$ est la réunion des deux demi-droites situées au-dessus de la droite (OI).




## Représentation graphique de la fonction $g : x \mapsto f(x - \alpha) + \beta$

Soit $f$ et $g$ les fonctions définies par $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = \sqrt{x-1} + 2$.

On désigne respectivement par $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_g)$ les représentations graphiques des fonctions $f$ et $g$.

- Vérifier que : pour tout $x$ élément de $[1 ; +\infty[$, $g(x) = f(x-1) + 2$.
- Démontrer que $(\mathscr{C}_g)$ est l'image de $(\mathscr{C}_f)$ par la translation de vecteur $\vec{u}\binom{1}{2}$.
- Construire, sur le même graphique, $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_g)$.

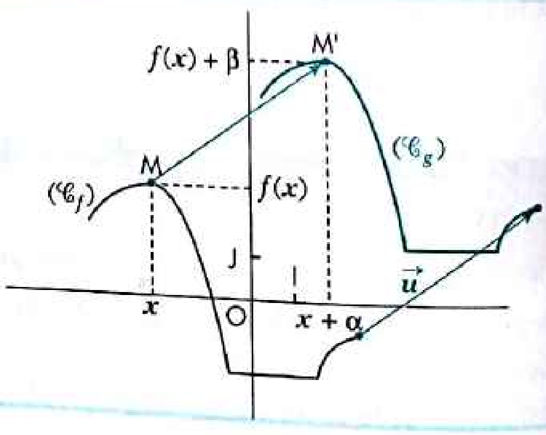
Plus généralement, nous admettons la propriété suivante.

### Propriété

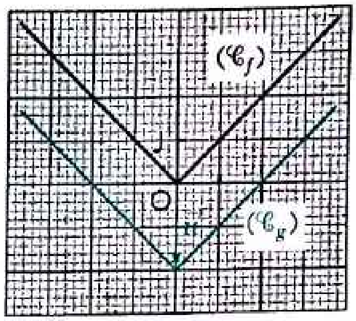
**Soit $f$ une fonction de représentation graphique $(\mathscr{C}_f)$.**

**La représentation graphique $(\mathscr{C}_g)$ de la fonction $g : x \mapsto f(x - \alpha) + \beta$ est l'image de $(\mathscr{C}_f)$ par la translation de vecteur $\vec{u}\binom{\alpha}{\beta}$.**

$(\mathscr{C}_g) = t_{\vec{u}}(\mathscr{C}_f)$, avec $\vec{u}\binom{\alpha}{\beta}$.



*Exemple*




Soit à construire la représentation graphique $(\mathscr{C}_g)$ de la fonction $g : x \mapsto |x| - 2$.

On construit la représentation graphique $(\mathscr{C}_f)$ de la fonction $f : x \mapsto |x|$.

On a : pour tout nombre réel $x$, $g(x) = f(x) - 2$.

Donc : $(\mathscr{C}_g)$ est l'image de $(\mathscr{C}_f)$ par la translation de vecteur $\vec{u}\binom{0}{-2}$.

## Représentations graphiques de fonctions polynômes du second degré

On appelle **fonction polynôme du second degré** toute fonction du type :

$$x \mapsto ax^2 + bx + c \quad (a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}).$$

Soit $f$ la fonction définie par $f(x) = -2x^2 + 4x + 1$ et $(\mathscr{C}_f)$ sa représentation graphique.

- Vérifier que : pour tout nombre réel $x$, $f(x) = -2(x-1)^2 + 3$.
- Construire la parabole $(\mathscr{P})$ d'équation : $y = -2x^2$.
- Déterminer la translation qui transforme $(\mathscr{P})$ en $(\mathscr{C}_f)$.
- Construire $(\mathscr{C}_f)$ à partir de $(\mathscr{P})$.

Plus généralement, nous admettons la propriété suivante.

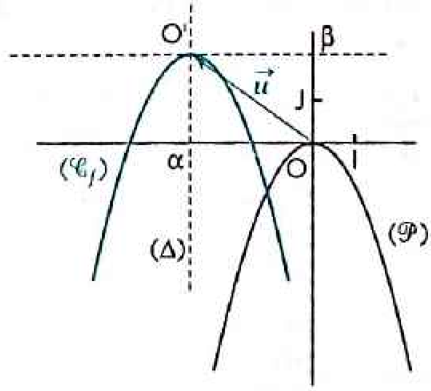
### Propriété

- **Toute fonction polynôme du second degré $f$ peut s'écrire sous la forme :**

$$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta \quad (a \in \mathbb{R}^*, \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}).$$

- **Sa représentation graphique est l'image de la parabole d'équation $y = ax^2$, par la translation de vecteur $\vec{u}\binom{\alpha}{\beta}$.**

### Remarque




*Soit $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{C}_f)$ les courbes d'équations respectives $y = ax^2$ et $y = a(x-\alpha)^2 + \beta$.*
*$(\mathscr{P})$ est une parabole de sommet le point O, d'axe (de symétrie) la droite (OJ).*

*On a : $(\mathscr{C}_f) = t_{\vec{u}}(\mathscr{P})$, avec $\vec{u}\binom{\alpha}{\beta}$.*

*Donc : $(\mathscr{C}_f)$ est une parabole de sommet le point O'$(\alpha ; \beta)$, d'axe (de symétrie) la droite (Δ) d'équation $x = \alpha$.*

On déduit de ces observations une seconde méthode pour construire une parabole.

**M**

Le repère (O, I, J) est orthogonal.
Pour construire la parabole $(\mathscr{C}_f)$ d'équation $y = a(x-\alpha)^2 + \beta$, on peut :
- placer le sommet O'$(\alpha ; \beta)$ de $(\mathscr{C}_f)$ ;
- tracer la droite (Δ) d'équation $x = \alpha$ ;
- construire $(\mathscr{C})$ la branche de la parabole $(\mathscr{C}_f)$ située à droite de (Δ) ;
- compléter $(\mathscr{C}_f)$ en construisant le symétrique $(\mathscr{C}')$ de $(\mathscr{C})$ par rapport à la droite (Δ).

On a : $(\mathscr{C}_f) = (\mathscr{C}) \cup (\mathscr{C}')$.

## Vocabulaire

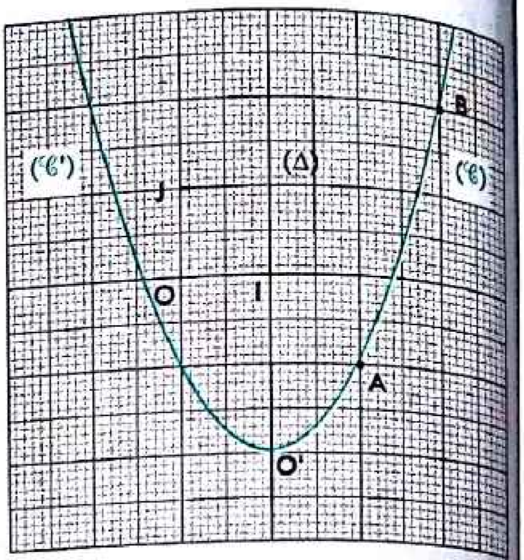
L'équation $y = a(x - \alpha)^2 + \beta$ est appelée **équation réduite de la parabole** $(\mathscr{C}_f)$.

### Exemple

Soit à construire la représentation graphique $(\mathscr{C}_f)$ de la fonction $f : x \mapsto x^2 - 2x - 1$.

On a : pour tout nombre réel $x$, $f(x) = (x - 1)^2 - 2$.

Donc : $(\mathscr{C}_f)$ est une parabole de sommet le point $O'(1 ; -2)$, d'axe (de symétrie) la droite $(\Delta)$ d'équation $x = 1$.




Construisons $(\mathscr{C})$, la branche de parabole $(\mathscr{C}_f)$ située à droite de $(\Delta)$, en plaçant des points d'abscisses supérieures à 1, par exemples $A(2 ; -1)$ et $B(3 ; 2)$.

Complétons $(\mathscr{C}_f)$ en construisant le symétrique $(\mathscr{C}')$ de $(\mathscr{C})$ par rapport à la droite $(\Delta)$.

On a : $(\mathscr{C}_f) = (\mathscr{C}) \cup (\mathscr{C}')$.

## Représentations graphiques de fonctions homographiques

On appelle **fonction homographique**, toute fonction du type :

$$x \mapsto \frac{ax + b}{cx + d} \quad (c \neq 0,\ ad - bc \neq 0).$$

Soit $f$ la fonction définie par $f(x) = \dfrac{2x + 5}{x + 1}$ et $(\mathscr{C}_f)$ sa représentation graphique.

- Déterminer l'ensemble de définition $D_f$ de $f$.
- Vérifier que : pour tout $x$ élément de $D_f$, $f(x) = \dfrac{3}{x + 1} + 2$.
- Construire l'hyperbole $(\mathscr{H})$ d'équation : $y = \dfrac{3}{x}$.
- Déterminer la translation qui transforme $(\mathscr{H})$ en $(\mathscr{C}_f)$.
- Construire $(\mathscr{C}_f)$ à partir de $(\mathscr{H})$.

Plus généralement, nous admettons la propriété suivante.

### Propriété

- **Toute fonction homographique $f$ peut s'écrire sous la forme :**

$$f(x) = \frac{k}{x - \alpha} + \beta \quad (k \in \mathbb{R}^*,\ \alpha \in \mathbb{R},\ \beta \in \mathbb{R}).$$

- **Sa représentation graphique est l'image de l'hyperbole d'équation $y = \dfrac{k}{x}$, par la translation de vecteur $\vec{u}\dbinom{\alpha}{\beta}$.**

## Remarque

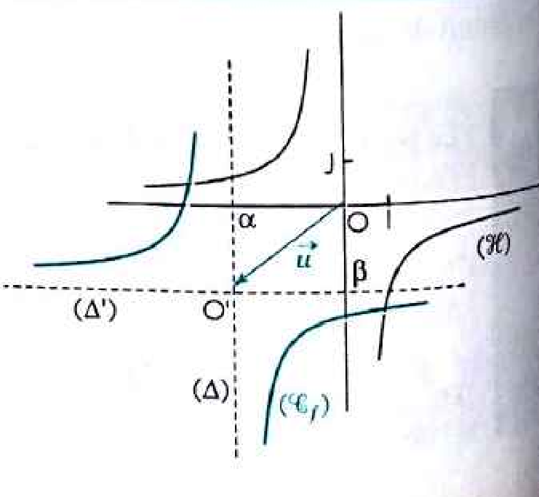
*Soit $(\mathscr{H})$ et $(\mathscr{C}_f)$ les courbes d'équations respectives $y = \dfrac{k}{x}$ et $y = \dfrac{k}{x - \alpha} + \beta$.*

*$(\mathscr{H})$ est une hyperbole de centre (de symétrie) O.*

*On a : $(\mathscr{C}_f) = t_{\vec{u}}(\mathscr{H})$, avec $\vec{u}\dbinom{\alpha}{\beta}$.*

*Donc : $(\mathscr{C}_f)$ est une hyperbole de centre (de symétrie) $O'(\alpha ; \beta)$.*

*O' est le point d'intersection des droites $(\Delta)$ et $(\Delta')$ d'équations respectives $x = \alpha$ et $y = \beta$.*



On déduit de ces observations une seconde méthode pour construire une hyperbole.

**M**

Le repère (O, I, J) est orthogonal.
Pour construire l'hyperbole $(\mathscr{C}_f)$ d'équation $y = \dfrac{k}{x - \alpha} + \beta$, on peut :
- placer le point $O'(\alpha\ ;\ \beta)$ ;
- tracer la droite $(\Delta)$ d'équation $x = \alpha$ et la droite $(\Delta')$ d'équation $y = \beta$ ;
- construire $(\mathscr{C})$, la branche de l'hyperbole $(\mathscr{C}_f)$ située à droite de $(\Delta)$ ;
- compléter $(\mathscr{C}_f)$ en construisant le symétrique $(\mathscr{C}')$ de $(\mathscr{C})$ par rapport au point O'.

On a : $(\mathscr{C}_f) = (\mathscr{C}) \cup (\mathscr{C}')$.

## Vocabulaire

- L'écriture $\dfrac{k}{x - \alpha} + \beta$ est appelée **forme canonique** de $f(x)$.
- L'équation $y = \dfrac{k}{x - \alpha} + \beta$ est appelée **équation réduite de l'hyperbole** $(\mathscr{C}_f)$.

***Exemple***

Soit à construire la représentation graphique $(\mathscr{C}_f)$ de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x-4}{x+2}$.

On a : pour tout nombre réel $x$ élément de $\mathbb{R} - \{-2\}$, $f(x) = -\dfrac{6}{x+2} + 1$.

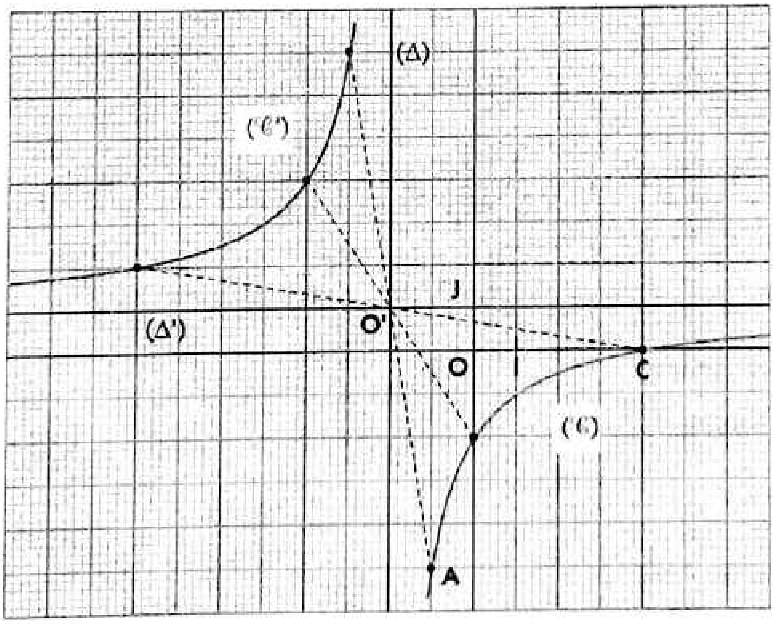
Donc : $(\mathscr{C}_f)$ est une hyperbole de centre (de symétrie) le point $O'(-2\ ;\ 1)$.

Soit $(\Delta)$ la droite d'équation $x = -2$ et $(\Delta')$ la droite d'équation $y = 1$.

Construisons $(\mathscr{C})$, la branche de l'hyperbole $(\mathscr{C}_f)$ située à droite de $(\Delta)$ en plaçant des points d'abscisses supérieures à $-2$, par exemples $A(-1\ ;\ -5)$, $B(0\ ;\ -2)$ et $C(4\ ;\ 0)$.

Complétons $(\mathscr{C}_f)$ en construisant l'image $(\mathscr{C}')$ de $(\mathscr{C})$ par la symétrie de centre O'.

On a : $(\mathscr{C}_f) = (\mathscr{C}) \cup (\mathscr{C}')$.

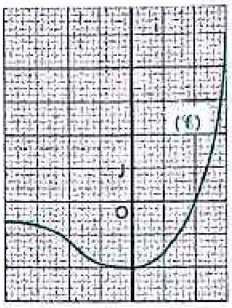


# Exercices

**2.a** Soit $(\mathcal{D})$ la droite d'équation : $x + 2y + 1 = 0$.
Déterminer une équation de l'image de $(\mathcal{D})$ pour chacune des transformations suivantes.
*a)* La symétrie orthogonale d'axe (OI)
*b)* La symétrie orthogonale d'axe (OJ)
*c)* La symétrie de centre O
*d)* La translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$.

**2.b** Construire la représentation graphique de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$.
En déduire la représentation graphique de la fonction $g : x \mapsto -\sqrt{x}$.

**2.c** La courbe $(\mathscr{C})$ ci-contre est la représentation graphique d'une fonction $f$ définie sur $[-4 ; 3]$.
Construire la représentation graphique de la fonction $g : x \mapsto |f(x)|$.




**2.d** Construire, en utilisant une symétrie, la représentation graphique de la fonction $f : x \mapsto |x - 3|$.

**2.e** Construire la représentation graphique de la fonction $g : x \mapsto \dfrac{1}{x}$.
En utilisant une translation, construire la représentation graphique de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x} + 2$.

**2.f** Soit $f$ la fonction polynôme du second degré définie par : $f(x) = x^2 - 2x + 3$.
*a)* Vérifier que : $f(x) = (x - 1)^2 + 2$.
*b)* Déterminer la translation qui transforme la représentation graphique de la fonction carrée en celle de la fonction $f$.
*c)* Construire la représentation graphique de la fonction carré, puis celle de la fonction $f$.

**2.g** Soit $f$ la fonction homographique définie par : $f(x) = \dfrac{x - 3}{x - 2}$.
*a)* Vérifier que : $f(x) = -\dfrac{1}{x - 2} + 1$.
*b)* Construire l'hyperbole d'équation : $y = -\dfrac{1}{x}$.
En déduire la représentation graphique de $f$.

# 3 Parité et éléments de symétrie

## 3.1. Fonctions paires, fonctions impaires

### Fonctions paires

Le repère (O, I, J) est orthogonal.

La courbe $(\mathscr{C})$ ci-contre est la représentation graphique de la fonction $f$ définie par : $f(x) = x^2 - 1$.

L'ensemble de définition de $f$ est : $D_f = \mathbb{R}$.

On a : pour tout $x$ de $D_f$, $-x \in D_f$.

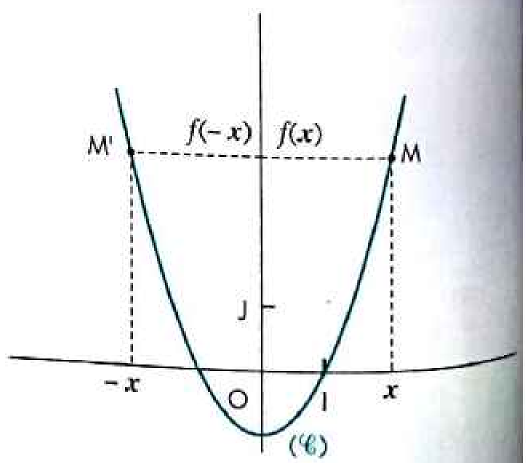
On dit que $D_f$ est **symétrique par rapport à zéro**.

De plus : pour tout $x$ de $D_f$, $f(-x) = f(x)$.

On dit que $f$ est une **fonction paire.**

Les points $M(x ; f(x))$ et $M'(-x ; f(-x))$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

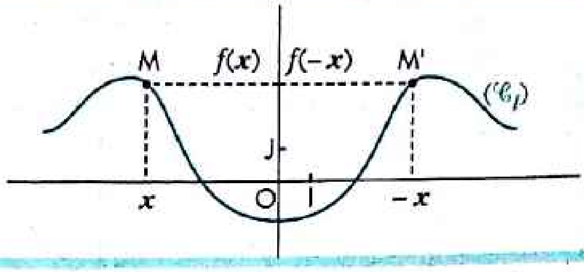
L'axe des ordonnées est un axe de symétrie de $(\mathscr{C})$.



## Définition

**Soit $f$ une fonction d'ensemble de définition $D_f$.**

**On dit que la fonction $f$ est paire si $D_f$ est symétrique par rapport à zéro et pour tout $x$ élément de $D_f$, on a : $f(-x) = f(x)$.**

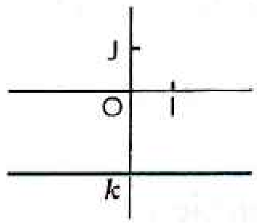
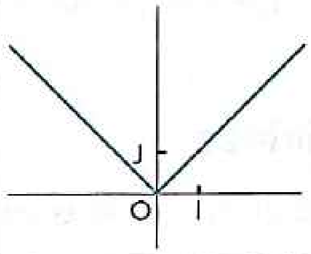
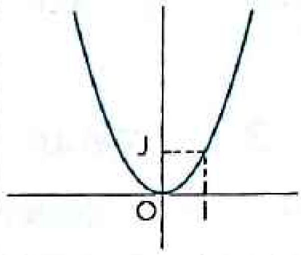



$f$ est paire *signifie que* $\begin{cases} \text{pour tout } x \text{ de } D_f,\ -x \in D_f \\ \text{et } f(-x) = f(x). \end{cases}$

*Le repère étant orthogonal, une fonction est paire si et seulement si l'axe des ordonnées est un axe de symétrie de sa courbe représentative.*

***Exemples***

Les fonctions suivantes sont paires.

| Fonction | $x \mapsto k$ | $x \mapsto \lvert x \rvert$ | $x \mapsto x^2$ |
|---|---|---|---|
| Représentation graphique |  |  |  |

## Remarque

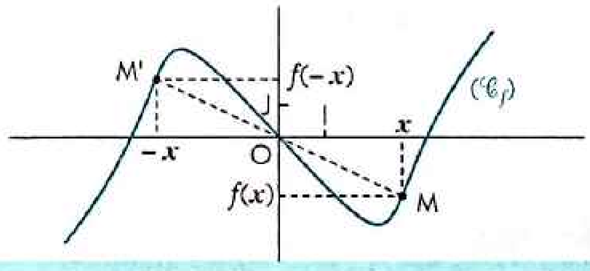
*Lorsqu'une fonction $f$, d'ensemble de définition $D_f$, est paire, il suffit de l'étudier sur l'ensemble $D_f \cap \mathbb{R}^+$. La courbe obtenue est ensuite complétée par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.*

## Fonctions impaires

## Définition

**Soit $f$ une fonction d'ensemble de définition $D_f$.**

**On dit que la fonction $f$ est impaire si $D_f$ est symétrique par rapport à zéro et pour tout $x$ élément de $D_f$, on a : $f(-x) = -f(x)$.**

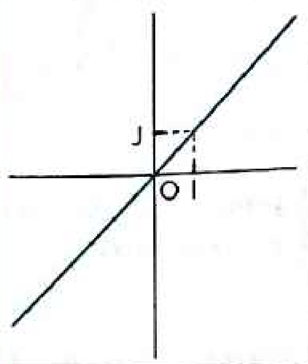
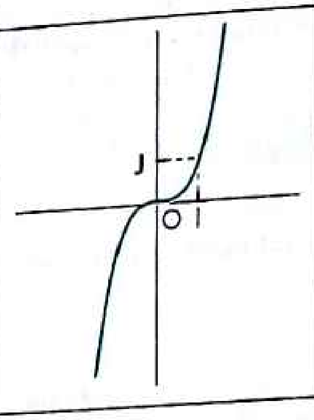
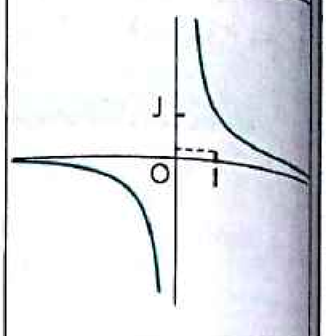



$f$ est impaire *signifie que* $\begin{cases} \text{pour tout } x \text{ de } D_f,\ -x \in D_f \\ \text{et } f(-x) = -f(x). \end{cases}$

*Une fonction est impaire si et seulement si l'origine du repère est un centre de symétrie de sa courbe représentative.*

**Exemples**

Les fonctions suivantes sont impaires.

| Fonction | $x \mapsto x$ | $x \mapsto x^3$ | $x \mapsto \frac{1}{x}$ |
|---|---|---|---|
| Représentation graphique |  |  |  |

## Remarque

*Lorsqu'une fonction f, d'ensemble de définition $D_f$, est impaire, il suffit de l'étudier sur l'ensemble $D_f \cap \mathbb{R}^+$.*
*La courbe obtenue est ensuite complétée par symétrie par rapport à l'origine.*

## Vocabulaire

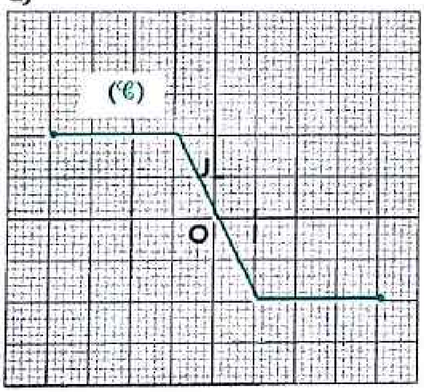
**Étudier la parité d'une fonction**, c'est préciser si cette fonction est paire ou impaire.

## 3.2. Travaux dirigés

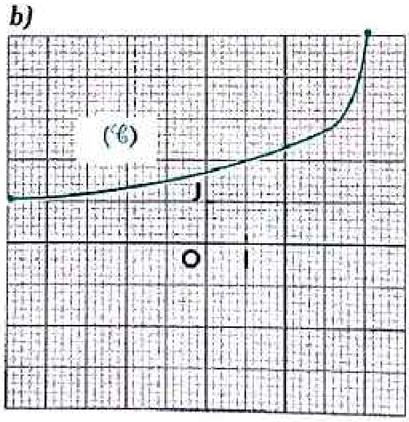
### 1. Reconnaître la parité d'une fonction

**1. Le repère (O, I, J) est orthonormé.**
**($\mathscr{C}$) est la représentation graphique d'une fonction $f$.**
**Préciser, dans chacun des cas suivants, l'ensemble de définition de la fonction $f$ puis sa parité.**

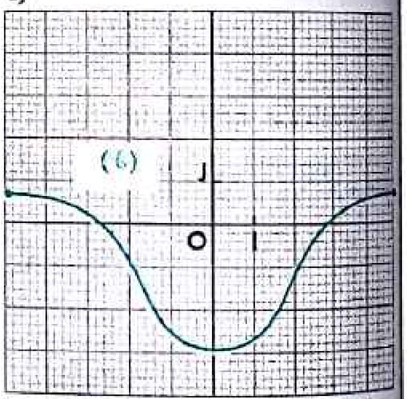
*a)*




*b)*




*c)*




## Solution

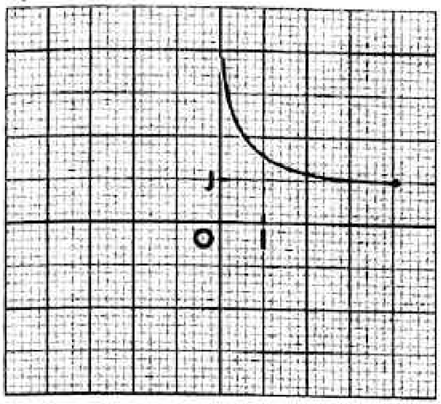
*a)* $D_f = [-4\ ;\ 4]$.
$f$ est impaire.

*b)* $D_f = [-5\ ;\ 4]$.
$f$ n'est ni paire, ni impaire.

*c)* $D_f = [-5\ ;\ 5]$.
$f$ est paire.

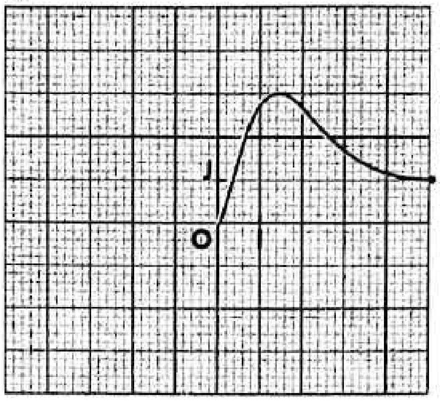
**2. On donne une partie de la représentation graphique ($\mathscr{C}$) d'une fonction $f$ et la parité de cette fonction. Compléter ($\mathscr{C}$) dans chacun des cas suivants.**

*a)*



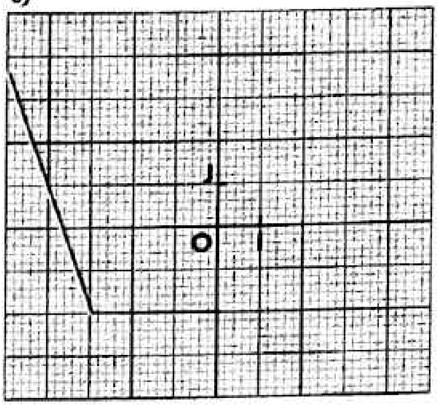
$D_f = [-4\,;4]$.
$f$ est paire.

*b)*



$D_f = [-5\,;5]$.
$f$ est impaire.

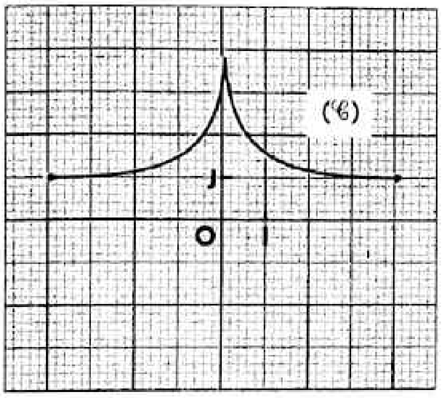
*c)*



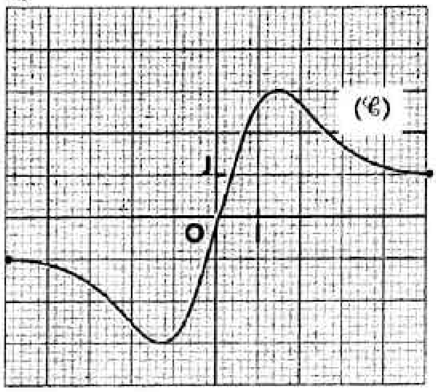
$D_f = \mathbb{R}$.
$f$ est paire.

## Solution

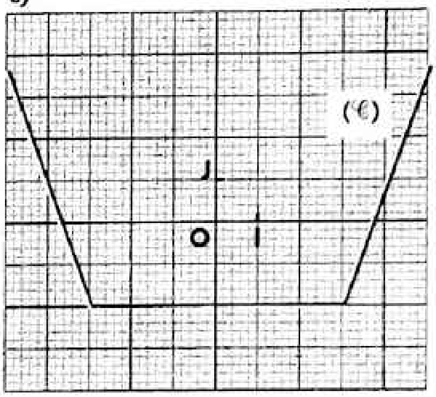
*a)*



*b)*



*c)*

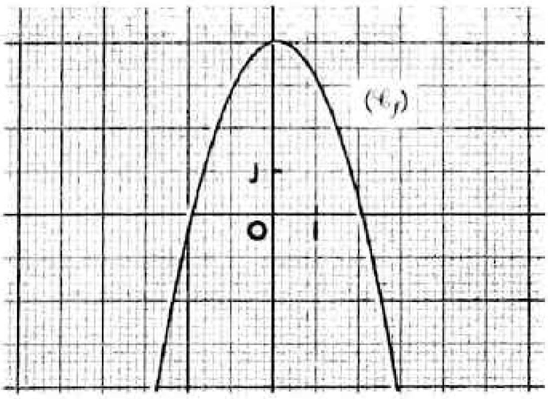


## 2. Étudier la parité d'une fonction

**Le repère (O, I, J) est orthogonal.**
**Dans chacun des cas suivants, étudier la parité de la fonction $f$.**

*a)* $f(x) = -x^2 + 4$ *b)* $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ *c)* $f(x) = -\sqrt{x}$ *d)* $f(x) = x^2 - 2x$.

## Solution



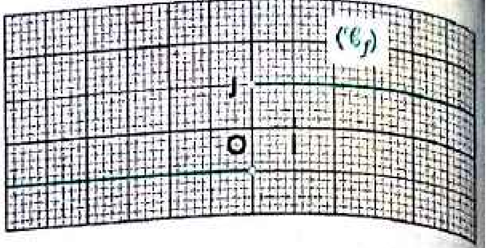
*a)* On a : $D_f = \mathbb{R}$.
La représentation graphique de $f$ est la parabole ci-contre.

- $D_f$ est symétrique par rapport à 0.
- On a : pour tout nombre réel $x$, $f(-x) = -(-x)^2 + 4$
$= -x^2 + 4$
$= f(x)$.

Donc, $f$ est une fonction paire.
La droite (OJ) est un axe de symétrie de ($\mathscr{C}_f$).

*b)* On a : $D_f = \mathbb{R}^* = ]-\infty\,;0[ \cup ]0\,;\infty[$.
Si $x \in ]-\infty\,;0[$, alors $f(x) = \dfrac{-x}{x} = -1$ ;
si $x \in ]0\,;+\infty[$, alors $f(x) = \dfrac{x}{x} = 1$.

La représentation graphique de $f$ est la réunion des deux demi-droites ci-contre.




- $D_f$ est symétrique par rapport à 0.
- On a :

pour tout élément $x$ de $\mathbb{R}^*$, $f(-x) = \dfrac{|-x|}{-x} = -\dfrac{|x|}{x} = -f(x)$.

Donc, $f$ est une fonction impaire.

Le point O est un centre de symétrie de $(\mathscr{C}_f)$.

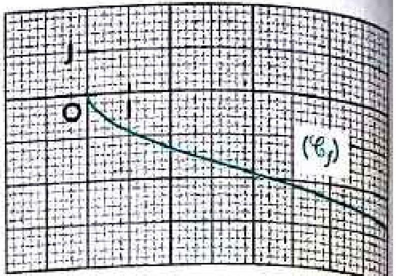
*c)* On a : $D_f = [0\ ;+\infty[$.

$1 \in D_f$ et $-1 \notin D_f$ ; donc $D_f$ n'est pas symétrique par rapport à 0.

On en déduit que la fonction $f$ n'est ni paire, ni impaire.

La droite (OJ) n'est pas un axe de symétrie de $(\mathscr{C}_f)$.

Le point O n'est pas un centre de symétrie de $(\mathscr{C}_f)$.




*d)* On a : $D_f = \mathbb{R}$.

La représentation graphique de $f$ est la parabole ci-contre.

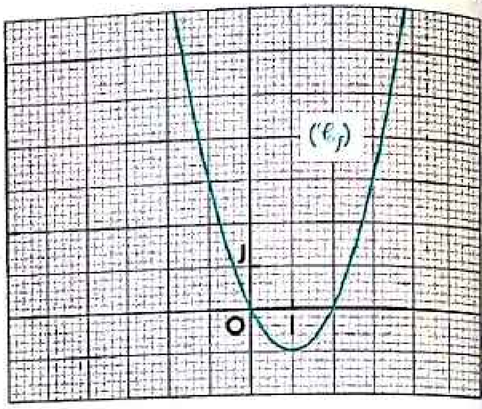
- $D_f$ est symétrique par rapport à 0.
- On a : $f(1) = -1$ et $f(-1) = 3$.

  $f(-1) \neq f(1)$ ; donc, $f$ n'est pas paire.

  $f(-1) \neq -f(1)$ ; donc, $f$ n'est pas impaire.

La droite (OJ) n'est pas un axe de symétrie de $(\mathscr{C}_f)$.

Le point O n'est pas un centre de symétrie de $(\mathscr{C}_f)$.




**M**

Pour démontrer qu'une fonction $f$ n'est pas paire, il suffit de trouver un élément $a$ de son ensemble de définition $D_f$ tel que : $-a \notin D_f$ ou $f(-a) \neq f(a)$.

Pour démontrer qu'une fonction $f$ n'est pas impaire, il suffit de trouver un élément $a$ de son ensemble de définition $D_f$ tel que : $-a \notin D_f$ ou $f(-a) \neq -f(a)$.

## Exercices

**3.a** Une fonction ayant pour ensemble de définition $[-4\ ;2]$ peut-elle être paire ? impaire ?

**3.b** Soit $f$ la fonction définie par : $f(x) = x^2 - 3$.
Démontrer que $f$ est une fonction paire.

**3.c** Soit $f$ la fonction définie par : $f(x) = x|x|$.
Démontrer que f est une fonction impaire.

**3.d** Soit $f$ la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{x+3}{x-1}$.

*a)* Démontrer que $f$ n'est pas paire.
*b)* Démontrer que $f$ n'est pas impaire.

**3.e** Dans chacun des cas suivants, étudier la parité de la fonction $f$.

*a)* $f(x) = x^3 + 1$   *b)* $f(x) = 2|x| - 5$
*c)* $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$   *d)* $f(x) = -4x^3$.

# Exercices

## APPRENTISSAGE

### Fonctions élémentaires

**1** ABCD est un rectangle d'aire 9 cm² et de largeur $x$ cm.
1. Calculer, en fonction de $x$, sa longueur $L(x)$.
2. Étudier les variations de la fonction L et construire sa représentation graphique dans le plan muni du repère (O, I, J).

**2** Résoudre graphiquement les équations suivantes.

*a)* $x^2 = 4$ *b)* $\frac{1}{x} = -2$

*c)* $x^3 + 1 = 0$ *d)* $x^3 - 8 = 0$.

**3** Résoudre graphiquement les équations suivantes.

*a)* $\frac{1}{x} = x$ $1 = x^2 - 1$ *b)* $2x^3 = -x + 3$.

$x^3 + x - 3 = 0$

**4** Résoudre graphiquement les inéquations suivantes.

*a)* $1 < x^2 < 4$ *b)* $-2 < \frac{1}{x} < -1$

*c)* $0 \leq x^2 \leq 4$ *d)* $-8 \leq x^2 \leq -1$.

**5** Déterminer l'intervalle auquel appartient $x^3$ dans chacun des cas suivants.

*a)* $x < -1$ *b)* $x > 1$

*c)* $x \leq \frac{1}{2}$ *d)* $3 \leq x \leq 4$.

### Fonctions et transformations du plan

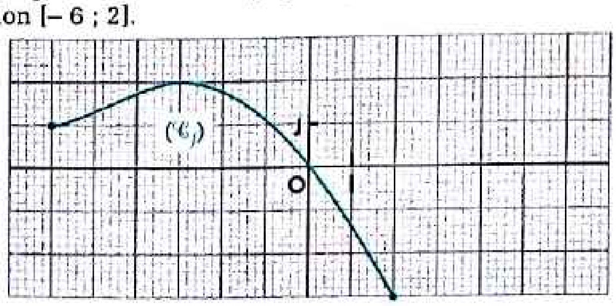
**6** Soit $f$ une fonction ayant pour ensemble de définition $[-3 ; 3]$. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $g$ dans chacun des cas suivants.

*a)* $g : x \mapsto -f(x)$ *b)* $g : x \mapsto |f(x)|$

*c)* $g : x \mapsto f(x+1)$ *d)* $g : x \mapsto f(x) + 1$

*e)* $g : x \mapsto f(x-2) + 1$ *f)* $g : x \mapsto f(x+3) - 4$.

**7** Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J). La courbe $(\mathscr{C}_f)$ ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction $f$ ayant pour ensemble de définition $[-6 ; 2]$.

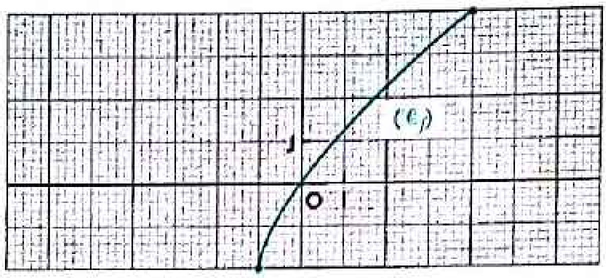



Construire, dans chacun des cas suivants, la représentation graphique de la fonction $g$.

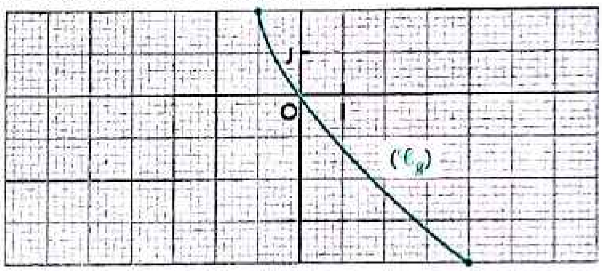
*a)* $g : x \mapsto -f(x)$ *b)* $g : x \mapsto |f(x)|$

*c)* $g : x \mapsto f(x-2) + 1$ *d)* $g : x \mapsto f(x+1)$.

**8** Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J). La courbe $(\mathscr{C}_f)$ ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction $f$ ayant pour ensemble de définition $[-1 ; 4]$.

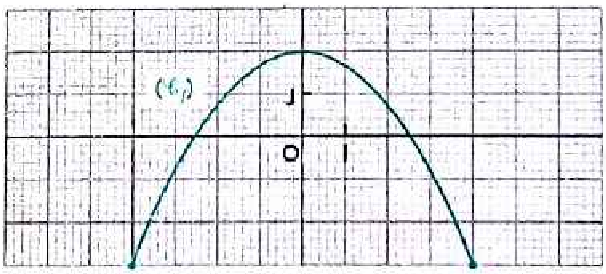



On désigne par $g$ la fonction, ayant pour ensemble de définition $[-1 ; 4]$, qui admet la courbe $(\mathscr{C}_g)$ ci-dessous pour représentation graphique.

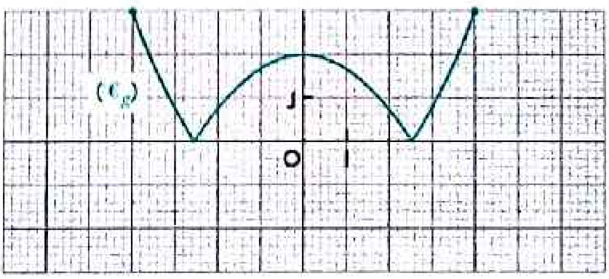



Conjecturer l'expression de $g(x)$ en fonction de $f(x)$.

**9** Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J). La courbe $(\mathscr{C}_f)$ ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction $f$ ayant pour ensemble de définition $[-4 ; 4]$.




On désigne par $g$ la fonction, ayant pour ensemble de définition $[-4 ; 4]$, qui admet la courbe $(\mathscr{C}_g)$ ci-dessous pour représentation graphique.




Conjecturer l'expression de $g(x)$ en fonction de $f(x)$.

**10** Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J).
Soit $f$ la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par
$f(x) = x^2 + 2x - 3$ et $(\mathscr{C}_f)$ sa représentation graphique.
1. Démonter que :
pour tout nombre réel $x$, $f(x) = (x + 1)^2 - 4$.
2. En déduire que $(\mathscr{C}_f)$ est l'image de la parabole d'équation $y = x^2$ par une translation que l'on précisera.
3. Construire $(\mathscr{C}_f)$ à partir de la parabole d'équation $y = x^2$.

**11** Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J).
Soit $f$ la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par
$f(x) = \dfrac{-2x + 3}{x - 1}$ et $(\mathscr{C}_f)$ sa représentation graphique.
1. *a)* Déterminer l'ensemble de définition $D_f$ de $f$.
*b)* Démonter que :
pour tout $x$ élément de $D_f$, $f(x) = \dfrac{1}{x - 1} - 2$.
2. En déduire que $(\mathscr{C}_f)$ est l'image de l'hyperbole d'équation $y = \dfrac{1}{x}$ par une translation que l'on précisera.
3. Construire $(\mathscr{C}_f)$ à partir de l'hyperbole d'équation $y = \dfrac{1}{x}$.

**12** Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J).
Soit $(\mathscr{P})$ la parabole d'équation : $y = x^2 - 3x$.
1. Déterminer l'équation réduite de $(\mathscr{P})$.
2. En déduire le sommet et l'axe de $(\mathscr{P})$.
3. Construire directement $(\mathscr{P})$. *(Sans l'aide d'une transformation.)*

**13** Le plan est muni du repère (O, I, J).
Soit $(\mathscr{H})$ l'hyperbole d'équation : $y = \dfrac{2x - 5}{x - 3}$.
1. Déterminer l'équation réduite de $(\mathscr{H})$.
2. En déduire le centre de symétrie de $(\mathscr{H})$.
3. Construire directement $(\mathscr{H})$. *(Sans l'aide d'une transformation.)*

**14** Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J).
$f$ et $g$ sont des fonctions de représentations graphiques respectives $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_g)$.
- Déterminer la translation qui transforme $(\mathscr{C}_f)$ en $(\mathscr{C}_g)$.
- Construire $(\mathscr{C}_f)$.
- Construire $(\mathscr{C}_g)$ à partir de $(\mathscr{C}_f)$.

*a)* $f(x) = -x^2$ et $g(x) = -x^2 + 2x$

*b)* $f(x) = \dfrac{x^2}{3}$ et $g(x) = \dfrac{x^2}{3} + 2x - 1$

*c)* $f(x) = \dfrac{1}{-x}$ et $g(x) = \dfrac{x - 3}{x - 2}$

*d)* $f(x) = \dfrac{2}{x}$ et $g(x) = \dfrac{-3x + 5}{x - 1}$.

**15** Une fonction $f$, ayant pour ensemble de définition $[-2 ; 3]$, admet le tableau de variation ci-dessous.

| $x$ | $-2$ | $-1$ | $1$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-15$ ↗ | $0$ ↗ | $12$ ↘ | $0$ |

Dans chacun des cas suivants, dresser le tableau de variation de la fonction $g$.
*a)* $g : x \mapsto -f(x)$
*b)* $g : x \mapsto |f(x)|$
*c)* $g : x \mapsto f(x + 1)$
*d)* $g : x \mapsto f(x - 2) + 4$.

**16** Le plan est muni du repère (O, I, J).
1. *a)* Construire la représentation graphique de la fonction $f : x \mapsto x^3$.
*b)* En déduire la représentation graphique de la fonction $g : x \mapsto x^3 + 4$.
2. Résoudre graphiquement l'équation : $g(x) = 4x + 4$.

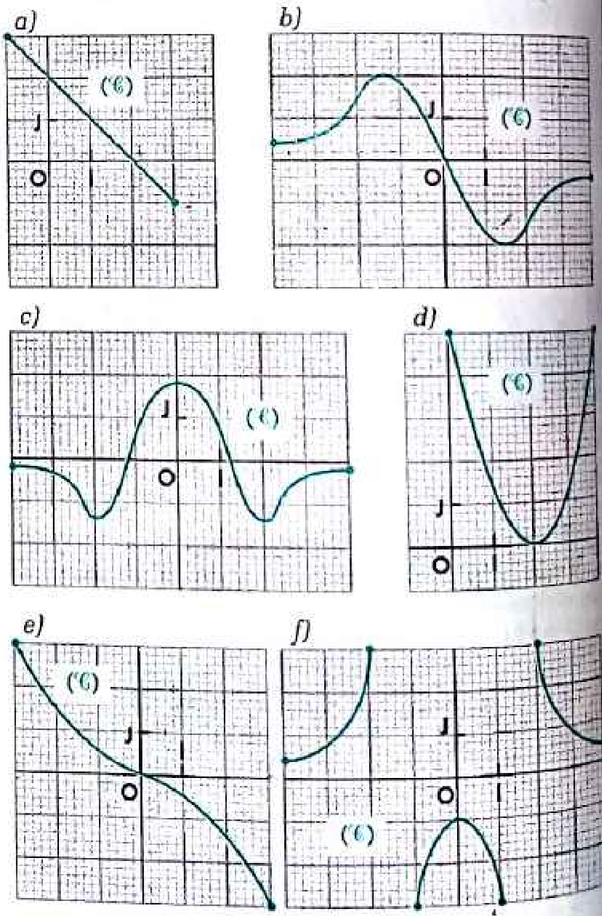
**17** Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J).
Soit $(\mathscr{C})$ la courbe d'équation : $y = \sqrt{x}$.
1. Construire l'image $(\mathscr{C}')$ de $(\mathscr{C})$ par la symétrie orthogonale d'axe (OJ).
2. Déterminer une équation de $(\mathscr{C}')$.

**18** Le plan est muni du repère (O, I, J).
Soit $(\mathscr{H})$ l'hyperbole d'équation : $y = \dfrac{1}{x}$.
1. Construire l'image $(\mathscr{H}')$ de $(\mathscr{H})$ par la translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$.
2. Déterminer une équation de $(\mathscr{H}')$.

**19** Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J).
Soit $(\mathscr{P})$ la parabole d'équation : $y = -x^2 + 4x - 3$.
1. Construire l'image $(\mathscr{P}')$ de $(\mathscr{P})$ par la symétrie de centre O.
2. Déterminer une équation de $(\mathscr{P}')$.

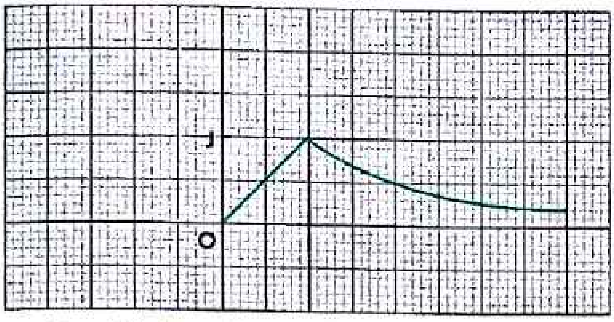
## Parité et éléments de symétrie

**20** Dans chacun des cas suivants, $(\mathscr{C})$ est la représentation graphique d'une fonction $f$.



1. Déterminer l'ensemble de définition de $f$.
2. Préciser la parité de $f$.

**21** La courbe ci-dessous est une partie de la représentation graphique ($\mathscr{C}$) d'une fonction $f$, ayant pour ensemble de définition $[-4 ; 4]$.




Compléter ($\mathscr{C}$) dans chacun des cas suivants :
*a)* $f$ est une fonction paire
*b)* $f$ est une fonction impaire.

**22** Soit $f$ une fonction ayant pour ensemble de définition $\mathbb{R}$. Construire la représentation graphique de $f$ dans chacun des cas suivants.
*a)* $f$ est paire et $f$ est croissante sur $[0 ; +\infty[$
*b)* $f$ est impaire et $f$ est croissante sur $[0 ; +\infty[$.

**23** Soit $f$ une fonction ayant pour ensemble de définition $\mathbb{R}$. Construire la représentation graphique de $f$ dans chacun des cas suivants.
*a)* $f$ est paire et $f$ est décroissante sur $[0 ; +\infty[$
*b)* $f$ est impaire et $f$ est décroissante sur $[0 ; +\infty[$.

**24** Étudier la parité de la fonction $f$ dans chacun des cas suivants.

*a)* $f(x) = x^3 - x$   *b)* $f(x) = x^2 + x$

*c)* $f(x) = \sqrt{-x}$   *d)* $f(x) = \dfrac{3}{x}$

*e)* $f(x) = x^2 + 1$   *f)* $f(x) = |x| - 4$.

**25** Déterminer toutes les fonctions polynômes du second degré qui sont paires.

## APPROFONDISSEMENT

**26** Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J). Soit ($\mathscr{P}$) la parabole d'équation $y = x^2$ et ($\Delta$) la droite d'équation $y = x$.
1. Construire l'image ($\mathscr{P}'$) de ($\mathscr{P}$) par la symétrie orthogonale d'axe ($\Delta$).
2. Déterminer une équation de ($\mathscr{P}'$).

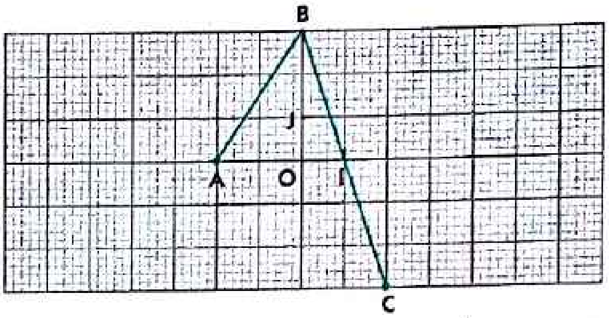
**27** Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J). Représenter graphiquement l'ensemble des points $M(x ; y)$ tels que : $y^2 = x$.

**28** Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J). Représenter graphiquement l'ensemble des points $M(x ; y)$ tels que : $x^2y^2 = 1$.

**29** Résoudre graphiquement le système :
$$\begin{cases} xy = 100 \\ 2x - y - 10 = 0 \end{cases}$$

**30** Le plan est muni du repère (O, I, J).
À l'aide de la représentation graphique de la fonction cube, construire la représentation graphique de la fonction $g$ dans chacun des cas suivants.
*a)* $g(x) = x^3 + 1$   *b)* $g(x) = (x + 1)^3$
*c)* $g(x) = x^3 - 1$   *d)* $g(x) = (x - 1)^3$.

**31** Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J). Sur la figure ci-dessous, [AB] ∪ [BC] est la représentation graphique d'une fonction $f$.




1. On considère la fonction $g : x \mapsto |f(x)|$.
*a)* Déterminer l'ensemble de définition $D_g$ de $g$
*b)* Construire la représentation graphique ($\mathscr{C}_g$) de $g$
*c)* Donner la formule explicite de la fonction $g$.
2. Répondre aux mêmes questions pour la fonction $h$ : $x \mapsto f(x + 2) + 3$.

**32** Soit $f$ une fonction paire ayant pour ensemble de définition $[-5 ; 5]$.
Démontrer que si $f$ est croissante sur $[0 ; 5]$, alors $f$ est décroissante sur $[-5 ; 0]$.

**33** Soit $f$ une fonction impaire ayant pour ensemble de définition $[-5 ; 5]$.
Démontrer que si $f$ est croissante sur $[0 ; 5]$, alors $f$ est également croissante sur $[-5 ; 0]$.

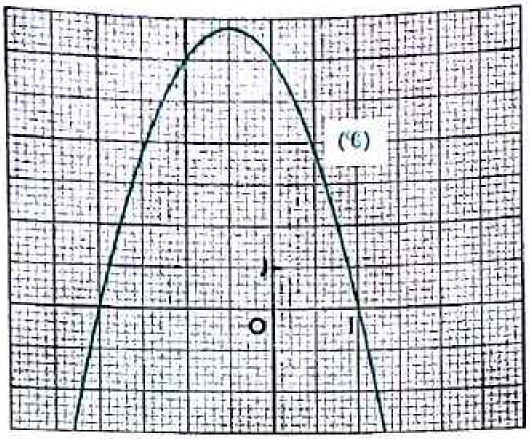
**34** Parmi les rectangles d'aire égale à 2, on veut chercher tous ceux dont la différence des côtés est supérieure à 1.
1. Démontrer que la largeur $x$ et la longueur $y$ d'un rectangle solution vérifient le système :
$$\begin{cases} xy = 2 \\ x - y + 1 < 0 \end{cases}$$
2. Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J).
*a)* Construire les représentations graphiques des fonctions $f : x \mapsto \dfrac{2}{x}$ et $g : x \mapsto x + 1$.
*b)* Déterminer graphiquement les intervalles auxquels appartiennent les dimensions des rectangles cherchés.

**35** Déterminer l'équation réduite de la parabole ($\mathscr{P}$) de sommet $S(1 ; -4)$ passant par le point $A(3 ; 0)$.

**36** Déterminer l'équation réduite de l'hyperbole ($\mathscr{H}$) de centre $\Omega(3 ; 1)$ passant par le point $A(4 ; 5)$.

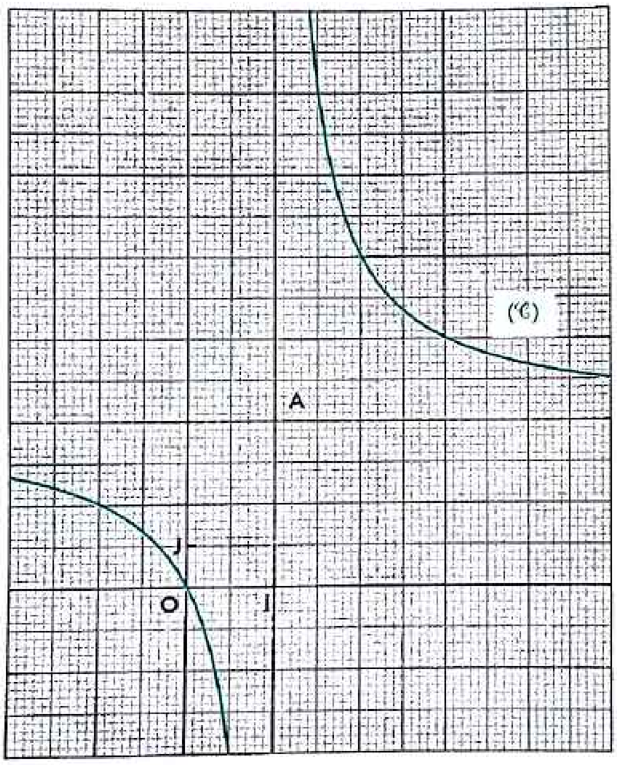
**37** La courbe ($\mathscr{C}$) page suivante est la représentation graphique d'une fonction polynôme $f$ du second degré.
1. Résoudre graphiquement :
*a)* l'équation : $f(x) = 0$
*b)* l'inéquation : $f(x) < 0$.
2. *a)* En remarquant que $f(0) = 6$, déterminer l'expression de $f(x)$.

*b)* Vérifier, par le calcul, les résultats obtenus à la question 1.



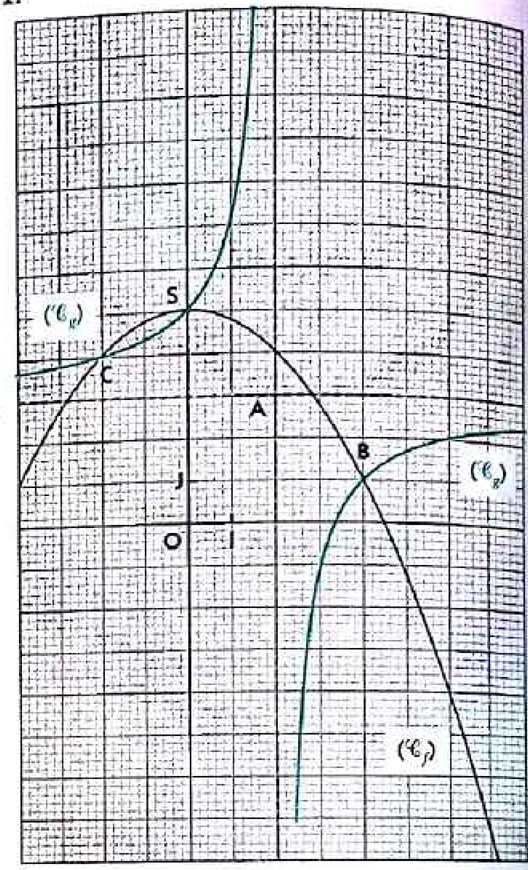

**38** La courbe (𝒞) ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction homographique $f$.
Le point A est un centre de symétrie de (𝒞).

1. Résoudre graphiquement :
*a)* l'équation : $f(x) = x$
*b)* l'inéquation : $f(x) > 4$.
2. *a)* En remarquant que $f(0) = 0$, déterminer l'expression de $f(x)$.
*b)* Vérifier, par le calcul, les résultats obtenus à la question 1.




**39** Sur la figure ci-dessous, $(\mathscr{C}_f)$ est la parabole de sommet S(0 ; 5) passant par le point B(4 ; 1) et $(\mathscr{C}_g)$ est l'hyperbole de centre A(2 ; 3) passant par le point S.

1. Résoudre graphiquement :
*a)* l'équation : $f(x) = g(x)$
*b)* l'inéquation : $f(x) > g(x)$.
2. *a)* Déterminer les expressions de $f(x)$ et de $g(x)$.
*b)* Vérifier que C(– 2 ; 4) est un point commun aux courbes $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_g)$.
*c)* Vérifier, par le calcul, les résultats obtenus à la question 1.




**40** Le plan est muni du repère othogonal (O, I, J).
$f$ est une fonction ayant pour ensemble de définition ℝ, telle que : pour tout $x \in [0 ; +\infty[$, $f(x) = x^2 - 2x$.

1. On supose que $f$ est une fonction paire.
*a)* Construire la représentation graphique de la fonction $f$.
*b)* Exprimer $f(x)$ en fonction de $x$, pour $x$ appartenant à l'intervalle $]-\infty ; 0]$.
*c)* Vérifier que : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2|x|$.
2. On suppose que $f$ est une fonction impaire.
*a)* Construire la représentation graphique de la fonction $f$.
*b)* Exprimer $f(x)$ en fonction de $x$, pour $x$ appartenant à l'intervalle $]-\infty ; 0]$.
*c)* Vérifier que : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x|x| - 2x$.

# 3 Dénombrement

## Introduction

*Le dieu Shiva compose avec Brahma et Vishnu la triade qui personnifie les trois aspects fondamentaux de l'être universel dans la religion hindoue. Les représentations traditionnelles le montrent avec dix bras qui portent chacun un attribut. Cela donna l'idée à un mathématicien hindou du XII^e^ siècle de poser cette question : « Combien de représentations différentes du dieu Shiva peut-on obtenir en changeant ses dix attributs de mains ? »*


Le dieu Shiva, tenant dans chacune de ses dix mains l'un de ses attributs : corde, trompe d'éléphant, serpent, tambourin, rame, trident, lit, poignard, flèche et arc.

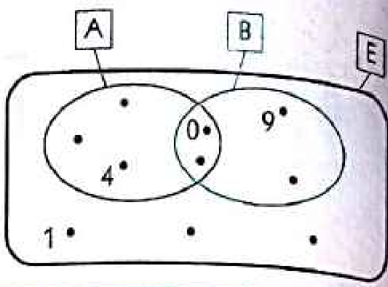
## SOMMAIRE

# 1 Compléments sur les ensembles

## 1.1. Réunion et intersection de deux ensembles

### Introduction

Soit E l'ensemble des chiffres du système décimal,
A l'ensemble des chiffres pairs,
B l'ensemble des chiffres multiples de 3.




- Énumérer les éléments des ensembles E, A et B.
- Quels sont les éléments de E appartenant à la fois à A et à B ?
- Quels sont les éléments de E appartenant à l'un au moins des ensembles A et B ?
- Compléter le diagramme ci-contre.

### Définitions

**Soit A et B deux parties d'un ensemble E.**

**On appelle intersection de A et B l'ensemble des éléments de E appartenant à A et à B.**

**On note $A \cap B$ ; on lit « A inter B ».**

$x \in A \cap B$ *signifie* $x \in A$ et $x \in B$.

**On appelle réunion de A et B l'ensemble des éléments de E appartenant à A ou à B.**

**On note $A \cup B$ ; on lit « A union B ».**

$x \in A \cup B$ signifie $x \in A$ ou $x \in B$.

### Remarque

*Lorsque leur intersection est vide, les parties A et B sont dites **disjointes**.*

### Cardinal de la réunion de deux ensembles

Le **cardinal** d'un ensemble fini E est le nombre, noté card(E), d'éléments de cet ensemble.

Reprenons l'exemple introductif.

- Déterminer le cardinal de chacun des ensembles A, B, $A \cap B$ et $A \cup B$.
- Trouver une relation entre ces quatre nombres.

Plus généralement, nous admettons la propriété suivante.

### Propriété

**Soit A et B deux parties d'un ensemble fini E.**
**On a : $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$.**

### Remarque

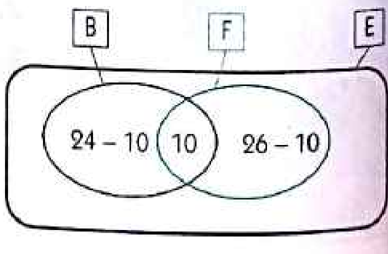
*En additionnant les nombres d'éléments de A et de B, ceux de $A \cap B$ sont comptés deux fois.*

***Exemple***

Dans une classe, tous les élèves pratiquent au moins l'un des deux sports proposés : le football ou le basket. 24 élèves pratiquent le basket, 26 pratiquent le football et 10 pratiquent les deux sports.

- Déterminer l'effectif de cette classe.
- Déterminer le nombre d'élèves pratiquant un seul sport.

Sur le diagramme ci-contre, E représente l'ensemble des élèves de la classe, B et F les sous-ensembles de ces élèves pratiquant respectivement le basket et le football.




- On a : $E = B \cup F$.

Donc : $\text{card}(E) = \text{card}(B) + \text{card}(F) - \text{card}(B \cap F)$
$= 24 + 26 - 10 = 40$.

Donc, l'effectif de cette classe est : 40 élèves.

• Le nombre d'élèves pratiquant uniquement le basket est :
card(B) – card(B ∩ F) = 24 – 10 = 14.
Le nombre d'élèves pratiquant uniquement le football est :
card(F) – card(B ∩ F) = 26 – 10 = 16.
On en déduit que le nombre d'élèves pratiquant un seul sport est : 14 + 16 = 30.

### Remarque

*Si A ∩ B = ∅, alors card(A ∪ B) = card(A) + card(B).*

## 1.2. Complémentaire d'un ensemble

### Présentation

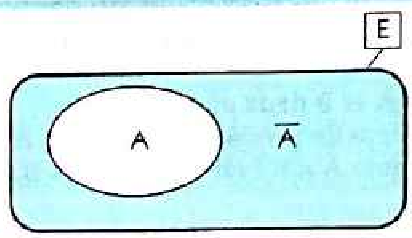
Soit E l'ensemble des élèves d'une classe, F l'ensemble des filles et G l'ensemble des garçons de cette classe. On a : E = F ∪ G et F ∩ G = ∅.
On dit que F et G sont des parties **complémentaires** de E.

**Définition**

**On appelle complémentaire de A dans E l'ensemble des éléments de E n'appartenant pas à A.**

**On note $\complement_E^A$ ou $\overline{A}$ ;**

**on lit « complémentaire de A dans E ».**




### Cardinal du complémentaire d'un ensemble

**Propriété**

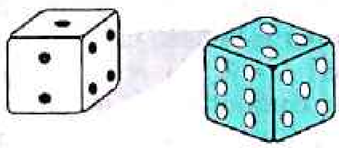
**Soit A une partie d'un ensemble fini E.**
**On a : card($\overline{A}$) = card(E) – card(A).**

*Exemple*
Sur 1 000 ampoules produites par une usine, 50 sont défectueuses.
Le nombre d'ampoules non défectueuses est donc 1 000 – 50, c'est-à-dire 950.

## 1.3. Produit cartésien

### Introduction

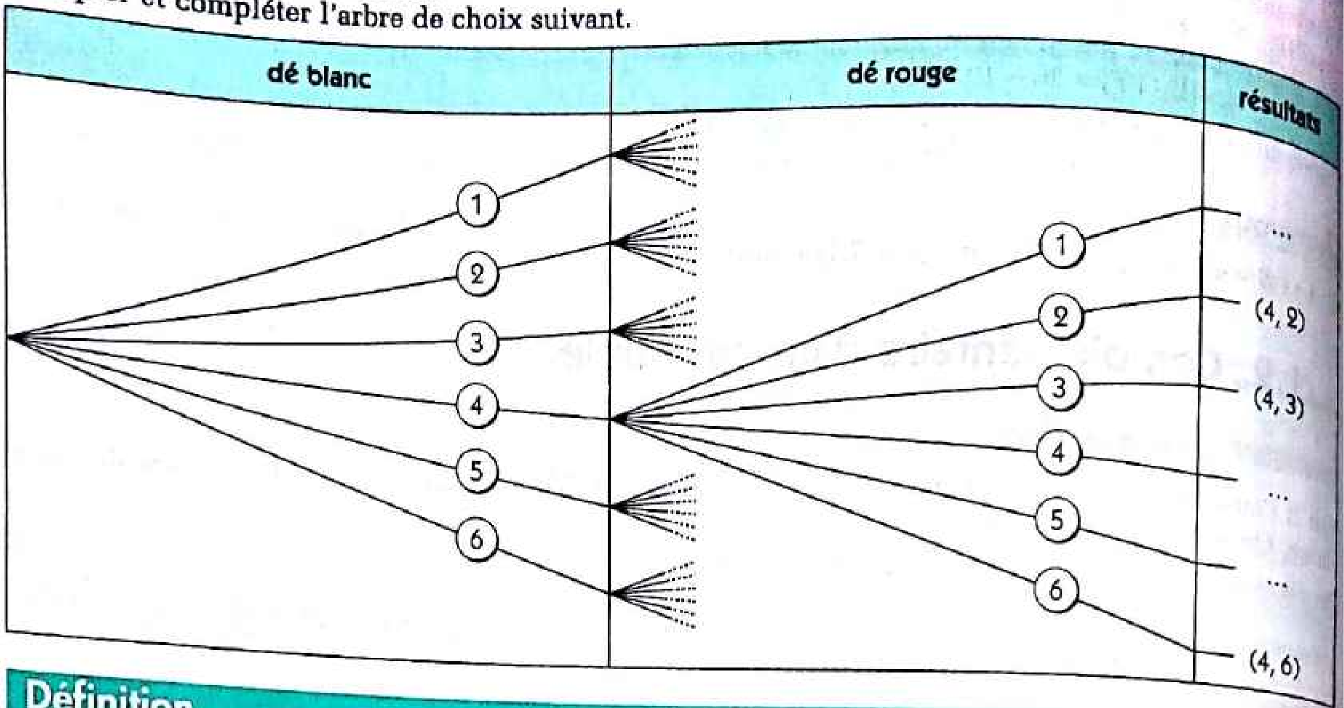
On lance simultanément deux dés cubiques, l'un blanc et l'autre rouge.
On note, à chaque lancer, les numéros des faces supérieures.
On se propose de déterminer tous les résultats possibles.



***Utilisation d'un tableau à double entrée***
Chaque résultat correspond à un couple $(a, b)$ tel que le numéro du dé blanc est $a$ et celui du dé rouge $b$.
Par exemple, le couple (1, 2) indique que le numéro du dé blanc est 1 et celui du dé rouge 2.
• Quelle information traduit le couple (2, 1) ?
• Traduire, à l'aide d'un couple, que le numéro du dé blanc est 3 et celui du dé rouge 5.
• Compléter le tableau à double entrée.

| | | dé rouge | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| dé blanc | 1 | (1, 1) | (1, 2) | | | | |
| | 2 | (2, 1) | | | | | |
| | 3 | (3, 1) | | | | | |
| | 4 | | | | | (4, 5) | |
| | 5 | | | | | | |
| | 6 | | | | | | |

***Utilisation d'un arbre de choix***
Recopier et compléter l'arbre de choix suivant.




## Définition

**Soit A et B deux ensembles.**
**On appelle produit cartésien de A par B l'ensemble des couples $(a, b)$ tels que $a \in A$ et $b \in B$.**
**On note $A \times B$ ; on lit « A croix B ».**

## Remarques

- *Dans un couple, l'ordre des éléments est important ; d'après l'exemple précédent, on a : $(1, 2) \neq (2, 1)$.*
- *Plus généralement, le produit cartésien de p ensembles $E_1, E_2, ..., E_p$ est l'ensemble des éléments $(x_1, x_2, ..., x_p)$ tel que $x_1 \in E_1, x_2 \in E_2, ..., x_p \in E_p$.*
*On note : $E_1 \times E_2 \times ... \times E_p$ ; les éléments $(x_1, x_2, ..., x_p)$ sont appelés p-uplets.*
- *Le produit cartésien $\underbrace{E \times E \times ... \times E}_{p \text{ fois}}$ est noté $E^p$.*

*Exemples*

- Zié envisage de se lancer dans la vente des produits vivriers.
Le comportement du marché dépend de la conjoncture et de la concurrence.
La conjoncture est soit bonne, soit mauvaise ; on note respectivement b et m.
La concurrence est soit rude, soit faible, soit inexistante ; on note respectivement r, f et i.
Les différents comportements du marché peuvent être représentés par le tableau ci-contre.
Notons : A = {b, m} et B = {r, f, i}.

| | | concurrence | | |
|---|---|---|---|---|
| | | r | f | i |
| conjoncture | b | (b, r) | (b, f) | (b, i) |
| | m | (m, r) | (m, f) | (m, i) |

Chaque comportement du marché peut être considéré comme un élément du produit cartésien A × B.
- Comment déterminer les nombres de 3 chiffres que l'on peut former avec les chiffres 1, 2, 5 et 9 ?
Soit E = {1, 2, 5, 9}.
Les nombres de 3 chiffres peuvent être formés à partir des éléments du produit cartésien $E^3$.
Par exemples, les triplets (1, 1, 1), (2, 5, 2) et (2, 5, 9) permettent de former respectivement les nombres 111, 252 et 259.

## Cardinal du produit cartésien

Reprenons l'exemple introductif.
- Combien y a-t-il de résultats possibles ?
- Combien y a-t-il de résultats comportant au moins un cinq ?

Plus généralement, nous admettons la propriété suivante.

**Propriété**

**Soit A et B deux ensembles finis.**
**On a : card(A × B) = card(A) × card(B).**

## Remarque

*On peut généraliser la propriété précédente à p ensembles finis.*
- $card(E_1 \times E_2 \times ... \times E_p) = card(E_1) \times card(E_2) ... \times card(E_p)$.
- $card(E^p) = [card(E)]^p$.

*Exemples*

Reprenons les exemples précédents.
- Le nombre de comportements du marché est : card(A × B) = card(A) × card(B) = 2 × 3 = 6.
- On peut écrire card($E^3$) nombres de trois chiffres (distincts ou non) avec les éléments de l'ensemble E = {1, 2, 5, 9}. On a : card($E^3$) = $[card(E)]^3$ = 64.

# 1.4. Travaux dirigés

## Intersection de trois ensembles

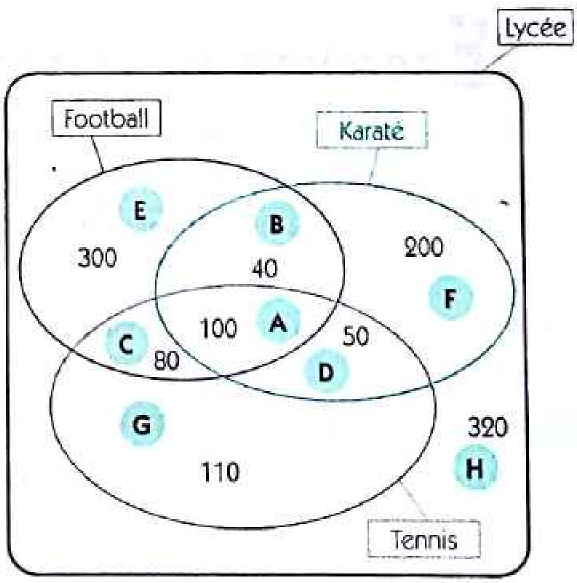
**Dans un lycée de 1 200 élèves, trois activités sportives sont proposées : le football, le karaté et le tennis.**
**520 élèves pratiquent le football ;**
**390 élèves pratiquent le karaté ;**
**340 élèves pratiquent le tennis ;**
**140 élèves pratiquent à la fois le football et le karaté ;**
**180 élèves pratiquent à la fois le football et le tennis ;**
**150 élèves pratiquent à la fois le karaté et le tennis ;**
**100 élèves pratiquent à la fois les trois sports.**

**1°) Déterminer le nombre d'élèves qui pratiquent seulement le football, seulement le karaté, seulement le tennis.**

**2°) Déterminer le nombre d'élèves qui ne pratiquent aucun de ces trois sports.**

## Solution

1°) Le diagramme ci-contre fait apparaître 8 parties A, B, C, D, E, F, G et H deux à deux disjointes.
- La partie A représente l'ensemble des élèves qui pratiquent les trois sports ; on a : card(A) = 100.
- La partie B représente l'ensemble des élèves qui pratiquent seulement le football et le karaté ; on a : card(B) = 140 − 100 = 40.
- La partie C représente l'ensemble des élèves qui pratiquent seulement le football et le tennis ; on a : card(C) = 180 − 100 = 80.
- La partie D représente l'ensemble des élèves qui pratiquent seulement le karaté et le tennis ; on a : card(D) = 150 − 100 = 50.
- Les parties E, F et G représentent respectivement l'ensemble des élèves qui pratiquent uniquement le football, le karaté et le tennis.




On a : card(E) = 520 − (100 + 40 + 80) = 300 ;
card(F) = 390 − (100 + 40 + 50) = 200 ;
card(G) = 340 − (100 + 50 + 80) = 110.

2°) La partie H représente l'ensemble des élèves qui ne pratiquent aucun des trois sports.
On a : card(H) = 1 200 − (300 + 200 + 110 + 100 + 40 + 50 + 80) = 320.

## Répartition des travailleurs d'une entreprise

**Une entreprise de transformation de café emploie 800 personnes, dont 40 % de femmes. Pour se rendre à l'entreprise, les travailleurs ont le choix entre deux formules :**
***FORMULE 1*** **: emprunter le bus de l'entreprise ;**
***FORMULE 2*** **: utiliser ses propres moyens.**
**60 % des femmes utilisent le bus de l'entreprise, contre un tiers des hommes.**

**Quelle est la répartition des travailleurs de cette entreprise ?**

## Solution

Désignons par :
F l'ensemble des femmes de l'entreprise ;
$\overline{F}$ l'ensemble des hommes de l'entreprise ;
B l'ensemble des travailleurs qui empruntent le bus de l'entreprise ;
$\overline{B}$ l'ensemble des travailleurs qui utilisent leurs propres moyens.
Le tableau ci-contre fait apparaître 9 cases numérotées de 1 à 9.

| | B | $\overline{B}$ | Total |
|---|---|---|---|
| F | ❶ 192 | ❷ 128 | ❸ 320 |
| $\overline{F}$ | ❹ 160 | ❺ 320 | ❻ 480 |
| Total | ❼ 352 | ❽ 448 | ❾ 800 |

- La case ❾ représente le nombre total de travailleurs de l'entreprise ; c'est-à-dire 800.
- La case ❸ représente le nombre total de femmes de l'entreprise ; c'est-à-dire : $800 \times \frac{40}{100} = 320$.
- La case ❶ représente le nombre de femmes qui empruntent le bus ; c'est-à-dire : $320 \times \frac{60}{100} = 192$.
- La case ❷ représente le nombre de femmes qui n'empruntent pas le bus ;
  c'est-à-dire : $320 - 192 = 128$.
- La case ❻ représente le nombre total des hommes de l'entreprise ; c'est-à-dire : $800 - 320 = 480$.
- La case ❹ représente le nombre d'hommes qui empruntent le bus ; c'est-à-dire : $480 \times \frac{1}{3} = 160$.
- La case ❺ représente le nombre d'hommes qui n'empruntent pas le bus ;
  c'est-à-dire : $480 - 160 = 320$.
- La case ❼ représente le nombre de travailleurs qui empruntent le bus ; c'est-à-dire : $192 + 160 = 352$.
- La case ❽ représente le nombre de travailleurs qui n'empruntent pas le bus ;
  c'est-à-dire : $128 + 320 = 448$.

# Exercices

**1.a** Chacun des 40 élèves d'une classe étudie le français ou l'arabe. 15 élèves étudient les deux langues.
Combien d'élèves étudient une seule des deux langues ?

**1.b** Dans un club sportif, tous les membres pratiquent au moins un des deux sports proposés : le basket et le handball. 850 membres pratiquent le basket, 600 pratiquent le handball et 250 pratiquent les deux sports.
Combien de membres compte ce club sportif ?

**1.c** Compléter le tableau suivant.

| Ensemble | A | B | C | A×B | B×C |
|---|---|---|---|---|---|
| Cardinal | 5 | 8 | 9 | 40 | 72 |

**1.d** Dans une épreuve d'examen, on propose 3 sujets de mathématiques et 5 sujets de français. Un candidat doit choisir un sujet de chaque discipline.
Combien a-t-il de choix possibles ?

# 2 $p$-uplets, arrangements et permutations

## 2.1. $p$-uplets d'un ensemble

### Définition

**Définition**

**Soit E un ensemble à $n$ éléments et $p$ un nombre entier naturel non nul.**
**On appelle $p$-uplet de E tout élément de l'ensemble $E^p$.**

*Exemples*

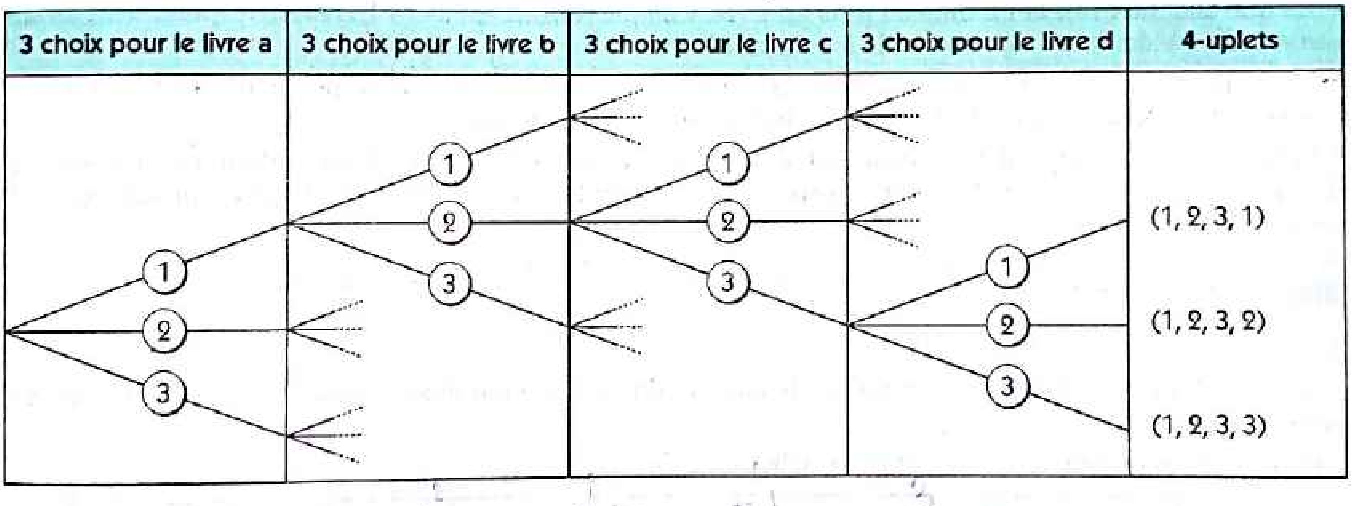
• (P, P) et (F, P) sont des couples de l'ensemble {P, F}.
Ils correspondent, par exemple, à des résultats du lancer simultané de deux pièces de monnaie discernables.

• (0, 0, 0), (0, 0, 1), (1, 0, 1) sont des triplets de l'ensemble {0, 1}.

• On dispose de 4 livres a, b, c et d qu'on veut ranger dans 3 tiroirs numérotés **1**, **2** et **3**.
Un rangement correspond à un 4-uplet de l'ensemble {1, 2, 3}.
Par exemple, le 4-uplet (1, 1, 3, 2) traduit que :

le livre a est dans le tiroir numéroté 1 ;
le livre b est dans le tiroir numéroté 1 ;
le livre c est dans le tiroir numéroté 3 ;
le livre d est dans le tiroir numéroté 2.

Un arbre de choix facilite la détermination de tous les 4-uplets.




### Propriété

Pour tout ensemble E à $n$ éléments, on a : card $(E^p) = n^p$. On en déduit la propriété suivante.

**Propriété**

**Le nombre de $p$-uplets d'un ensemble à $n$ éléments est $n^p$.**

*Exemples*

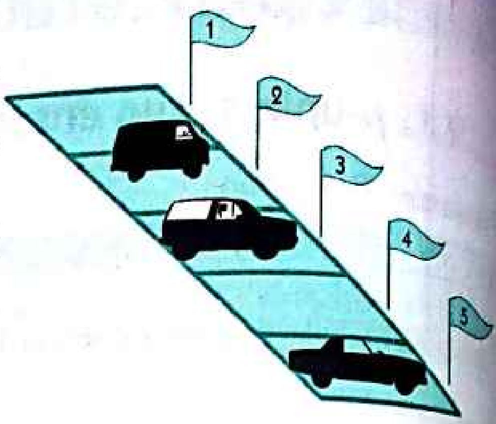
Reprenons les exemples précédents.
• Le nombre de couples de l'ensemble {F, P} est : $2^2 = 4$.
• Le nombre de triplets de l'ensemble {0, 1} est : $2^3 = 8$.
• Le nombre de façons de ranger 4 livres dans 3 tiroirs est : $3^4 = 81$.

## 2.2. Arrangements

### Introduction

Dans un parking de 5 places numérotées de 1 à 5, 3 voitures arrivent et se garent.
Un rangement est une occupation de 3 places deux à deux distinctes des 5 places disponibles.
La figure ci-contre indique un exemple de rangement de ces 3 voitures dans le parking.

On convient que les 3 voitures se garent, dans l'ordre d'arrivée, l'une après l'autre ; ainsi un ordre d'occupation possible correspondant à la figure est : (3, 2, 5).




Le triplet (3, 2, 5) traduit que :
la $1^{re}$ voiture occupe la place numérotée 3 ;
la $2^{e}$ voiture occupe la place numérotée 2 ;
la $3^{e}$ voiture occupe la place numérotée 5.

Deux voitures ne peuvent pas occuper la même place de parking ; donc, par exemple, le triplet (4, 1, 4) ne peut être obtenu.

- Donner d'autres ordres d'occupation possibles correspondant à la figure.
- Comment peut-on déterminer toutes les façons possibles de garer ces 3 voitures ?

**Définition**

**Soit E un ensemble à $n$ éléments et $p$ un nombre entier naturel non nul tel que : $p \leq n$.**
**On appelle arrangement de $p$ éléments de E tout $p$-uplet d'éléments de E deux à deux distincts.**

*Exemples*

- On dispose de 4 livres a, b, c et d qu'on veut ranger dans 6 tiroirs numérotés 1, 2, 3, 4, 5 et 6, de telle sorte que chaque tiroir contienne au plus un livre. Chaque rangement des 4 livres correspond à un arrangement de 4 éléments d'un ensemble à 6 éléments.
- L'installation de 5 personnes sur 8 chaises, sachant que deux personnes ne peuvent occuper la même chaise, est un arrangement de 5 éléments de l'ensemble de 8 chaises.
- Élire un bureau composé d'un président, d'un secrétaire général et d'un trésorier parmi les 20 membres d'une coopérative dont les statuts n'autorisent pas le cumul de postes, revient à réaliser un arrangement de 3 membres parmi 20.

### Propriété

Reprenons l'exemple introductif.

- À l'aide d'un arbre de choix, déterminer le nombre de façons possibles de garer 3 voitures dans un parking de 5 places.
- Retrouver ce nombre en complétant le schéma ci-dessous.

| Rangement | Première voiture | puis | Deuxième voiture | puis | Troisième voiture | Nombre de façons |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Nombre de choix possibles | 5 | × | 4 | × | … | … |

*Ce nombre est noté* $A_5^3$.

- Énoncer un problème conduisant au calcul de $A_7^4$.

Plus généralement, nous admettons la propriété suivante.

**Propriété**

**Le nombre d'arrangements de $p$ éléments d'un ensemble E à $n$ éléments, noté $A_n^p$, est tel que :**
$$A_n^p = n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1).$$

## Remarques

• *Le nombre de facteurs du produit $n(n-1)(n-2) \dots (n-p+1)$ est égal à $p$.*
*Par exemple, $A_{10}^5$ est le produit de 5 nombres entiers consécutifs dont le plus grand est 10 :*
*$A_{10}^5 = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 30\,240$.*
• Si $p > n$, il est impossible de trouver $p$ éléments deux à deux distincts dans E.

*Exemples*

• Une coopérative de 20 membres doit élire un bureau composé d'un Président, d'un Secrétaire Général et d'un Trésorier. Les statuts de la coopérative n'autorisent pas le cumul de postes. Déterminer le nombre de bureaux possibles.
Il y a autant de bureaux que d'arrangements de 3 membres pris parmi 20, c'est-à-dire $A_{20}^3$ ;
on a : $A_{20}^3 = 20 \times 19 \times 18 = 6\,840$.

• Déterminer le nombre de façons différentes de placer 5 personnes sur 8 chaises numérotées de 1 à 8, sachant que deux personnes ne peuvent occuper la même chaise.
Chaque installation des 5 personnes correspond à un arrangement de 5 éléments de l'ensemble des 8 chaises. Il y a donc $A_8^5$ façons différentes de placer les 5 personnes ;
on a : $A_8^5 = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 6\,720$.

### Notation factorielle

**Définition**

**Soit $n$ un nombre entier naturel.**
**On appelle factorielle $n$ le nombre entier $n!$ tel que :**
- **$0! = 1$ ;**
- **si $n \neq 0$, $n! = n \times (n-1) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$.**

*La notation factorielle a été inventée en 1808 par un mathématicien français presqu'oublié aujourd'hui, Christian KRAMP.*

*Exemples*

$1! = 1$ ;
$2! = 2 \times 1 = 2$.
$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$.
$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$.
$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$.

Nous admettons la propriété suivante.

**Propriété**

- **Soit $n$ et $p$ deux nombres entiers naturels non nuls tels que : $p \leq n$. On a : $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$.**
- **Par convention : $A_n^0 = 1$.**

## 2.3. Permutations

**Définition**

**Soit E un ensemble à $n$ éléments.**

**On appelle permutation de E tout arrangement des $n$ éléments de E.**

*Exemples*

• (P, F) et (F, P) sont les permutations de l'ensemble {F, P}.
• (0, 1, 2), (1, 0, 2) et (1, 2, 0) sont des permutations de l'ensemble {0, 1, 2}.

Nous admettons la propriété suivante.

**Propriété**

**Le nombre de permutations d'un ensemble à $n$ éléments est $n!$.**

***Exemples***

• À une réunion de coalition de partis politiques, 5 représentants de différents partis doivent prendre la parole un par un à la tribune.
Déterminer le nombre de façons de les inviter à prendre la parole.
Il y a autant de façons que de permutations des 5 représentants, c'est-à-dire 5! ;
on a : $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$.

• Déterminer le nombre de façons de disposer 6 drapeaux de 6 pays différents sur 6 mâts prévus à cet effet.
Il y a autant de possibilités que de permutations des 6 drapeaux, c'est-à-dire 6! ;
on a : $6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$.

## Exercices

**2.a** De combien de façons peut-on affecter 4 professeurs dans 3 lycées ?

**2.b** On appelle mot (ayant un sens ou pas) toute « suite ordonnée » de lettres d'un alphabet donné.
*a)* Combien de mots de 5 lettres peut-on former avec l'alphabet morse qui comprend 2 lettres ?
*b)* Combien de mots de 4 lettres peut-on former avec l'alphabet arabe qui comprend 28 lettres ?

**2.c** Le Premier Ministre veut distribuer quatre portefeuilles ministériels (économie, éducation, santé, agriculture) à quatre personnes parmi dix candidats potentiels.
Combien a-t-il de choix possibles ?

**2.d** Un réseau téléphonique utilise une numérotation à 8 chiffres.
*a)* Combien y a-t-il de numéros de téléphone à 8 chiffres, chaque chiffre pouvant être répété de 0 à 8 ?
*b)* Combien y a-t-il de numéros de téléphone à 8 chiffres deux à deux distincts ?

**2.e** Combien y a-t-il de façons différentes de placer 4 personnes autour d'une table ronde ?

**2.f** On appelle anagramme d'un mot toute permutation des lettres de ce mot, en vue d'obtenir un nouveau mot qui a un sens ou non. Par exemple, EBIN et BENI sont des anagrammes du mot BIEN.
Déterminer le nombre d'anagrammes du mot AFRIQUE.

# 3 Combinaisons

## 3.1. Définition et propriétés

### Définition

**Définition**

**Soit E un ensemble à $n$ éléments et $p$ un nombre entier naturel, tels que : $p \leq n$.**
**On appelle combinaison de $p$ éléments de E toute partie de E ayant $p$ éléments.**

***Exemples***

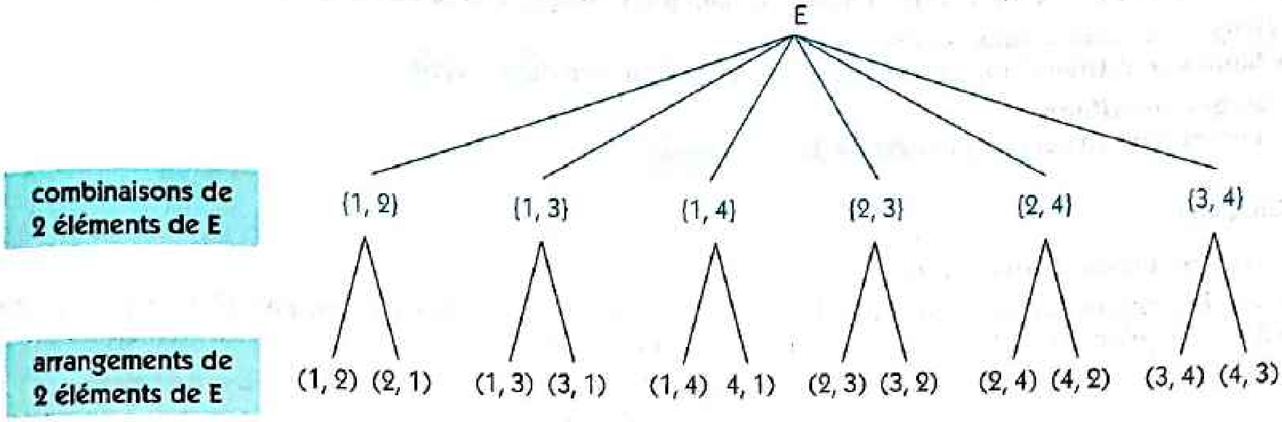
On considère cinq élèves d'une classe de première : Alassane, Bintou, Codjo, Dokan et Essoh. Désignons chaque élève par la première lettre de son nom et posons : $E = \{a, b, c, d, e\}$.

• $\{a, b\}$, $\{a, c\}$ et $\{c, d\}$ sont des combinaisons de 2 éléments de E ; elles désignent, par exemple, des groupes de travail de deux élèves que l'on peut former avec les éléments de E.

• $\{a, b, c\}$, $\{a, b, d\}$ et $\{b, c, d\}$ sont des combinaisons de 3 éléments de E ; elles désignent, par exemple, des groupes de travail de trois élèves que l'on peut former avec les éléments de E.

## Nombre de combinaisons de $p$ éléments d'un ensemble à $n$ éléments

Soit l'ensemble : $E = \{1, 2, 3, 4\}$.
On sait qu'il y a $A_4^2$ arrangements de deux éléments de E.
On se propose de construire ces arrangements à l'aide d'un arbre, en deux étapes :
- on détermine toutes les combinaisons de 2 éléments de E ;
- on détermine toutes les permutations de chacune de ces parties de E.




Chaque combinaison de 2 éléments permet de construire 2! permutations, donc 2! arrangements de 2 éléments de E.
Donc, le nombre d'arrangements de 2 éléments de E est le produit des deux nombres suivants :
- le nombre de combinaisons de 2 éléments de E ;
- le nombre de permutations de chacune de ces combinaisons.

Plus généralement, nous admettons la propriété suivante.

### Propriété

**Le nombre de combinaisons de $p$ éléments d'un ensemble à $n$ éléments, noté $C_n^p$, est tel que :**

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}.$$

### Remarques

- *Une combinaison de p éléments d'un ensemble à n éléments ne peut exister que si $p \leq n$.*
- *Il y a une seule partie à 0 élément d'un ensemble à n éléments, c'est l'ensemble vide ; donc : $C_n^0 = 1$.*
- *Il y a une seule partie à n éléments d'un ensemble E à n éléments, c'est l'ensemble E lui-même ; donc : $C_n^n = 1$.*
- *Il y a n singletons inclus dans un ensemble à n éléments ; donc : $C_n^1 = n$.*

*Exemples*

- Lors d'un examen, un candidat doit choisir 3 matières parmi les 5 suivantes : mathématiques, philosophie, biologie, anglais, français. Déterminer le nombre de façons de choisir ces 3 matières.
Chaque façon de choisir est une partie à 3 éléments de l'ensemble des 5 matières proposées, c'est-à-dire une combinaison de 3 matières choisies parmi 5.
Donc, le nombre de façons de choisir est : $C_5^3 = \frac{5!}{3! \times 2!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3! \times 2} = 10$.

- L'éclairage d'une salle de spectacles est assuré par 8 ampoules commandées chacune par un interrupteur. Déterminer le nombre de façons d'éclairer cette salle en allumant exactement 5 ampoules.
Chaque façon d'éclairer la salle est une partie à 5 éléments de l'ensemble des 8 ampoules, c'est-à-dire une combinaison de 5 ampoules choisies parmi 8.
Donc, le nombre de façons d'éclairer la salle est : $C_8^5 = \frac{8!}{5! \times 3!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5! \times 3 \times 2} = 56$.

## 3.2. Travaux dirigés

### 1. Tirages successifs, tirages simultanés

**Une urne contient 5 boules numérotées de 1 à 5. On tire 3 boules de cette urne.**
**Déterminer le nombre de résultats possibles dans chacun des cas suivants.**

***a) Tirages successifs avec remise***
**Les boules sont tirées l'une après l'autre en remettant chaque fois la boule tirée dans l'urne.**

***b) Tirages successifs sans remise***
**Les boules sont tirées l'une après l'autre sans les remettre dans l'urne.**

***c) Tirages simultanés***
**Les boules sont tirées par paquets de 3.**

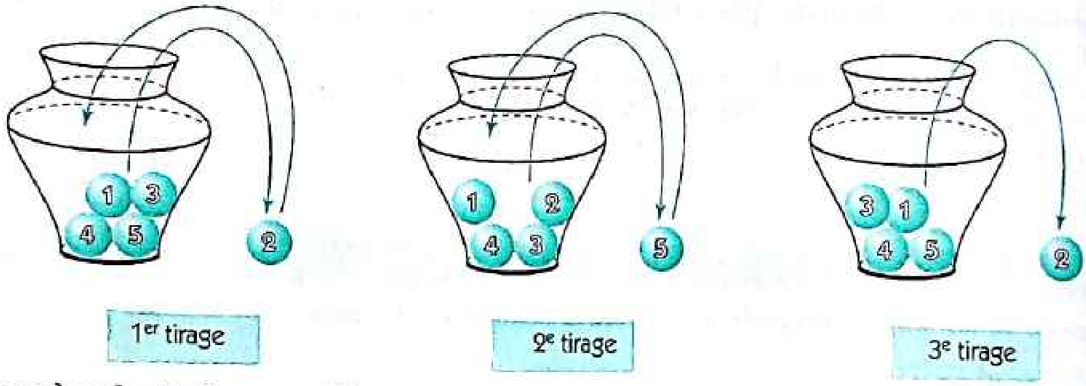
## Solution

***a) Tirages successifs avec remise***

**Les boules sont ordonnées** puisqu'on les tire l'une après l'autre ; **elles ne sont pas nécessairement distinctes** puisqu'on remet la boule tirée dans l'urne après chaque tirage.

Un résultat possible est donc un triplet d'éléments de l'ensemble : $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Par exemple, la figure ci-dessous illustre le résultat (2, 5, 2).




Donc, le nombre de résultats possibles est : $\text{card}(E^3) = 5^3 = 125$.

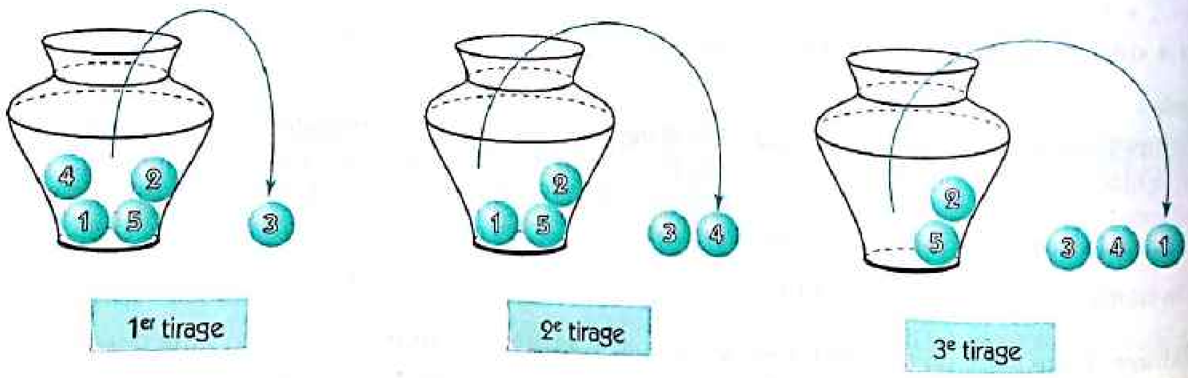
*On peut retrouver ce résultat en faisant un arbre de choix.*

***b) Tirages successifs sans remise***

**Les boules sont ordonnées** puisqu'on les tire l'une après l'autre ; **elles sont distinctes** puisqu'on ne remet pas la boule tirée dans l'urne après chaque tirage.

Un résultat possible est donc un arrangement de 3 éléments de l'ensemble E.

Par exemple, la figure ci-dessous illustre le résultat (3, 4, 1).

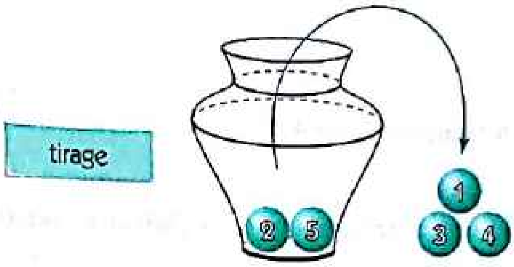



Donc, le nombre de résultats possibles est : $A_5^3 = \frac{5!}{2!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2!} = 60$.

*On peut retrouver ce résultat en faisant un arbre de choix.*

*c) Tirages simultanés*

**Les boules ne sont pas ordonnées et elles sont distinctes** puisqu'on les tire d'un coup.
Un résultat possible est donc une combinaison de 3 éléments de l'ensemble E.
Par exemple, la figure ci-dessous illustre le résultat {1, 3, 4}.




Donc, le nombre de résultats possibles est : $C_5^3 = \dfrac{5!}{3! \times 2!} = \dfrac{5 \times 4 \times 3!}{3! \times 2!} = 10.$

**M**

Pour déterminer le nombre de tirages de $p$ éléments d'un ensemble E à $n$ éléments ($p \leq n$), on peut utiliser le tableau suivant.

| Modélisation | Les $p$ éléments sont ordonnés | Les $p$ éléments sont distincts | Outil | Nombre de tirages |
|---|---|---|---|---|
| Tirages successifs avec remise | oui | non | $p$-uplet de E | $n^p$ |
| Tirages successifs sans remise | oui | oui | Arrangements de $p$ éléments de E | $A_n^p$ |
| Tirages simultanés | non | oui | Combinaisons de $p$ éléments de E | $C_n^p$ |

MBECK BIPANE LINE PAS ESP

## 2. Le Pari Mutuel Urbain (PMU)

*Dès l'Antiquité, à Rome comme aux Jeux Olympiques d'Athènes, les courses de chars à chevaux se disputaient régulièrement.*
*Le Pari Mutuel Urbain (PMU), créé en 1930 en France, connaît un énorme succès à travers le monde. Son principe est que les joueurs misent ensemble, ce qui signifie que l'argent collecté est mis en commun et redistribué aux gagnants.*

**Lors d'une course, 10 chevaux prennent le départ.**

**1°) Déterminer le nombre d'arrivées possibles, sachant qu'il n'y a pas d'ex æquo.**

**2°) *Tiercé***
**Jouer au tiercé consiste à placer parmi les chevaux choisis les 3 premiers chevaux de l'arrivée.**
**Supposons que les chevaux soient arrivés dans l'ordre 4, 7, 10, 1, 6, 5, 8, 3, 9, 2.**
**Celui qui a joué les chevaux 4, 7 et 10 a gagné le tiercé dans l'ordre ;**
**celui qui a joué les chevaux 7, 10 et 4 a gagné le tiercé dans le désordre.**
***a)* Déterminer le nombre de tiercés dans l'ordre.**
***b)* Déterminer le nombre de tiercés dans le désordre.**

**3°) *Quarté***
**Jouer au quarté consiste à placer parmi les chevaux choisis les 4 premiers chevaux de l'arrivée.**
***a)* Déterminer le nombre de quartés dans l'ordre.**
***b)* Déterminer le nombre de quartés dans le désordre.**

### Solution

**1°)** Chaque cheval peut occuper le $1^{er}$, le $2^e$, ..., le $10^e$ rang.
Le nombre d'arrivées possibles est le nombre de permutations des 10 chevaux partants, c'est-à-dire 10!.
On a : $10! = 10 \times 9 \times ... \times 2 \times 1 = 3\,628\,800$.

**2°)** *Tiercé*

*a)* Un tiercé dans l'ordre est un arrangement de 3 chevaux choisis parmi les 10 partants, c'est-à-dire $A_{10}^3$.
On a : $A_{10}^3 = \frac{10!}{7!} = 720$.

*b)* Un tiercé dans le désordre est une combinaison de 3 chevaux choisis parmi les 10 partants, c'est-à-dire $C_{10}^3$. On a : $C_{10}^3 = \frac{10!}{3! \times 7!} = 120$.

**3°)** *Quarté*

*a)* Un quarté dans l'ordre est un arrangement de 4 chevaux choisis parmi les 10 partants, c'est-à-dire $A_{10}^4$.
On a : $A_{10}^4 = \frac{10!}{6!} = 5\ 040$.

*b)* Un quarté dans le désordre est une combinaison de 4 chevaux choisis parmi les 10 partants, c'est-à-dire $C_{10}^4$. On a : $C_{10}^4 = \frac{10!}{4! \times 6!} = 210$.

## 3. Jeux de cartes

*Un jeu de cartes est composé de* ***4*** *« couleurs » : le trèfle ♣, le pique ♠, le carreau ♦, le cœur ♥.*
*Chaque couleur comprend* ***8*** *cartes dans un jeu de* ***32*** *cartes (32 = 4 × 8) ;*
***13*** *cartes dans un jeu de* ***52*** *cartes (52 = 4 × 13).*
*En outre, chaque couleur comprend* ***4*** *« figures » : l'As, le Roi, la Dame, le Valet.*

Les **4** figures de chaque couleur

**As Roi Dame Valet 10 9 8 7 6 5 4 3 2**

Les **8** cartes de chaque couleur dans un jeu de **32** cartes

Les **13** cartes de chaque couleur dans un jeu de **52** cartes

*Les cartes sont distribuées de manière équitable aux joueurs.*
*L'ensemble des cartes reçues par un joueur, après une distribution, est appelé* ***une main.***

**On considère un jeu de 32 cartes.**
**Déterminer le nombre de mains différentes de 5 cartes dans les cas suivants :**
***a)* les 5 cartes sont quelconques**
***b)* les 5 cartes sont de la même « couleur »**
***c)* il y a exactement 2 Rois parmi les 5 cartes**
***d)* il y a au moins 3 Dames parmi les 5 cartes**
***e)* il y a au plus 2 Valets parmi les 5 cartes.**

### Solution

*a)* Une main est une combinaison de 5 cartes choisies parmi les 32 cartes, c'est-à-dire $C_{32}^5$.
On a : $C_{32}^5 = \frac{32!}{5! \times 27!} = 201\ 376$.

*b)* Les 5 cartes d'une main sont choisies soit parmi les 8 piques, soit parmi les 8 cœurs, soit parmi les 8 carreaux, soit parmi les 8 trèfles ; pour chaque couleur, il y a $C_8^5$ mains.
On a : $C_8^5 = \frac{8!}{5! \times 3!} = 56$.
Le nombre total de mains est : $4 \times C_8^5 = 224$.

*c)* Pour constituer une main, on doit choisir 2 cartes parmi les 4 Rois et 3 cartes parmi les 28 autres.
Le nombre total de mains est : $C_4^2 \times C_{28}^3$.

On a : $C_4^2 = \frac{4!}{2! \times 2!} = 6$ et $C_{28}^3 = \frac{28!}{3! \times 25!} = 3\ 276$ ; donc : $C_4^2 \times C_{28}^3 = 19\ 656$.

*d)* Il y a au moins 3 Dames parmi les 5 cartes signifie qu'il y a, parmi les 5 cartes, soit exactement 3 Dames, soit exactement 4 Dames.

• Dans le premier cas, on choisit 3 Dames parmi les 4 et 2 cartes parmi les 28 autres ;
le nombre de mains est : $C_4^3 \times C_{28}^2$.

• Dans le second cas, on choisit 4 Dames parmi les 4 et 1 carte parmi les 28 autres ; le nombre de mains est : $C_4^4 \times C_{28}^1$.

• Le nombre total de mains est : $\left(C_4^3 \times C_{28}^2\right) + \left(C_4^4 \times C_{28}^1\right)$.

On a : $C_4^3 = \dfrac{4!}{3! \times 1!} = 4$ ; $C_{28}^2 = \dfrac{28!}{2! \times 26!} = 378$ ; $C_4^4 = 1$ ; $C_{28}^1 = 28$ ;

donc : $\left(C_4^3 \times C_{28}^2\right) + \left(C_4^4 \times C_{28}^1\right) = (4 \times 378) + (1 \times 28)$
$= 1\,512 + 28$
$= 1\,540.$

*e)* Il y a au plus 2 Valets parmi les 5 cartes signifie qu'il y a, parmi les 5 cartes, soit exactement 0 Valet, soit exactement 1 Valet, soit exactement 2 Valets.

• Dans le premier cas, on choisit 0 Valet parmi les 4 et 5 cartes parmi les 28 autres ; le nombre de mains est : $C_4^0 \times C_{28}^5$.

• Dans le second cas, on choisit 1 Valet parmi les 4 et 4 cartes parmi les 28 autres ; le nombre de mains est : $C_4^1 \times C_{28}^4$.

• Dans le troisième cas, on choisit 2 Valets parmi les 4 et 3 cartes parmi les 28 autres ; le nombre de mains est : $C_4^2 \times C_{28}^3$.

• Le nombre total de mains est : $\left(C_4^0 \times C_{28}^5\right) + \left(C_4^1 \times C_{28}^4\right) + \left(C_4^2 \times C_{28}^3\right)$.

On a : $C_4^0 = 1$ ; $C_{28}^5 = \dfrac{28!}{5! \times 23!} = 98\,280$ ; $C_4^1 = 4$ ; $C_{28}^4 = \dfrac{28!}{4! \times 24!} = 20\,475$ ;

$C_4^2 = \dfrac{4!}{2! \times 2!} = 6$ ; $C_{28}^3 = \dfrac{28!}{3! \times 25!} = 3\,276$ ;

donc : $\left(C_4^0 \times C_{28}^5\right) + \left(C_4^1 \times C_{28}^4\right) + \left(C_4^2 \times C_{28}^3\right) = (1 \times 98\,280) + (4 \times 20\,475) + (6 \times 3\,276)$
$= 98\,280 + 81\,900 + 19\,656$
$= 199\,836.$

**M**

Pour dénombrer un ensemble E défini à l'aide des locutions « au moins » ou « au plus », on peut procéder par disjonction des cas et faire la somme des différents résultats.

Pour dénombrer un ensemble E dont chaque élément se (dé)compose en une suite de plusieurs éléments simples par le choix de *a*, puis de *b* puis, ..., on peut déterminer le résultat de chaque choix et faire le produit des différents résultats.

# Exercices

**3.a** Combien y a-t-il de façons de choisir 3 questions au hasard parmi 9 ?

**3.b** Un passionné de lecture a emporté une douzaine de livres mais ne dispose que du temps d'en lire quatre.
*a)* Déterminer le nombre de listes différentes de livres lus.
*b)* Déterminer le nombre de listes différentes de livres non lus.

**3.c** Combien de bureaux différents de sept membres peut-on former avec dix membres d'un conseil d'administration d'une PME (petite et moyenne entreprise) ?

**3.d** Huit personnes se réunissent dans une salle. Chacune d'elles serre la main à chacune des autres au début de la réunion.
Quel est le nombre total de poignées de mains échangées ?

# Exercices

## APPRENTISSAGE

### Compléments sur les ensembles

**1** Chacun des 50 élèves d'une classe étudie l'anglais ou l'espagnol. On sait que 40 élèves étudient l'anglais et que 20 élèves étudient l'espagnol.
1. Déterminer le nombre d'élèves qui étudient les deux langues.
2. Déterminer le nombre d'élèves qui étudient uniquement l'espagnol.
3. Déterminer le nombre d'élèves qui étudient une langue et une seule.

**2** Le professeur de musique fait une enquête auprès de 150 élèves d'un lycée.
- 116 aiment la musique de variétés ;
- 52 aiment la musique traditionnelle ;
- 40 aiment la musique de variétés et la musique traditionnelle.

Combien d'élèves n'ont pas donné leur avis ?

**3** On effectue une enquête sur les goûts des consommateurs concernant les accessoires automobiles.
Sur une population de 1 000 personnes interrogées, 900 souhaitent un véhicule équipé d'une radio, 150 la climatisation et 120 ces deux équipements.
Combien de consommateurs souhaitent au moins l'un de ces deux équipements ?

**4** Un club sportif comprend 35 membres.
18 membres pratiquent le football, 16 le basket et 10 les deux sports.
1. Déterminer le nombre de membres du club pratiquant uniquement le football.
2. Déterminer le nombre de membres du club ne pratiquant aucun des deux sports.

**5** Un joueur dispose d'un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et de quatre cartes : une de cœur (♥), une de carreau (♦), une de trèfle (♣), une de pique (♠).
Le jeu consiste à lancer le dé, puis à tirer une carte au hasard. Chaque résutat du jeu est inscrit sous forme de couple. Par exemple, le couple (2 ; ♣) représente le résultat « obtenir 2 avec le dé, puis tirer la carte ♣ ».
1. Compléter le tableau suivant.

| Numéro / Carte | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ♥ | | | | | | |
| ♦ | | | | | | |
| ♣ | | | | | | |
| ♠ | | | | | | |

2. Déterminer le nombre de façons d'obtenir un nombre impair.
3. Déterminer le nombre de façons de tirer la carte ♠.
4. Déterminer le nombre de façons d'obtenir un nombre supérieur ou égal à 3 et de tirer la carte ♠.
5. Déterminer le nombre de façons d'obtenir un nombre multiple de 2 et de tirer la carte ♥ ou la carte ♦.

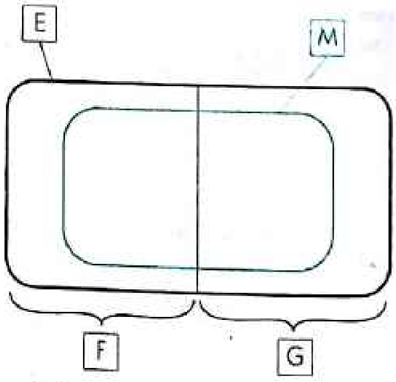
**6** La carte d'un restaurant propose au client de composer son menu. Il peut choisir entre 5 hors-d'œuvre, 4 plats de résistance et 6 desserts. Un menu comprend un hors-d'œuvre, un plat de résistance et un dessert.
Combien y a-t-il de menus différents ?

**7** Madame Ouattara a 10 foulards, 8 boubous et 6 paires de chaussures. Pour aller à la fête du village, elle veut porter un foulard, un boubou et une paire de chaussures.
De combien de façons différentes peut-elle s'habiller ?

**8** Un service d'immatriculation attribue à chaque véhicule automobile un numéro minéralogique comportant 4 chiffres suivis d'une lettre et d'un nombre de 1 à 10 correspondant à chacune des régions administratives du pays.
*Exemples* : 5018A9 ; 2647G3.
Combien de véhicules peut-on ainsi immatriculer ?

**9** Une enquête a été faite auprès d'un échantillon E d'élèves d'un lycée. On note F l'ensemble des filles, G l'ensemble des garçons et M l'ensemble des élèves (garçons et filles) sachant jouer d'un instrument de musique.
L'enquête révèle que sur 100 élèves du lycée interrogés :
- F a un effectif de 48 élèves ;
- M a un effectif de 40 élèves ;
- il y a, dans l'ensemble M, 18 élèves de l'ensemble F.

1. Compléter le diagramme ci-dessous en indiquant les effectifs des parties définies sur la figure qui n'ont pas d'éléments en commun.




2. Combien d'élèves de l'ensemble G savent jouer d'un instrument de musique ?
3. Combien d'élèves ne savent jouer d'aucun instrument ?

**10** La population d'une ville compte 48 % d'hommes et 52 % de femmes.
On sait que 5 % des hommes et 3 % des femmes sont atteints d'une maladie M.

1. Déterminer la proportion des habitants de la ville atteints de la maladie M.
2. Quelle est la proportion de femmes parmi les habitants atteints de la maladie M ?

**11 Efficacité d'un vaccin**
Un laboratoire veut tester l'efficacité d'un vaccin sur des souris. Certaines ont été vaccinées, d'autres pas. Toutes ont reçu le virus de la maladie considérée. Certaines ont développé la maladie, d'autres pas.
Voici les informations dont on dispose :
- le laboratoire a effectué cette expérience sur 160 souris au total ;
- 90 souris ont été vaccinées ;
- 121 souris ont développé la maladie et, parmi celles-ci, 63 avaient été vaccinées.

1. Reproduire et compléter le tableau suivant.

| | Souris ayant développé la maladie | Souris n'ayant pas développé la maladie | Total |
|---|---|---|---|
| Souris vaccinées | | | |
| Souris non vaccinées | | | |
| Total | | | |

2. En arrondissant chaque résultat à l'entier le plus proche, calculer le pourcentage :
*a)* de souris n'ayant pas développé la maladie
*b)* de souris non vaccinées
*c)* de souris ayant développé la maladie, parmi celles qui n'ont pas été vaccinées
*d)* de souris ayant développé la maladie, parmi celles qui ont été vaccinées.
3. Que peut-on penser de l'efficacité de ce vaccin ?

## p-uplets d'un ensemble, arrangements et permutations

**12** Déterminer le nombre de façons de composer un code de 3 symboles, sachant que le premier symbole est une lettre et que les deux derniers sont des chiffres.

**13** Le code d'ouverture d'un coffre-fort est composé de 5 chiffres à taper dans un certain ordre sur un clavier à 10 chiffres (0, 1, 2, ..., 9), chaque chiffre pouvant être répété plusieurs fois.
1. Dénombrer tous les codes possibles.
2. Dénombrer les codes ne comportant aucun chiffre pair.
3. Dénombrer les codes comportant au moins un chiffre pair.

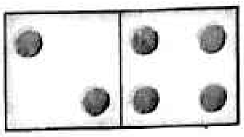
**14** Astou forme des nombres avec 5 jetons numérotés de 1 à 5.


1. Combien peut-elle former de nombres de 3 chiffres ?
2. Combien peut-elle former de nombres de 5 chiffres ne comportant que des chiffres pairs ?

**15** Une urne contient 10 boules numérotées de 1 à 10. On tire successivement 3 boules, en remettant la boule dans l'urne après chaque tirage.
Combien y a-t-il de tirages possibles ?

**16** Dans un ordinateur, les bits sont regroupés par 8 pour former des octets qui peuvent représenter des caractères.
Sachant qu'un bit peut valoir 0 ou 1, combien y a-t-il de configurations ?

**17** Un domino est un jeton plat rectangulaire dont le dessus est divisé en deux, en son milieu.



Chaque partie porte un nombre entier de points de 0 à 6, ce nombre pouvant être le même ou non sur les deux moitiés.
1. Combien y a-t-il de dominos doubles (ayant le même nombre de points sur leurs deux parties) ?
2. Quel est le nombre de dominos d'un jeu complet, sachant que tous les dominos sont distincts deux à deux ?

**18** 1. Combien y a-t-il de nombres de 3 chiffres ?
2. Combien y a-t-il de nombres de 3 chiffres commençant par 2 ?
3. Combien y a-t-il de nombres de 3 chiffres terminés par 45 ?

**19** On dispose de 5 pots de peinture jaune, rouge, verte, violette et bleue. On veut peindre 3 portes A, B et C. Les portes doivent être unicolores et de couleurs différentes entre elles.
Combien de possibilités a-t-on ?

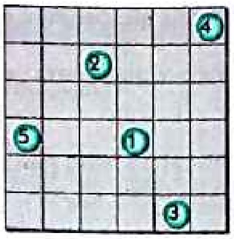
**20** Un questionnaire à choix multiples (QCM) est présenté comme l'indique le tableau ci-dessous.

| Questions | Réponses |
|---|---|
| 1. Nelson MANDELA est prix Nobel de la Paix | Vrai ☐ Faux ☐ |
| 2. Bob MARLEY était un chanteur de rap | Vrai ☐ Faux ☐ |
| ... | ... |
| 10. Léopold Sédar SENGHOR fut le premier chef d'État du Sénégal | Vrai ☐ Faux ☐ |

À chaque question, on peut répondre par **Vrai** ou par **Faux** en cochant la case correspondante.
1. Déterminer le nombre de façons de remplir ce questionnaire, sachant que chaque question reçoit une réponse.
2. Déterminer le nombre de façons de remplir ce questionnaire, sachant que certaines questions peuvent être laissées sans réponse.

**21** On dispose de quatre CD et de quatre boîtes pour les ranger. On met au hasard un CD par boîte.
Dénombrer toutes les possibilités de « rangement » des quatre CD.

**22** Un damier carré comporte 36 cases.
On place cinq jetons numérotés de 1 à 5 sur les cases du damier, à raison d'un jeton par case au maximum.




Combien de possibilités différentes a-t-on ?

**23** Huit sprinteurs luttent pour 3 médailles (or, argent, bronze). De combien de façons peut-on attribuer ces médailles ?

**24** Une coopérative agricole de 20 membres veut élire un comité de gestion comprenant un président, un secrétaire et un trésorier. Le cumul de postes étant interdit, déterminer le nombre de comités qu'on peut former.

**25** Lors du MASA (Marché des Arts et Spectacles Africains) cinq artistes doivent se produire, l'un après l'autre, au Palais de la Culture d'Abidjan.
Combien y a-t-il de façons d'organiser leur passage ?

**26** Une salle d'étude contient 10 chaises.
De combien de façons peut-on y installer 6 élèves ? 10 élèves ?

**27** On veut installer 6 personnes sur 6 chaises.
**1.** Combien y a-t-il de possibilités ?
**2.** Déterminer le nombre de possibilités dans les cas suivants.
*a)* la première chaise est réservée
*b)* les deux dernières chaises sont réservées
*c)* deux chaises sont réservées
*d)* Françoise et Yves ne veulent pas s'asseoir côte à côte.

**28** Marie-Ange forme des nombres avec 6 jetons numérotés de 1 à 6.

4 1 6 5 2 3

**1.** Combien peut-elle former de nombres de 4 chiffres distincts ?
**2.** Combien peut-elle former de nombres de 6 chiffres distincts ?

**29** On veut former des mots de 5 lettres distinctes avec les lettres A, V, I, O et N.
*Exemple :* AVION, NOVIA.
**1.** Combien y a-t-il de possibilités ?
**2.** Combien y a-t-il de possibilités si les lettres V et N ne sont pas voisines ?

**30** Une agence de voyages propose aux touristes une formule de voyage dénommée ***l'Afrique en 8 jours***. Elle consiste à visiter 4 capitales africaines en passant deux jours dans chacune d'elles.
**1.** Les touristes doivent choisir parmi les capitales suivantes : Abuja, Pretoria, Rabat et Bamako.
Combien y a-t-il d'itinéraires possibles ?
**2.** L'agence ajoute deux nouvelles capitales, à savoir Ouagadougou et Lomé.
Combien y a-t-il alors d'itinéraires possibles ?

## Combinaisons

**31** Une classe de première comprend 20 filles et 15 garçons. Pour participer au concours ***Génie en herbe*** du lycée, on veut former une équipe de 5 élèves.
**1.** Combien d'équipes peut-on former ?
**2.** Déterminer le nombre d'équipes comportant :
*a)* exactement 3 filles
*b)* aucun garçon
*c)* au moins un garçon.

**32** Un jury est composé de 5 membres choisis dans une liste de 20 personnes dont 12 hommes.
Combien peut-on former de jurys comprenant :
*a)* seulement des femmes ?
*b)* 3 hommes et 2 femmes ?
*c)* au plus 2 hommes ?

**33** Une urne contient 6 boules rouges et 4 boules blanches. On tire simultanément 2 boules de l'urne.
**1.** Combien y a-t-il de tirages possibles ?
**2.** Combien y a-t-il de tirages, sachant que les boules tirées sont de même couleur ?
**3.** Combien y a-t-il de tirages, sachant que les boules tirées sont de couleurs différentes ?

**34** Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher dont 3 noires, 2 blanches et 5 rouges. On tire simultanément 3 boules dans l'urne.
**1.** Déterminer le nombre de tirages possibles.
**2.** Déterminer le nombre de tirages comportant exactement 2 boules noires.
**3.** Déterminer le nombre de tirages comportant une boule de chaque couleur.
**4.** Déterminer le nombre de tirages comportant au moins 2 boules rouges.

**35** Une boîte contient 40 transistors indiscernables dont 5 sont défectueux. On tire simultanément 3 transistors dans la boîte.
**1.** Déterminer le nombre de tirages possibles.
**2.** Déterminer le nombre de tirages comportant exactement 1 transistor défectueux.
**3.** Déterminer le nombre de tirages comportant au moins 2 transistors défectueux.

**36** On marque, dans un plan, 5 points tels que 3 d'entre eux ne soient pas alignés.
**1.** Combien ces points déterminent-ils de droites ?
**2.** Combien ces points déterminent-ils de triangles ?
**3.** Combien ces points déterminent-ils de pentagones ?

**37** Un magazine propose, pour un sondage, une liste de 8 chanteurs, numérotés de 1 à 8. On demande au lecteur d'entourer les noms de ses 3 chanteurs préférés.
**1.** Combien y a-t-il de choix possibles ?
**2.** Combien y a-t-il de choix comportant le chanteur numéro 2 ?

3. Combien y a-t-il de choix ne comportant que des numéros impairs ?

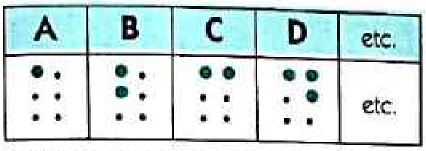
## APPROFONDISSEMENT

**38** **L'écriture MORSE**

L'Américain MORSE (1791-1872) a inventé un système d'écriture utilisé en télégraphie. Chaque caractère est représenté par une suite de 1, 2, 3, 4 ou 5 signaux longs (**traits**) ou courts (**points**) comme indiqué ci-après.
A : •– ; B : –••• ; etc.
Combien peut-on représenter de caractères avec ce système d'écriture ?

**39** **L'écriture BRAILLE**

Le Français Louis BRAILLE (1809-1852) a inventé un système d'écriture en relief à l'usage des aveugles. Chaque caractère est représenté sur une matrice de 6 points dont certains sont en relief, comme l'indique la figure ci-dessous.




On ne considère pas comme un caractère l'absence de relief.
Combien peut-on représenter de caractères avec ce système d'écriture ?

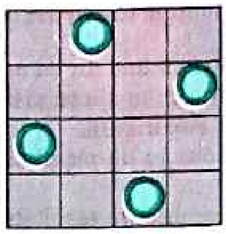
**40** **Jeu du loto**

Jouer au loto consiste à cocher une combinaison de 6 cases sur une grille en comportant $7 \times 7$, en espérant qu'elle coïncidera avec la combinaison gagnante qui sera désignée par hasard.
1. Déterminer le nombre de jeux distincts possibles.
2. Déterminer le nombre de jeux distincts ne comportant aucun bon numéro.
3. Déterminer le nombre de jeux distincts comportant au moins un bon numéro.
4. Déterminer le nombre de jeux distincts comportant exactement 4 bons numéros.
5. Déterminer le nombre de jeux distincts comportant au plus 3 bons numéros.

**41** Une association de 10 personnes, dont 6 femmes, doit élire un bureau de 3 personnes comportant un président, un secrétaire et un trésorier.
1. Combien de bureaux différents peut-on constituer ?
2. Combien y en a-t-il, sachant que le poste de trésorier doit être occupé par une femme ?
3. Combien y en a-t-il, sachant que le poste de trésorier doit être occupé par une femme et celui de président par un homme ?

**42** Dans une colonie de vacances, il y a 11 filles, 9 garçons et 4 moniteurs. Cette colonie dispose d'un minibus de 12 places pour ses excursions.
Les excursions sans moniteurs sont interdites.
1. Quel est le nombre de remplissages possibles du minibus ?
2. Déterminer le nombre de remplissages du minibus dans les cas suivants :
*a)* un seul moniteur doit servir d'accompagnateur ;
*b)* deux moniteurs désirent rester ensemble.

**43** On dispose d'un damier carré de 16 cases. On place 4 jetons indiscernables sur les cases du damier, à raison d'un jeton par case au maximum.



1. Combien de dispositions des 4 jetons y a-t-il sur le damier ?
2. Déterminer le nombre de dispositions des jetons dans les cas suivants :
*a)* il y a un jeton sur chaque ligne
*b)* il y a deux jetons sur une ligne et un jeton sur deux autres lignes
*c)* il y a deux jetons sur une ligne et deux jetons sur une autre ligne
*d)* il y a trois jetons sur une ligne et un jeton sur une autre ligne
*e)* il y a quatre jetons sur une ligne
*f)* il y a un jeton sur chaque ligne et sur chaque colonne.

**44** On dispose de 7 cartons sur lesquels on a écrit respectivement les lettres A, B, C, D, E, F et G.
À l'aide de ces cartons, on veut écrire des mots.
1. Déterminer le nombre de mots de sept lettres que l'on peut écrire.
2. Déterminer le nombre de mots de quatre lettres que l'on peut écrire.
3. Déterminer le nombre de mots de quatre lettres comportant dans l'ordre, une consonne, une voyelle, une consonne, une consonne.
4. Déterminer le nombre de mots de quatre lettres comportant trois consonnes et une voyelle.

**45** Un sac contient 5 jetons portant respectivement les lettres a, i, u, f et g. On tire successivement les 5 lettres et on les aligne pour former un mot.
1. Déterminer le nombre de mots finissant par une consonne.
2. Déterminer le nombre de mots commençant par une voyelle.
3. Déterminer le nombre de mots dont la première et la dernière lettre sont des voyelles.
4. Déterminer le nombre de mots dont la première et la dernière lettre sont des consonnes.

**46** De combien de façons peut-on former un comité de trois femmes et de quatre hommes dans un groupe de huit femmes et de sept hommes si monsieur et madame N'Guetta refusent de siéger ensemble ?

**47** Un touriste désire visiter Abidjan, Bamako, Cotonou et Dakar.
Dénombrer les trajets possibles dans les cas suivants.
*a)* l'ordre de visite n'a pas d'importance
*b)* le touriste veut d'abord visiter Abidjan
*c)* le touriste veut visiter Bamako avant Cotonou.

**48** La tirelire de Yazid contient 4 pièces de 100 F, 3 pièces de 10 F et 2 pièces de 5 F. On tire simultanément de la tirelire 3 pièces.

**1.** Combien y a-t-il de tirages possibles ?

**2.** Déterminer le nombre de tirages dans les cas suivants :

*a)* on obtient une somme supérieure ou égale à 200 F

*b)* on obtient une somme inférieure à 200 F.

**49** On lance trois fois un dé à six faces numérotées de 1 à 6 et l'on note successivement les chiffres obtenus sur la face supérieure.

**1.** Déterminer le nombre de résultats comportant trois chiffres identiques.

**2.** Déterminer le nombre de résultats comportant trois chiffres distincts.

**3.** Déterminer le nombre de résultats comportant exactement deux chiffres identiques.

**4.** Déterminer le nombre de résultats pour lesquels la somme des chiffres obtenus est égale à 6.

**50** On dispose de trois dés à six faces numérotées de 1 à 6.

On lance simultanément les trois dés et l'on note les chiffres obtenus sur les faces supérieures.

**1.** Déterminer le nombre de résultats possibles.

**2.** Déterminer le nombre de résultats comportant trois chiffres identiques.

**3.** Déterminer le nombre de résultats comportant trois chiffres distincts.

**4.** Déterminer le nombre de résultats ne comportant aucun 6.

**5.** Déterminer le nombre de résultats comportant au moins un 6.

**6.** Déterminer le nombre de résultats comportant exactement deux 6.

**51** On dispose de trois dés identiques constitués chacun de la façon suivante : trois faces portent le chiffre 1, deux faces portent le chiffre 2 et une face porte le chiffre 3.

On lance simultanément les trois dés et l'on note les chiffres obtenus sur les faces supérieures.

**1.** De combien de façons peut-on obtenir le nombre 333 ?

**2.** De combien de façons peut-on obtenir le nombre 123 ?

**3.** Déterminer le nombre de résultats pour lesquels la somme des chiffres obtenus est égale à 3.

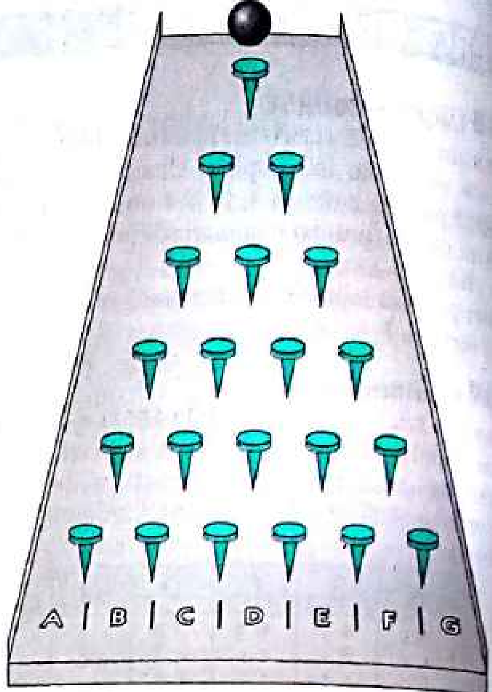
**52** **La planche de Galton**

La figure ci-après représente une planche sur laquelle des clous sont plantés sur plusieurs rangées.

Dans cet exercice, nous prenons 6 rangées de clous.

La planche est tenue verticalement, ou inclinée, et on lance une bille depuis le sommet, bien dans l'axe médian. La bille commence par heurter le premier clou ; elle rebondit et redescend sur la droite ou sur la gauche. Elle heurte ensuite le clou de la deuxième ligne situé du côté où elle est redescendue. Elle rebondit dessus et elle descend à nouveau sur la droite ou sur la gauche. Elle heurte alors un nouveau clou. La bille continue ainsi sa route jusqu'au bas de la planche.

Déterminer le nombre de trajets qui conduisent à chacune des lettres A, B, C, D, E, F et G.




**53** On construit une phrase au hasard avec un sujet, un verbe et un complément.

• Le sujet est choisi au hasard parmi : *le chat, le bébé.*

• Le verbe est choisi au hasard parmi : *dort, mange, joue.*

• Le complément est choisi au hasard parmi : *sur mes genoux, sur le canapé, dans la cuisine.*

**1.** *a)* Combien peut-on former de phrases différentes ?

*b)* Combien de phrases ont-elles pour sujet *le chat* ?

**2.** Dans chaque cas, combien y a-t-il de phrases vérifiant la condition :

*a)* la phrase a pour sujet *le bébé* et pour complément *sur mes genoux* ?

*b)* la phrase ne contient ni le sujet *le bébé* ni le complément *sur mes genoux* ?

*c)* la phrase contient soit le verbe *joue*, soit le complément *sur le canapé*, soit les deux ?

**54** L'agence de sécurité Djiguiya dispose de 12 vigiles dont 5 femmes.

**1.** De combien de façons différentes peut-on former une équipe de 4 vigiles ?

**2.** Les 12 vigiles sont répartis en trois équipes de quatre personnes.

*a)* De combien de façons différentes peut-on former les 3 équipes ?

*b)* De combien de façons différentes peut-on former les 3 équipes, telles que dans chacune d'elles figure au moins une femme ?

4

# Dérivation

## Introduction

**N**EWTON (XVII$^e$ siècle) fut, avec LEIBNIZ, l'un des fondateurs du calcul infinitésimal. Dans sa Méthode des fluxions et des suites infinies, il s'appuie sur un point de vue cinématique : il considère les quantités mathématiques comme les espaces décrits par un corps en mouvement et imagine les vitesses des mouvements qui les engendrent.



Newton



Leibniz

## SOMMAIRE

*Dans ce chapitre, les fonctions étudiées sont des fonctions numériques à variables réelles et le plan est muni du repère (O, I, J).*

# 1 Compléments sur les droites

Le plan est muni du repère (O, I, J).

## 1.1. Vecteurs directeurs d'une droite

### Vecteurs directeurs et équations d'une droite

Les propriétés suivantes ont étés vues en classe de troisième.

**Propriétés**

- **Toute droite de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ a une équation du type : $ax + by + c = 0$.**
- **Toute équation du type $ax + by + c = 0$, avec $(a\ ;\ b) \neq (0\ ;\ 0)$, est une équation d'une droite de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$.**

***Exemples***

- Déterminer une équation de la droite $(\mathscr{D})$ passant par le point A(1 ; 1) et ayant pour vecteur directeur le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$.

$(\mathscr{D})$ a une équation du type : $2x - 3y + c = 0$.
$A \in (\mathscr{D})$ *équivaut à* $2 - 3 + c = 0$ ; donc : $c = 1$.
$(\mathscr{D})$ a pour équation : $2x - 3y + 1 = 0$.

- Déterminer un vecteur directeur et un point de la droite $(\Delta)$ d'équation : $x + 2y - 4 = 0$.

Le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $(\Delta)$.

Le point B(0 ; 2) appartient à $(\Delta)$.

### Construction d'une droite définie par un point et un vecteur directeur

Reprenons les exemples précédents ; construisons :

– la droite $(\mathscr{D})$ passant par A(1 ; 1) et ayant pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ ;

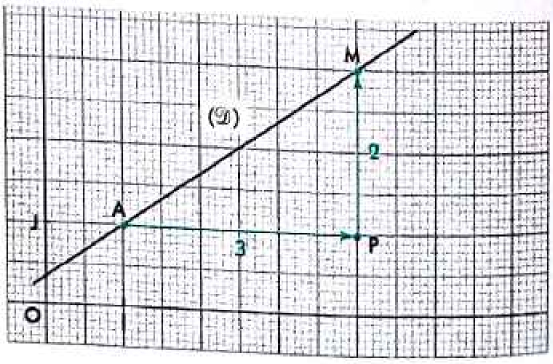
– la droite $(\Delta)$ passant par B(0 ; 2) et ayant pour vecteur directeur $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$.

***Construction de $(\mathscr{D})$***

- On place le point A(1 ; 1) ;
- on place les points P et M tels que :

$$\overrightarrow{AP} = 3\overrightarrow{OI} \text{ et } \overrightarrow{PM} = 2\overrightarrow{OJ}.$$

On a : $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PM}$ ;
$(\mathscr{D}) = (AM)$.



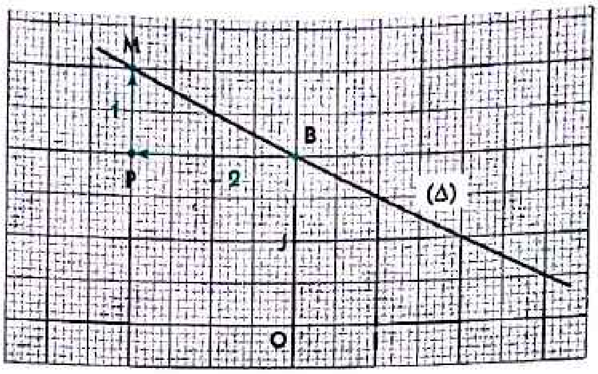
*Construction de* $(\Delta)$

- On place le point $B(0\ ;\ 2)$ ;
- on place les points P et M tels que :

$$\overrightarrow{BP} = -2\overrightarrow{OI} \text{ et } \overrightarrow{PM} = \overrightarrow{OJ}.$$

On a : $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{PM}$ ;

$(\Delta) = (BM)$.




## 1.2. Coefficient directeur d'une droite

### Droite définie par une équation

- Dans chacun des cas suivants, écrire l'équation de la droite $(\mathscr{D})$ sous l'une des formes suivantes :

$$x = k \quad \text{ou} \quad y = mx + p.$$

L'équation obtenue est l'**équation réduite** de $(\mathscr{D})$.

*a)* $(\mathscr{D}) : x - 2y + 3 = 0$ *b)* $(\mathscr{D}) : 4 + 6y = 0$ *c)* $(\mathscr{D}) : \frac{x}{2} + \frac{y}{3} - 1 = 0$

*d)* $(\mathscr{D}) : 5x + 2y = 0$ *e)* $(\mathscr{D}) : 6x - 3y - 1 = 0$ *f)* $(\mathscr{D}) : 2x + 5 = 0$.

- Déterminer, lorsqu'il existe, le coefficient directeur de la droite $(\mathscr{D})$.

**M** Pour déterminer le coefficient directeur d'une droite $(\mathscr{D})$, on peut :
- écrire son équation réduite ;
- conclure, selon l'un des cas suivants :
  - si l'équation réduite est du type $x = k$, alors $(\mathscr{D})$ n'a pas de coefficient directeur ;
  - si l'équation réduite est du type $y = mx + p$, alors $(\mathscr{D})$ a pour coefficient directeur $m$.

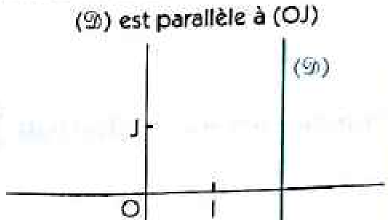
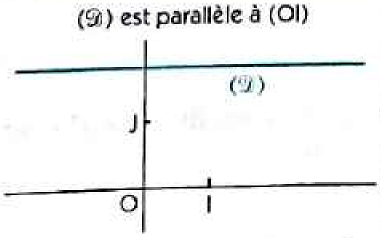
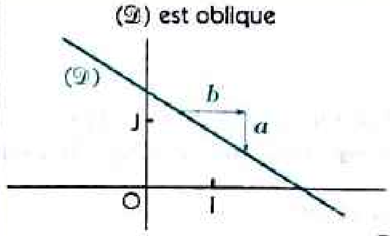
**Remarques**

- *Une droite parallèle à (OJ) n'a pas de coefficient directeur.*
- *Toute droite parallèle à (OI) a pour coefficient directeur 0.*
- *Si* $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\ a\end{pmatrix}$ *est un vecteur directeur d'une droite* $(\mathscr{D})$ *non parallèle à (OJ), alors* $(\mathscr{D})$ *a pour coefficient directeur* $\frac{a}{-b}$.

*En effet,* $(\mathscr{D})$ *a une équation du type :* $ax + by + c = 0$, *avec* $b \neq 0$ ; *donc :* $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$.

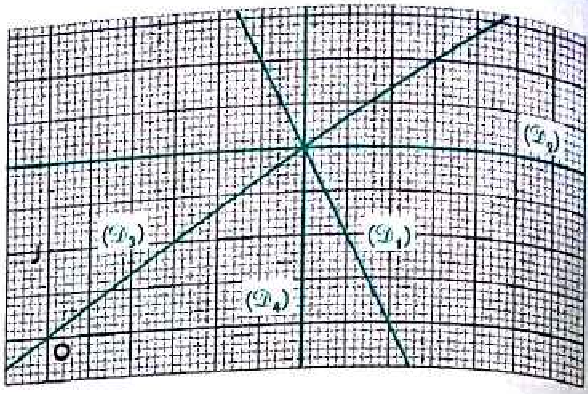
### Droite définie par une représentation graphique

**M** Pour déterminer le coefficient directeur d'une droite dont on connaît une représentation graphique, on peut utiliser le tableau suivant.

| $(\mathscr{D})$ est parallèle à (OJ) | $(\mathscr{D})$ est parallèle à (OI) | $(\mathscr{D})$ est oblique |
|---|---|---|
|  |  |  |
| $(\mathscr{D})$ n'a pas de coefficient directeur | $(\mathscr{D})$ a pour coefficient directeur 0 | $(\mathscr{D})$ a pour coefficient directeur $m = \frac{a}{b}$ |

*Exemples*

Déterminer graphiquement le coefficient directeur des droites $(\mathscr{D}_1)$, $(\mathscr{D}_2)$, $(\mathscr{D}_3)$ et $(\mathscr{D}_4)$ représentées ci-contre.




$(\mathscr{D}_1)$ a pour coefficient directeur $-2$ ;
$(\mathscr{D}_2)$ a pour coefficient directeur $0$ ;
$(\mathscr{D}_3)$ a pour coefficient directeur $\frac{2}{3}$ ;
$(\mathscr{D}_4)$ n'a pas de coefficient directeur.

## Droite définie par deux points

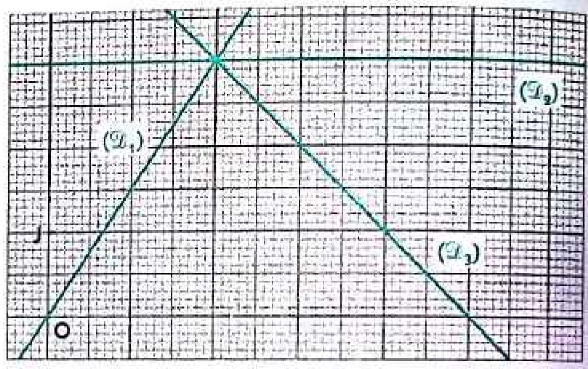
La propriété suivante a été démontrée en classe de troisième.

### Propriété

**Le plan est muni du repère (O, I, J).**
**Soit les points $A(x_A\,;\,y_A)$ et $B(x_B\,;\,y_B)$.**
**Si la droite (AB) est non parallèle à (OJ), alors son coefficient directeur est : $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.**

*Exemples*

Sur la figure ci-contre, les droites $(\mathscr{D}_1)$, $(\mathscr{D}_2)$ et $(\mathscr{D}_3)$ ont pour coefficients directeurs respectifs :




$m_1 = \dfrac{3-0}{2-0} = \dfrac{3}{2}$ ;

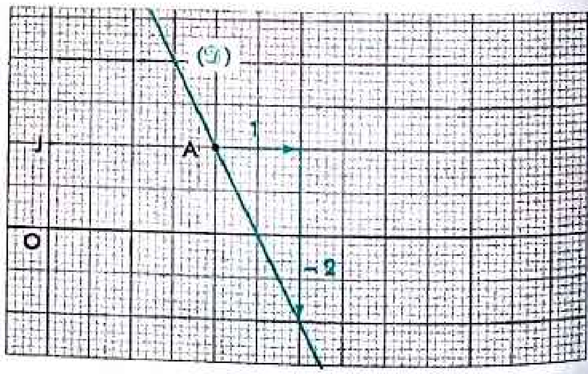
$m_2 = 0$ ;

$m_3 = \dfrac{0-3}{5-2} = -1.$

## Détermination d'une droite définie par un point et le coefficient directeur

**1. Construire la droite $(\mathscr{D})$ passant par le point A(2 ; 1) et ayant pour coefficient directeur $-2$.**
**Déterminer une équation de cette droite.**

### Solution




- Le coefficient directeur de $(\mathscr{D})$ est : $m = \dfrac{-2}{1}$.

On en déduit, ci-contre, une construction de $(\mathscr{D})$.

- L'équation réduite de $(\mathscr{D})$ est du type : $y = -2x + p$.

On a : $A \in (\mathscr{D})$ *équivaut à* $1 = -4 + p$.
Donc : $p = 5$ et $y = -2x + 5$.

**2. Construire la droite $(\Delta)$ passant par le point B(– 2 ; – 2) et ayant pour coefficient directeur $\frac{3}{4}$.**
**Déterminer une équation de cette droite.**

### Solution

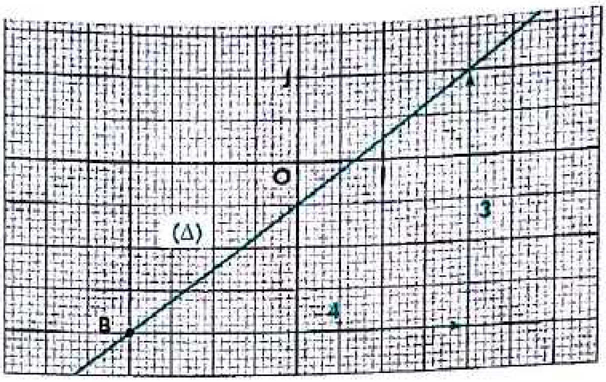
- Le coefficient directeur de $(\Delta)$ est : $m = \dfrac{3}{4}$.

On en déduit, ci-contre, une construction de $(\Delta)$.

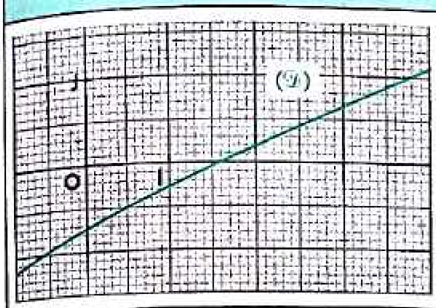
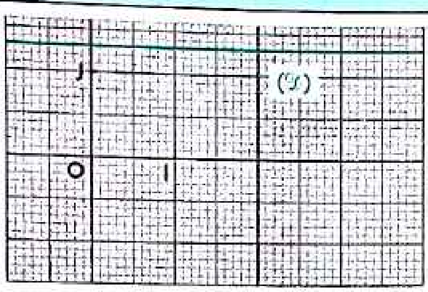
• L'équation réduite de $(\Delta)$ est du type : $y = \frac{3}{4}x + p$.

On a : $B \in (\Delta)$ *équivaut à* $-2 = -\frac{3}{2} + p$.

Donc : $p = \frac{3}{2} - 2 = -\frac{1}{2}$ et $y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$.




## Coefficient directeur et inclinaison de la droite

| Le coefficient directeur de $(\mathscr{D})$ est positif. | Le coefficient directeur de $(\mathscr{D})$ est nul. | Le coefficient directeur de $(\mathscr{D})$ est négatif. |
|---|---|---|
|  |  |  |
| La droite « monte ». | La droite est « horizontale ». | La droite « descend » |

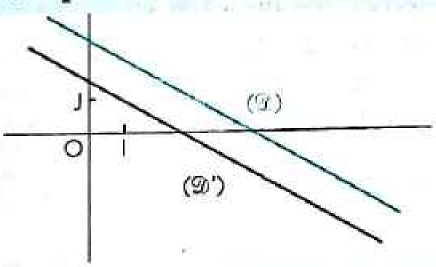
## Positions relatives de deux droites

Nous avons vu les propriétés suivantes en classe de troisième.

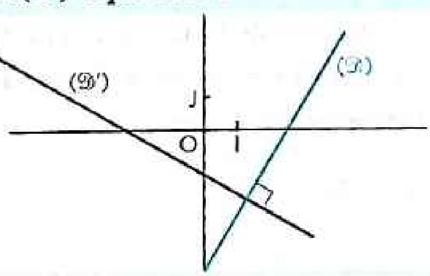
### Propriétés

**Soit $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ deux droites de coefficients directeurs respectifs $m$ et $m'$. On a :**

• $(\mathscr{D}) \,/\!/\, (\mathscr{D}')$ ***équivaut à*** $m' = m$.




• $(\mathscr{D}) \perp (\mathscr{D}')$ ***équivaut à*** $m'm = -1$.




*Exemples*

Sur la figure ci-contre, $(\Delta)$ est la droite d'équation $y = -2x + 3$.

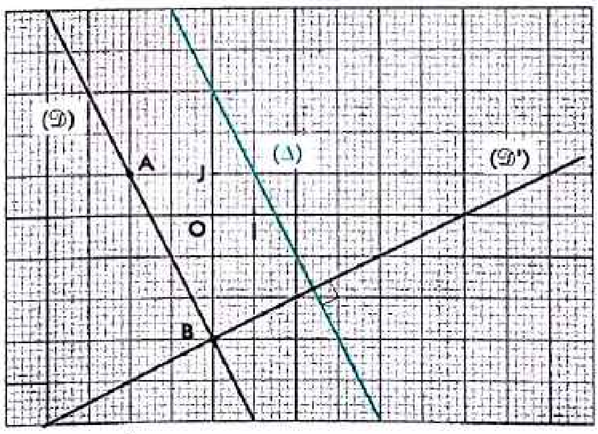
• Déterminer l'équation réduite de $(\mathscr{D})$, la droite parallèle à $(\Delta)$ et passant par le point $A(-2\,;\,1)$.

L'équation réduite de $(\mathscr{D})$ est du type : $y = -2x + p$.

On a : $A \in (\mathscr{D})$ *équivaut à* $1 = 4 + p$.

Donc : $p = -3$ et $y = -2x - 3$.

• Déterminer l'équation réduite de $(\mathscr{D}')$, la droite perpendiculaire à $(\Delta)$ et passant par le point $B(0\,;\,-3)$.



L'équation réduite de $(\mathcal{D}')$ est du type : $y = \frac{1}{2}x + p$.

On a : $B \in (\mathcal{D}')$ *équivaut à* $-3 = p$.

Donc : $y = \frac{1}{2}x - 3$

• On vérifie que les droites $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ se coupent en B.

# Exercices

**1.a** Pour chacune des droites suivantes, donner :
– le coefficient directeur, lorsqu'il existe ;
– un vecteur directeur.

$(\mathcal{D}_1) : 2x - 3 = 0$ $\qquad (\mathcal{D}_2) : y + 1 = -7$

$(\mathcal{D}_3) : 4x - 2y = 5$ $\qquad (\mathcal{D}_4) : \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = -1.$

**1.b** Une droite $(\mathcal{D})$ a pour vecteur directeur $\vec{u}$.
Déterminer son coefficient directeur dans chacun des cas suivants.

*a)* $\vec{u}\binom{-2}{6}$ $\qquad$ *b)* $\vec{u}\binom{4}{2}$

*c)* $\vec{u}\binom{-4}{0}$ $\qquad$ *d)* $\vec{u}\binom{15}{10}$

*e)* $\vec{u}\binom{-1}{3}$ $\qquad$ *f)* $\vec{u}\binom{7}{0}$.

**1.c** Déterminer le coefficient directeur de la droite (AB) dans chacun des cas suivants.

*a)* $A(0 ; -4)$ et $B(-5 ; 1)$

*b)* $A(1 ; 1)$ et $B(2 ; 3)$

*c)* $A(-1 ; 6)$ et $B(0 ; 6)$

*d)* $A(3 ; -1)$ et $B(5 ; 2)$.

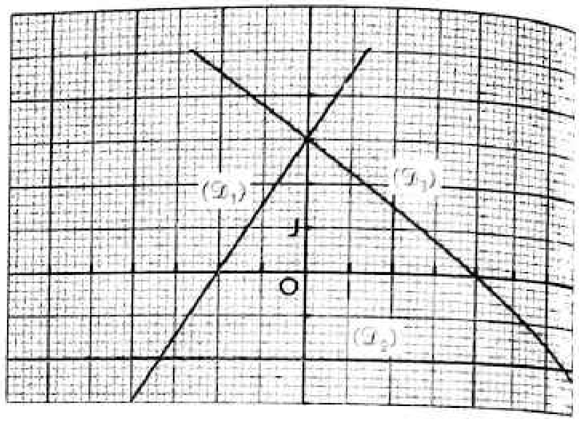
**1.d** *a)* Construire la droite $(\mathcal{D})$ passant par le point $A(-2 ; 1)$ et ayant pour vecteur directeur $\vec{u}\binom{-4}{3}$.

*b)* Déterminer une équation de cette droite.

**1.e** *a)* Construire la droite $(\mathcal{D})$ passant par le point $A(2 ; -2)$ et ayant pour coefficient directeur $-\frac{3}{2}$.

*b)* Déterminer une équation de cette droite.

**1.f** En utilisant le graphique, donner le signe du coefficient directeur de chacune des droites $(\mathcal{D}_1)$, $(\mathcal{D}_2)$ et $(\mathcal{D}_3)$ de la figure ci-dessous.




**1.g** Étudier la position relative des droites $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ dans chacun des cas suivants.

*a)* $(\mathcal{D}) : y = -2x + 3$ et $(\mathcal{D}') : y = 0{,}5x - 1$

*b)* $(\mathcal{D}) : y = x - 1$ et $(\mathcal{D}') : y = 2x + 4$

*c)* $(\mathcal{D}) : y = 40x - 100$ et $(\mathcal{D}') : y = 40x$

*d)* $(\mathcal{D}) : 3x + 2y = 1$ et $(\mathcal{D}') : 9x + 6y + 2 = 0$

*e)* $(\mathcal{D}) : y - 4{,}5 = 0$ et $(\mathcal{D}') : x + y = 0$

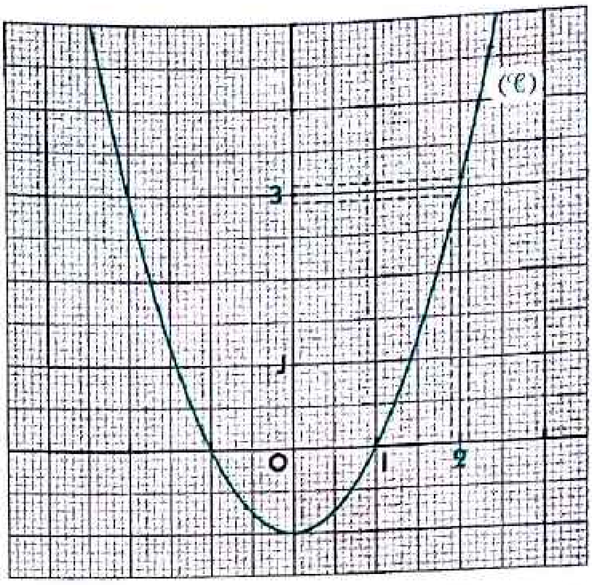
*f)* $(\mathcal{D}) : 4x - 3y = 0$ et $(\mathcal{D}') : 3x + 4y - 4 = 0$.

# 2 Notion de limite

La courbe $(\mathscr{C})$ ci-contre est la représentation graphique de la fonction $f : x \mapsto x^2 - 1$.

- À l'aide de la calculatrice, compléter le tableau suivant.

| $x$ | 1,99 | 1,999 | 2 | 2,001 | 2,01 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | | |




- On constate que $f(x)$ prend des valeurs de plus en plus proches de 3 lorsque $x$ se rapproche de 2.

On dit que : « $f(x)$ tend vers 3, lorsque $x$ tend vers 2 » ou encore : « la fonction $f$ a pour limite 3 en 2 ».

On écrit : $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 3$.

Plus généralement nous admettons la propriété suivante.

## Propriété

**Soit $f$ une fonction définie en $x_0$.**
**Si $f$ admet une limite en $x_0$, alors : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.**

## Remarque

*Lorsqu'une fonction admet une limite en $x_0$, cette limite est unique.*

### Exemples

- $\lim\limits_{x \to 1} (-x^2 + 4x - 1) = -1 + 4 - 1 = 2.$
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x + 1}{x - 4} = \dfrac{3 \times 0 + 1}{0 - 4} = -\dfrac{1}{4}.$

$\lim\limits_{x \to 1} (-x^2 + 4x - 1) = -(1)^2 + 4(1) - 1 = -1 + 4 - 1 = 2$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x + 1}{x - 4} = \dfrac{3(0) + 1}{0 - 4} = \dfrac{1}{-4}$

# Exercices

**2.a** Dans chacun des cas suivants, calculer la limite de la fonction $f$ en $x_0$.

a) $f(x) = -4x^2 + x$, $x_0 = -1$

b) $f(x) = x^2 - 3$, $x_0 = 2$.

a) $f(x) = -4x^2 + x$

$\lim\limits_{x \to -1} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} -4(-1)^2 + (-1) = -4 - 1 = -5$

b) $f(x) = x^2 - 3$

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} (2)^2 - 3 = 4 - 3 = 1$

a) $f(x) = \dfrac{3x}{x+1}$

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3(1)}{1+1} = \dfrac{3}{1} = 3$

**2.b** Dans chacun des cas suivants, calculer la limite de la fonction $f$ en $x_0$.

a) $f(x) = \dfrac{3x}{x + 1}$, $x_0 = 1$

b) $f(x) = \dfrac{2x - 5}{4x + 1}$, $x_0 = 0$.

b) $f(x) = \dfrac{2x - 5}{4x + 1}$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2(0) - 5}{4(0) + 1}$

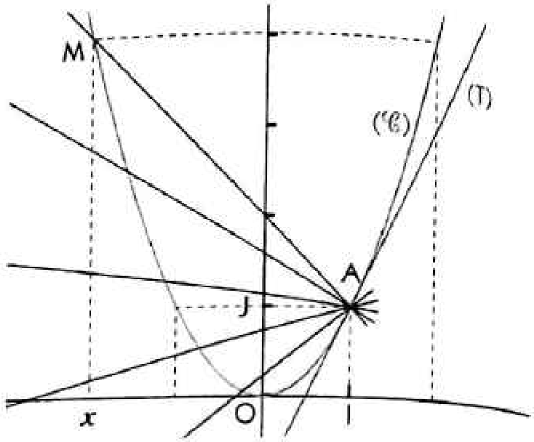
$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-5}{1} = -5$

# 3 Dérivation en $x_0$

Le plan est muni du repère (O, I, J).

## 3.1. Tangente à une courbe

### Présentation

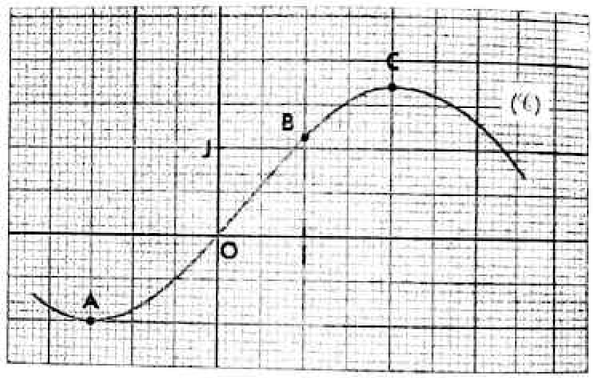



La courbe (𝒞) ci-contre est la représentation graphique de la fonction $f : x \mapsto x^2$.
A est le point de (𝒞) d'abscisse 1 ;
M est un point de (𝒞) d'abscisse $x$ différente de 1.
On déplace le point M vers le point A, le long de la courbe (𝒞).
À chaque nouvelle position de M, on trace la droite (AM).
Le point M se rapproche le plus près possible du point A sans se confondre avec lui. La droite (AM) atteint alors une position limite (T).
La droite (T) est appelée la **tangente** en A à (𝒞).

On dit que :

la tangente en A à une courbe (𝒞) est la droite qui « approche le mieux » la courbe pour des points proches de A.

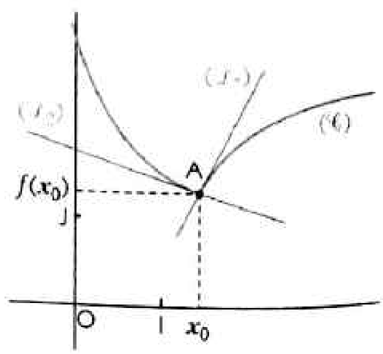
*Exemples*




- Tracer, de façon approximative, les tangentes à la courbe (𝒞) ci-contre aux points A, B et C.
- Que peut-on dire des tangentes en A et en C ?

## Remarques

- *Au « voisinage » du point A, la courbe (𝒞) et la tangente (T) n'ont en commun que le point A. Par contre, si on s'éloigne de A, (T) peut couper (𝒞) en un autre point.*
*On dit que la notion de tangente est une notion locale.*




- *Soit la courbe (𝒞) ci-contre, et le point A de (𝒞) d'abscisse $x_0$.*
*La droite (AM) atteint les positions limites ($\mathcal{D}_1$) ou ($\mathcal{D}_2$) selon que le point M décrit la partie de (𝒞) située à droite ou à gauche du point A.*
*On dit que la courbe (𝒞) n'admet pas de tangente en A.*
*Le point A est dit « **point anguleux** ».*

### Nombre dérivé

Reprenons l'exemple précédent et posons : pour tout nombre réel $x$ distinct de 1, $m(x) = \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.

- Que représente $m(x)$ pour la droite (AM) ?
- Simplifier l'expression de $m(x)$.

- Lorsque $x$ se rapproche de 1, quelle valeur limite $\ell$ l'expression $m(x)$ atteint-elle ?
- Que représente le nombre $\ell$ pour la droite (T) ?

## Définitions

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle ouvert K et $x_0$ un élément de K.
- On dit que $f$ est dérivable en $x_0$, lorsque la représentation graphique de $f$ admet au point d'abscisse $x_0$ une tangente non parallèle à l'axe des ordonnées.
- On appelle nombre dérivé de $f$ en $x_0$ le coefficient directeur de cette tangente.

On note : $f'(x_0)$ ; on lit : $f$ prime de $x_0$.

*Exemples*

- Déterminer le nombre dérivé de la fonction $f : x \mapsto -x^2 + 2x + 3$ en 2.

Pour tout nombre réel $x$ distinct de 2, posons : $m(x) = \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2}$.

On a : $m(x) = \dfrac{-x(x-2)}{x-2} = -x$.

Lorsque $x$ tend vers 2, $m(x)$ tend vers $-2$ ; donc : $f'(2) = -2$.

- Déterminer le nombre dérivé de la fonction $g : x \mapsto \dfrac{x-3}{x+2}$ en $-1$.

Pour tout nombre réel $x$ distinct de $-1$, posons : $m(x) = \dfrac{g(x) - g(-1)}{x - (-1)}$.

On a : $m(x) = \dfrac{\dfrac{x-3}{x+2} + 4}{x+1} = \dfrac{5(x+1)}{(x+1)(x+2)} = \dfrac{5}{x+2}$.

Lorsque $x$ tend vers $-1$, $m(x)$ tend vers 5 ; donc : $g'(-1) = 5$.

**M**

Pour déterminer le nombre dérivé d'une fonction $f$ dérivable en $x_0$, on peut :
- calculer, pour tout nombre réel $x$ distinct de $x_0$, $m(x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ ;
- simplifier l'expression $m(x)$ par $x - x_0$ ;
- calculer la limite de $m(x)$, lorsque $x$ tend vers $x_0$.

## Équation de la tangente

Reprenons l'exemple introductif.
- Déterminer une équation de la droite (T).
- Étudier la position relative de ($\mathscr{C}$) et (T).

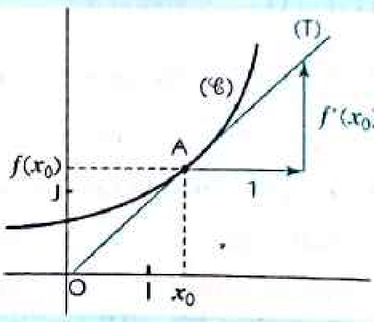
Plus généralement, on a la propriété suivante.

## Propriété

Soit $f$ une fonction, ($\mathscr{C}$) sa représentation graphique et A un point de ($\mathscr{C}$) d'abscisse $x_0$.

Lorsque $f$ est dérivable en $x_0$, une équation de la tangente en A à la courbe ($\mathscr{C}$) est :

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$



## Remarque

*Lorsque $f'(x_0) = 0$, la tangente en A à $(\mathscr{C})$ est parallèle à l'axe des abscisses.*

**Exemples**

Reprenons les fonctions $f : x \mapsto -x^2 + 2x + 3$ et $g : x \mapsto \frac{x-3}{x+2}$.

- Une équation de la tangente en A(2 ; 3) à $(\mathscr{C}_f)$ est : $y - 3 = -2(x-2)$ ; c'est-à-dire : $y = -2x + 7$.
- Une équation de la tangente en B(− 1 ; − 4) à $(\mathscr{C}_g)$ est : $y + 4 = 5(x+1)$ ; c'est-à-dire : $y = 5x + 1$.

## 3.2. Travaux dirigés

### Construction de tangentes à une parabole

**Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J).**

**1°) Construire la parabole $(\mathscr{P})$ d'équation : $y = \frac{x^2}{2}$.**

**2°) Déterminer une équation de la tangente (T) au point A d'abscisse $a$.**

**3°) On suppose le point A distinct de l'origine.**

***a)* Justifier que (T) coupe respectivement les droites (OI) et (OJ) en deux points H et K dont on précisera les coordonnées.**

***b)* Déduire de la question précédente une construction géométrique de (T).**

## Solution

**1)°** $(\mathscr{P})$ est la représentation graphique, ci-contre, de la fonction $f : x \mapsto \frac{x^2}{2}$.

**2°) *Nombre dérivé de f en a***

Pour tout $x$ distinct de $a$, posons : $m(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

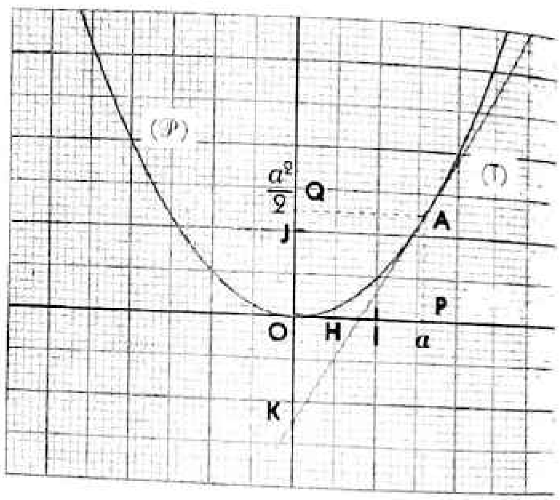
On a : $m(x) = \frac{(x-a)(x+a)}{2(x-a)} = \frac{x+a}{2}$.

Lorsque $x$ tend vers $a$, $m(x)$ tend vers $a$ ; donc : $f'(a) = a$.

***Tangente (T) en A($a$ ; $\frac{a^2}{2}$)***

Une équation de (T) est : $y - \frac{a^2}{2} = a(x - a)$ ;

c'est-à-dire : $y = ax - \frac{a^2}{2}$.




**3°)** *a)* Soit M($x$ ; $y$) un point du plan.

***Détermination de (O I) ∩ (T)***

M ∈ (O I) ∩ (T) *équivaut à* $\begin{cases} y = 0 \\ y = ax - \frac{a^2}{2} \end{cases}$

M ∈ (O I) ∩ (T) *équivaut à* $(x = \frac{a}{2}$ et $y = 0)$.

Donc : (O I) ∩ (T) = {H}, avec H($\frac{a}{2}$ ; 0).

***Détermination de (O J) ∩ (T)***

M ∈ (O J) ∩ (T) *équivaut à* $\begin{cases} x = 0 \\ y = ax - \frac{a^2}{2} \end{cases}$

M ∈ (O J) ∩ (T) *équivaut à* $(x = 0$ et $y = -\frac{a^2}{2})$.

Donc : (O J) ∩ (T) = {K}, avec K(0 ; $-\frac{a^2}{2}$).

*b)* Soit P et Q les projetés orthogonaux de A sur (OI) et (OJ) respectivement.

On construit le point K tel que : $\vec{OK} = -\vec{OQ}$ ;

on construit le point H tel que : $\vec{OH} = \frac{1}{2}\vec{OP}$ ;

on trace la droite : (T) = (HK).

## Construction de tangentes à une hyperbole

Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J).

1°) Construire l'hyperbole ($\mathcal{H}$) d'équation : $y = -\dfrac{2}{x}$.

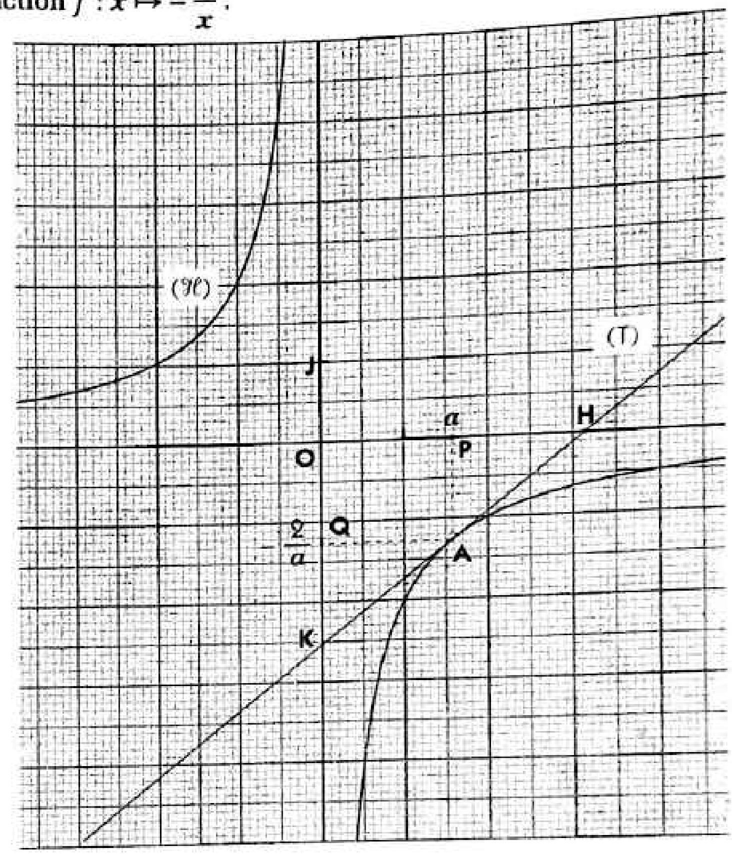
2°) Déterminer une équation de la tangente (T) au point A d'abscisse $a$.

3°) a) Justifier que (T) coupe respectivement les droites (OI) et (OJ) en deux points H et K dont on précisera les coordonnées.

b) Déduire de la question précédente une construction géométrique de (T).

## Solution

1°) ($\mathcal{H}$) est la représentation graphique de la fonction $f : x \mapsto -\dfrac{2}{x}$.




2°) ***Nombre dérivé de $f$ en $a$***

Pour tout $x$ distinct de $a$, posons :

$m(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

On a : $m(x) = \dfrac{2(x - a)}{ax(x - a)} = \dfrac{2}{ax}$.

Lorsque $x$ tend vers $a$, $m(x)$ tend vers $\dfrac{2}{a^2}$ ;

donc : $f'(a) = \dfrac{2}{a^2}$.

***Tangente (T) en $A(a\ ; -\dfrac{2}{a})$***

Une équation de (T) est : $y + \dfrac{2}{a} = \dfrac{2}{a^2}(x - a)$ ;

c'est-à-dire : $y = \dfrac{2}{a^2}x - \dfrac{4}{a}$.

3°) *a)* Soit M$(x\ ; y)$ un point du plan.

***Détermination de (O I) ∩ (T)***

M ∈ (O I) ∩ (T) *équivaut à* $\begin{cases} y = 0 \\ y = \dfrac{2}{a^2}x - \dfrac{4}{a} \end{cases}$

M ∈ (O I) ∩ (T) *équivaut à* $(x = 2a$ et $y = 0)$.

Donc : (O I) ∩ (T) = {H}, avec H$(2a\ ; 0)$.

***Détermination de (O J) ∩ (T)***

M ∈ (O J) ∩ (T) *équivaut à* $\begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{2}{a^2}x - \dfrac{4}{a} \end{cases}$

M ∈ (O J) ∩ (T) *équivaut à* $(x = 0$ et $y = -\dfrac{4}{a})$.

Donc : (O J) ∩ (T) = {K}, avec K$(0\ ; -\dfrac{4}{a})$.

*b)* Soit P et Q les projetés orthogonaux de A sur (OI) et (OJ) respectivement.

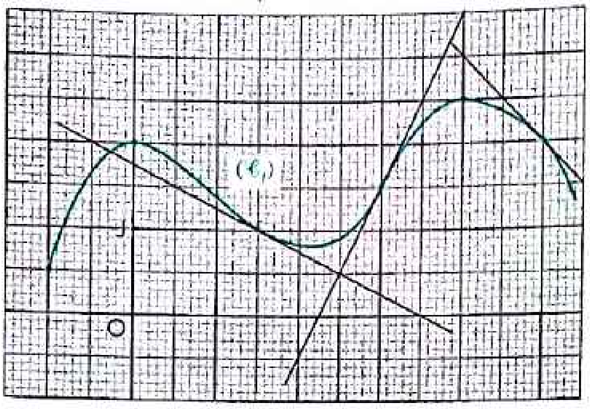
On construit le point K tel que : $\overrightarrow{OK} = 2\overrightarrow{OQ}$ ;

on construit le point H tel que : $\overrightarrow{OH} = 2\overrightarrow{OP}$ ;

on trace la droite : (T) = (HK).

## Exercices

**3.a** La courbe $(\mathscr{C}_f)$ ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction $f$.
Par lecture graphique, donner le nombre dérivé de la fonction $f$ en chacun des nombres suivants : 0 ; 1,5 ; 3 ; 4 et 5.




**3.b** Dans chacun des cas suivants, calculer le nombre dérivé de la fonction $f$ en $x_0$.

*a)* $f : x \mapsto x^2 + 1$ , $x_0 = -1$

*b)* $f : x \mapsto \dfrac{x}{x-3}$ , $x_0 = 2$.

**3.c** Dans chacun des cas suivants, déterminer une équation de la tangente à la représentation graphique de $f$, au point d'abscisse $x_0$.

*a)* $f : x \mapsto -x^2 + x$ , $x_0 = 0$

*b)* $f : x \mapsto \dfrac{x-2}{x}$ , $x_0 = 1$.

**3.d** La courbe représentative d'une fonction $f$ admet au point A d'abscisse 1 la droite d'équation $y = -3x + 2$ comme tangente.
Déterminer $f'(1)$ et $f(1)$.

# 4 Calculs de dérivées

## 4.1. Dérivées de fonctions élémentaires

### Fonction dérivée

Soit $f$ la fonction définie par $f(x) = x^2 - 1$ et $x_0$ un nombre réel.

Pour tout nombre réel $x$ distinct de $x_0$, posons : $m(x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

On a : $m(x) = \dfrac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = x + x_0$.

Lorsque $x$ tend vers $x_0$, $m(x)$ tend vers $2x_0$.

Donc, la fonction $f$ est dérivable en tout élément $x_0$ de $\mathbb{R}$ et $f'(x_0) = 2x_0$.

La fonction $f' : x \mapsto 2x$ est appelée **fonction dérivée** de $f$.

**Définitions**

- **On dit que $f$ est une fonction dérivable sur l'intervalle ouvert K lorsque la fonction $f$ est dérivable en tout élément de K.**
- **La fonction $f' : x \mapsto f'(x)$ est alors appelée dérivée (ou fonction dérivée) de $f$.**

### Dérivées de fonctions élémentaires

Le tableau ci-dessous donne les formules de dérivation des fonctions élémentaires que nous admettons.

| $f(x)$ | $f$ est définie sur | $f$ est dérivable sur | $f'(x)$ |
|---|---|---|---|
| $k$ $(k \in \mathbb{R})$ | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{R}$ | $0$ |
| $x$ | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{R}$ | $1$ |
| $x^n$ $(n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$ | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{R}$ | $nx^{n-1}$ |
| $\frac{1}{x}$ | $\mathbb{R}^*$ | $\mathbb{R}^*$ | $-\frac{1}{x^2}$ |
| $\sqrt{x}$ | $\mathbb{R}_+$ | $\mathbb{R}_+^*$ | $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ |

*Exemples*

- La fonction $f : x \mapsto x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction $f' : x \mapsto 2x$.
- La fonction $g : x \mapsto x^3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction $g' : x \mapsto 3x^2$.

## 4.2. Dérivées et opérations sur les fonctions

### Opérations sur les fonctions

Soit $f$ et $g$ deux fonctions d'ensemble de définition D et $k$ un nombre réel.
Le tableau ci-dessous permet d'effectuer certaines opérations sur les fonctions.

| | Notation | Formule explicite |
|---|---|---|
| Somme de deux fonctions | $f+g$ | $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ |
| Produit d'une fonction par un nombre réel | $kf$ | $(kf)(x) = k \times f(x)$ |
| Produit de deux fonctions | $fg$ | $(fg)(x) = f(x) \times g(x)$ |
| Inverse d'une fonction | $\frac{1}{g}$ | $\left(\frac{1}{g}\right)(x) = \frac{1}{g(x)}$ si $g(x) \neq 0$ pour tout $x$ élément de D. |
| Quotient de deux fonctions | $\frac{f}{g}$ | $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ si $g(x) \neq 0$ pour tout $x$ élément de D. |

*Exemples*

Soit $f$ et $g$ les fonctions définies par : $f(x) = 2x - 6$ et $g(x) = x$.

On a : $D_f = D_g = \mathbb{R}$.

- Pour tout nombre réel $x$, $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = 3x - 6$ ;
- pour tout nombre réel $x$, $\frac{1}{2} f(x) = \frac{1}{2} \times f(x) = x - 3$ ;
- pour tout nombre réel $x$, $(-5g)(x) = -5 \times g(x) = -5x$ ;
- pour tout nombre réel $x$, $(fg)(x) = f(x) \times g(x) = 2x^2 - 6x$ ;

- pour tout nombre réel $x$ non nul, $\left(\frac{1}{g}\right)(x) = \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{x}$ ;
- pour tout nombre réel $x$ non nul, $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2x-6}{x}$ .

## Dérivée de la somme de deux fonctions dérivables

On admet la propriété suivante.

**Propriété**

**Soit $f$ et $g$ deux fonctions dérivables sur un intervalle ouvert K.**

**La fonction $f + g$ est dérivable sur K et on a : $(f+g)' = f' + g'$.**

*Exemple*

Soit $h$ la fonction définie par : $h(x) = x^2 + x$.
On pose : $f(x) = x^2$ et $g(x) = x$.
On a : $f'(x) = 2x$ et $g'(x) = 1$.
$h$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction $h'$ définie par : $h'(x) = 2x + 1$.

## Dérivée du produit d'une fonction dérivable par un nombre

On admet la propriété suivante.

**Propriété**

**Soit $f$ une fonction dérivable sur un intervalle ouvert K et $k$ un nombre réel.**

**La fonction $kf$ est dérivable sur K et on a : $(kf)' = kf'$.**

*Exemple*

Soit $h$ la fonction définie par : $h(x) = -3x^2$.
On pose : $f(x) = x^2$ et $k = -3$.
On a : $f'(x) = 2x$.
$h$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction $h'$ définie par : $h'(x) = -6x$.

## Dérivée du produit de deux fonctions dérivables

On admet la propriété suivante.

**Propriété**

**Soit $f$ et $g$ deux fonctions dérivables sur un intervalle ouvert K.**

**La fonction $fg$ est dérivable sur K et on a : $(fg)' = f'g + fg'$.**

*Exemple*

Soit $h$ la fonction définie par : $h(x) = x\sqrt{x}$.
On pose : $f(x) = x$ et $g(x) = \sqrt{x}$.
On a : $f'(x) = 1$ et $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
$h$ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et sa dérivée est la fonction $h'$ définie par :
$h'(x) = \sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$.

## Dérivée de l'inverse d'une fonction dérivable

On admet la propriété suivante.

**Propriété**

**Soit $g$ une fonction dérivable sur un intervalle ouvert K tel que pour tout $x$ élément de K, $g(x) \neq 0$.**
**La fonction $\frac{1}{g}$ est dérivable sur K et on a : $\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$.**

*Exemple*

Soit $h$ la fonction définie par : $h(x) = \frac{1}{3x-4}$.
On pose : $g(x) = 3x - 4$.
On a : $g'(x) = 3$.
$h$ est dérivable sur les intervalles $\left]-\infty \,;\, \frac{4}{3}\right[$, $\left]\frac{4}{3} \,;\, +\infty\right[$ et sa dérivée est la fonction $h'$ définie par :
$h'(x) = \frac{-3}{(3x-4)^2}$.

## Dérivée du quotient de deux fonctions dérivables

On suppose que, pour tout $x$ élément de K, $g(x) \neq 0$.
On a : $\frac{f}{g} = f \times \frac{1}{g}$.
Si $f$ et $g$ sont dérivables sur K, alors $\frac{f}{g}$ est dérivable sur K.
On déduit des propriétés précédentes que : 
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = f' \times \frac{1}{g} + f \times \left(\frac{1}{g}\right)'$$
$$= \frac{f'}{g} - \frac{fg'}{g^2}$$
$$= \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

On a démontré la propriété suivante.

**Propriété**

**Soit $f$ et $g$ deux fonctions dérivables sur un intervalle ouvert K tel que, pour tout $x$ élément de K, $g(x) \neq 0$.**
**La fonction $\frac{f}{g}$ est dérivable sur K et on a : $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.**

*Exemple*

Soit $h$ la fonction définie par : $h(x) = \frac{2x-1}{x+3}$.
On pose : $f(x) = 2x - 1$ et $g(x) = x + 3$.
On a : $f'(x) = 2$ et $g'(x) = 1$.
$h$ est dérivable sur les intervalles $]-\infty \,;\, -3[$, $]-3 \,;\, +\infty[$ et sa dérivée est la fonction $h'$ définie par :
$h'(x) = \frac{2(x+3) - (2x-1) \times 1}{(x+3)^2} = \frac{7}{(x+3)^2}$.

## Tableau récapitulatif

| Fonction | $f + g$ | $kf\ (k \in \mathbb{R})$ | $fg$ | $\frac{1}{g}$ | $\frac{f}{g}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Dérivée | $f' + g'$ | $kf'$ | $f'g + fg'$ | $-\frac{g'}{g^2}$ | $\frac{f'g - fg'}{g^2}$ |

## Exercices

**4.a** ($\mathscr{C}$) est la représentation graphique d'une fonction $f$.
La tangente en A(2 ; 3) à ($\mathscr{C}$) passe par B(4 ; 7).
Quel est le nombre dérivé de $f$ en 2 ?

**4.b** Dans chacun des cas suivants, déterminer la dérivée de la fonction $f$ sur $\mathbb{R}$.

*a)* $f : x \mapsto x^2 + 5$

*b)* $f : x \mapsto \dfrac{3}{2}x^2$

*c)* $f : x \mapsto x^2 - 2x - 3$

*d)* $f : x \mapsto (2x - 1)(x^2 + 4)$

*e)* $f : x \mapsto \dfrac{2}{x - 1}$

*f)* $f : x \mapsto \dfrac{-x}{x + 3}$.

**4.c** Dans chacun des cas suivants, déterminer la dérivée de la fonction $f$ sur $\mathbb{R}$.

*a)* $f : x \mapsto x^3$

*b)* $f : x \mapsto x^3 - 4$

*c)* $f : x \mapsto x^3 - 6x$

*d)* $f : x \mapsto 4x^3$.

**4.d** Soit $f$ la fonction définie par :

$$f(x) = (x + 1)(x - 3).$$

*a)* Développer et réduire $f(x)$ .

*b)* Déterminer de deux façons différentes la dérivée de la fonction $f$.

**4.e** Dans chacun des cas suivants, déterminer la dérivée de la fonction $f$ sur l'intervalle I.

*a)* $f : x \mapsto 3 - \dfrac{5}{x + 2}$, $\qquad I = ]-2 ; +\infty[$

*b)* $f : x \mapsto \sqrt{x} + \dfrac{4}{x}$, $\qquad I = ]0 ; +\infty[$.

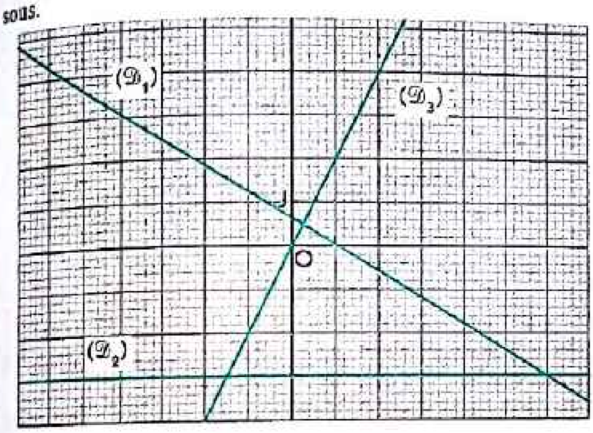
# Exercices

## APPRENTISSAGE

### Compléments sur les droites

**1** Le plan est muni du repère (O, I, J).
Dans chacun des cas suivants, déterminer le coefficient directeur de la droite $(\mathscr{D})$.
*a)* $(\mathscr{D})$ a pour équation : $2x - 4y = 1$.
*b)* $(\mathscr{D})$ passe par les points $A(2\ ;-3)$ et $B(-1\ ;1)$.
*c)* $\vec{u}\begin{pmatrix}-4\\6\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $(\mathscr{D})$.

**2** Déterminer graphiquement le coefficient directeur des droites $(\mathscr{D}_1)$, $(\mathscr{D}_2)$ et $(\mathscr{D}_3)$ représentées ci-dessous.




**3** Le plan est muni du repère (O, I, J).
*a)* Construire la droite $(\mathscr{D})$ ayant pour coefficient directeur $-3$ et passant par le point $A(2\ ;-1)$.
*b)* Déterminer une équation de $(\mathscr{D})$.

**4** Le plan est muni du repère (O, I, J).
Soit $f$ la fonction définie par $f(x) = -x^2$ et $(\mathscr{C})$ sa représentation graphique.
1. Calculer le coefficient directeur de la droite passant par les points A et B de $(\mathscr{C})$ d'abscisses respectives $-1$ et 2.
2. Déterminer une équation de cette droite.

**5** Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J).
1. Déterminer le coefficient directeur de la droite passant par les points $A(2\ ;0)$ et $B(0\ ;3)$.
2. Construire la hauteur du triangle OAB issue de O. Déterminer une équation de cette droite.

**6** Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J).
1. Déterminer le coefficient directeur de la droite passant par les points $A(-2\ ;1)$ et $B(2\ ;3)$.
2. Déterminer une équation de la médiatrice du segment [AB].

**7** Le plan est muni du repère (O, I, J).
Dans chacun des cas suivants, construire la droite $(\mathscr{D})$ de coefficient directeur $m$ et passant par le point A.

*a)* $m = -4$ et $A(-1\ ;3)$ *b)* $m = \frac{1}{2}$ et $A(-4\ ;2)$
*c)* $m = -\frac{3}{2}$ et $A(1\ ;-3)$ *d)* $m = 3$ et $A(1\ ;2)$.

### Notion de limite

**8** Dans chacun des cas suivants, déterminer la limite de la fonction $f$ en $x_0$.
*a)* $f(x) = x^2 - 4x + 1,\quad x_0 = 2$
*b)* $f(x) = -3x^2 + x - 2,\quad x_0 = 1$
*c)* $f(x) = x^3 - x^2 + 4,\quad x_0 = 0$
*d)* $f(x) = -x^2 + x,\quad x_0 = -1.$

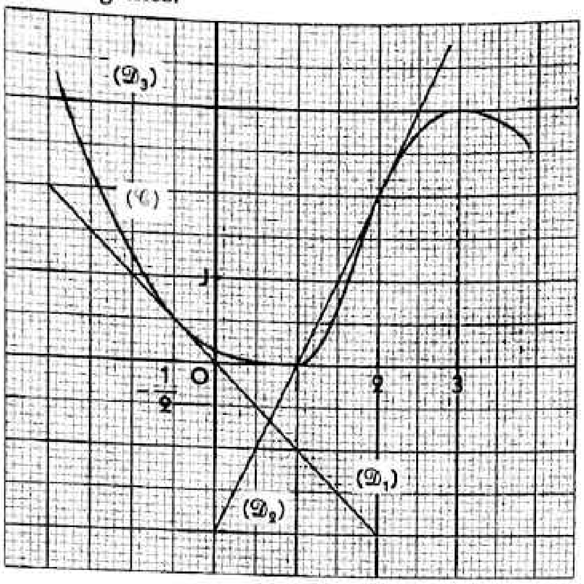
**9** Dans chacun des cas suivants, déterminer la limite de la fonction $f$ en $x_0$.
*a)* $f(x) = \dfrac{x-5}{2x+3},\quad x_0 = -1$
*b)* $f(x) = \dfrac{-4x}{x-1},\quad x_0 = 2$
*c)* $f(x) = 6 - \dfrac{1}{x+1},\quad x_0 = -2$
*d)* $f(x) = x - \dfrac{2}{3x+4},\quad x_0 = -1.$

### Dérivation en $x_0$

**10** Dans chacun des cas suivants, calculer, en utilisant la définition, le nombre dérivé de la fonction $f$ en $x_0$.
*a)* $f(x) = -x^2 + 4x\quad ,\quad x_0 = 1$
*b)* $f(x) = x^2 + 1\quad ,\quad x_0 = -2$
*c)* $f(x) = \dfrac{x-3}{x}\quad ,\quad x_0 = -1$
*d)* $f(x) = \dfrac{2x+3}{x-1}\quad ,\quad x_0 = 2.$

**11** Dans chacun des cas suivants, déterminer une équation de la tangente à la représentation graphique de la fonction $f$ au point d'abscisse $x_0$.
*a)* $f(x) = x^2 - 2x + 3\quad ,\quad x_0 = 0$
*b)* $f(x) = -x^2 + 4\quad ,\quad x_0 = \frac{1}{2}$
*c)* $f(x) = \dfrac{-3x}{x+4}\quad ,\quad x_0 = -2$
*d)* $f(x) = \dfrac{x-3}{x-2}\quad ,\quad x_0 = -1.$

**12** Les droites $(\mathscr{D}_1)$, $(\mathscr{D}_2)$ et $(\mathscr{D}_3)$ sont les tangentes à la courbe $(\mathscr{C})$ ci-dessous aux points d'abscisses respectives $-\frac{1}{2}$, 2 et 3. Déterminer une équation de chacune de ces tangentes.

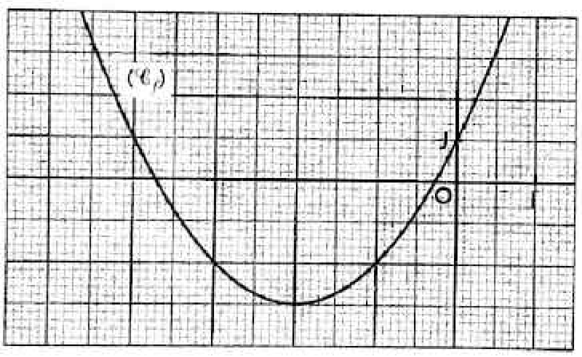



**13** La représentation graphique d'une fonction $f$ admet au point A d'abscisse 0 la droite d'équation $y = -2x + 3$ comme tangente.
Déterminer $f'(0)$ et $f(0)$.

**14** La courbe $(\mathscr{C}_f)$ ci-dessous est la représentation graphique de la fonction $f$ définie par :

$$f(x) = x^2 + 4x + 1.$$

Construire les tangentes (T) et (T') aux points d'abscisses respectives $-3$ et $-1$.




**15** Soit $f$ une fonction, d'ensemble de définition $\mathbb{R}$, telle que : $f(1) = 4$ et $f'(1) = -2$.
1. Déterminer une équation de la tangente à $(\mathscr{C}_f)$, représentation graphique de $f$, au point d'abscisse 1.
2. Déterminer une équation de la tangente à $(\mathscr{C}_f)$ au point d'abscisse $-1$ dans chacun des cas suivants :
*a)* la fonction $f$ est paire
*b)* la fonction $f$ est impaire.

# Calculs de dérivées

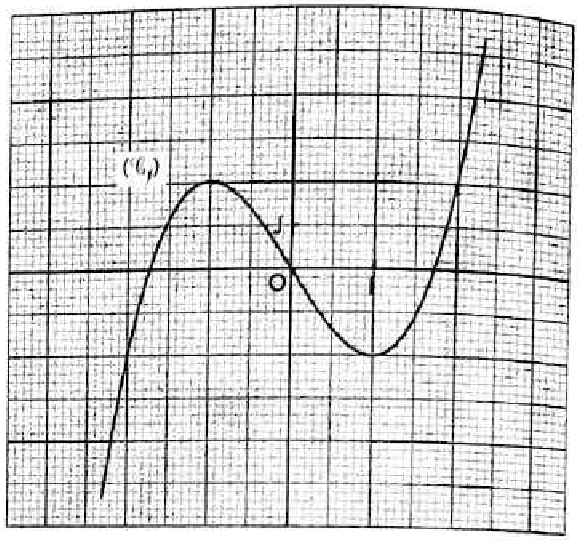
**16** Dans chacun des cas suivants, déterminer la dérivée de la fonction $f$. Préciser l'ensemble des nombres réels où $f$ est dérivable.

*a)* $f(x) = 4x^2 + 8x - 5$ *b)* $f(x) = -x^2 + 3x - 1$

*c)* $f(x) = x^3 - 3x$ *d)* $f(x) = \frac{3 - 2x}{x - 2}$

*e)* $f(x) = \frac{2x + 1}{x - 5}$ *f)* $f(x) = -1 + \frac{2}{x - 3}$.

**17** La courbe $(\mathscr{C}_f)$ ci-dessous est la représentation graphique de la fonction $f$ définie par : $f(x) = x^3 - 3x$.
1. Déterminer la dérivée de la fonction $f$.
2. *a)* Déterminer les points où la tangente à $(\mathscr{C}_f)$ est parallèle à l'axe des abscisses.
*b)* Construire les tangentes en ces points.



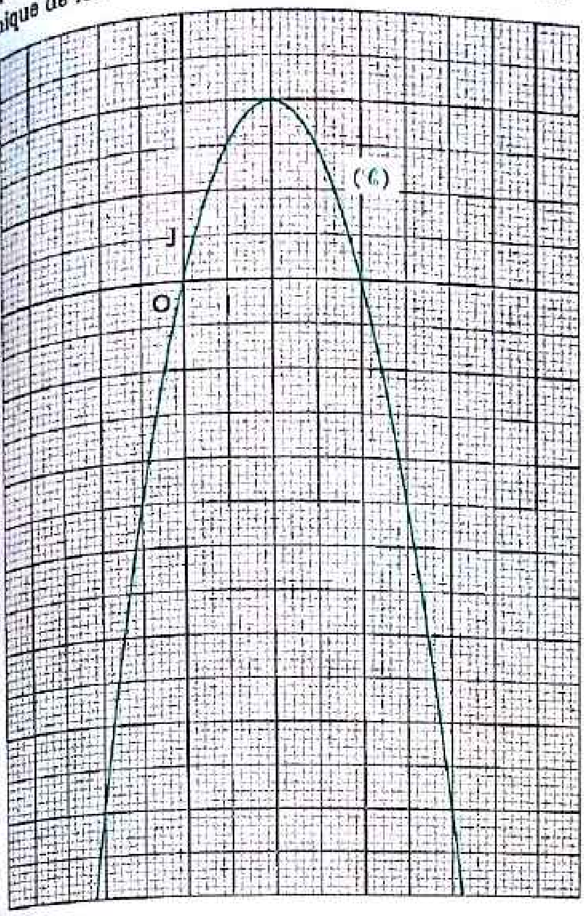

**18** Le plan est muni du repère (O, I, J).
Soit $f$ la fonction définie par $f(x) = x^2 - 4x + 1$ et $(\mathscr{C})$ sa représentation graphique.
La courbe $(\mathscr{C})$ admet-elle une tangente de coefficient directeur 2 ?
Si oui, déterminer une équation de cette tangente.

**19** Le plan est muni du repère (O, I, J).
Soit $f$ la fonction définie par $f(x) = \frac{x}{x - 1}$ et $(\mathscr{C})$ sa représentation graphique.
1. La courbe $(\mathscr{C})$ admet-elle une tangente de coefficient directeur 3 ?
2. Démontrer que la courbe $(\mathscr{C})$ admet deux tangentes de coefficient directeur $-1$.
Déterminer une équation de chacune de ces tangentes.

**20** 1. Dans chacun des cas suivants, développer et réduire $f(x)$.
*a)* $f(x) = (4x - 3)(2 - 3x)$
*b)* $f(x) = (x - 3)^2$.
2. Déterminer, de deux manières différentes, la dérivée de la fonction $f$.

**21** Soit $f$ la fonction définie par : $f(x) = \frac{2x - 5}{x - 1}$.
1. Déterminer l'ensemble de définition D de $f$.
2. Déterminer deux nombres réels $a$ et $b$ tels que :
pour tout $x \in D$, $f(x) = a + \frac{b}{x - 1}$.
3. Déterminer, de deux manières différentes, la dérivée de la fonction $f$.

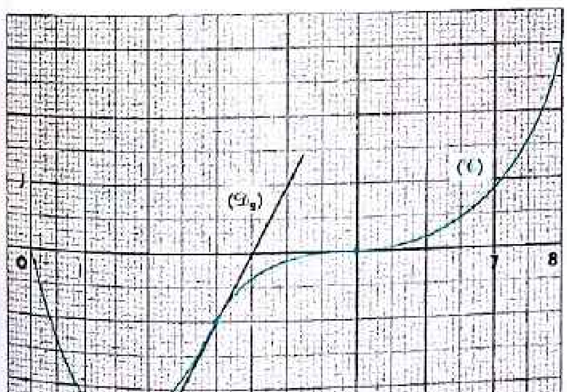
**22** Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J).
La courbe ($\mathscr{C}$) ci-dessous est la représentation graphique de la fonction $f$ définie par : $f(x) = -x^2 + 4x$.




1. Construire la tangente à ($\mathscr{C}$) en chacun des points O, A(4 ; 0), B(2 ; 4) et C(1 ; 3).
2. Déterminer une équation de chacune de ces tangentes.

## APPROFONDISSEMENT

**23** La courbe ($\mathscr{C}$) ci-dessous est la représentation graphique, sur l'intervalle [0 ; 8], d'une fonction $f$ ayant pour ensemble de définition [– 8 ; 8].
Les droites ($\mathscr{D}_1$), ($\mathscr{D}_2$) et (OI) sont les tangentes à ($\mathscr{C}$) aux points d'abscisses respectives 1,5 ; 3 et 5.




1. Par lecture graphique, donner les valeurs de $f'(1,5)$, $f'(3)$ et $f'(5)$.
2. On suppose que la fonction $f$ est impaire.
*a)* Construire la représentation graphique de $f$ sur l'intervalle [– 8 ; 8].
*b)* Par lecture graphique, donner les valeurs de $f'(-5)$, $f'(-3)$ et $f'(-1,5)$.
*c)* La fonction $f$ admet-elle un nombre dérivé en 0 ?
Si oui, préciser le signe de ce nombre.
3. On suppose que la fonction $f$ est paire.
*a)* Construire la représentation graphique de $f$ sur l'intervalle [– 8 ; 8].
*b)* Par lecture graphique, donner les valeurs de $f'(-5)$, $f'(-3)$ et $f'(-1,5)$.
*c)* La fonction $f$ admet-elle un nombre dérivé en 0 ?

**24** Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J).
Soit $f$ la fonction définie par : $f(x) = ax^2 + bx$.
Déterminer les nombres réels $a$ et $b$ sachant que la représentation graphique de $f$ admet au point d'abscisse – 1 comme tangente la droite d'équation : $y = 2x - 3$.

**25** Le plan est muni du repère (O, I, J).
Soit $f$ la fonction définie par : $f(x) = ax^2 + bx$.
Déterminer les nombres réels $a$ et $b$ sachant que la tangente en A(4 ; 0) à la représentation graphique de $f$ est parallèle à la droite d'équation : $y = -4x + 3$.

**26** Le plan est muni du repère (O, I, J).
Soit $f$ la fonction définie par : $f(x) = ax^2 + bx + 3$.
Déterminer les nombres réels $a$ et $b$ sachant que la représentation graphique de $f$ passe par le point A(– 1 ; 2) et qu'elle admet en ce point une tangente parallèle à (OI).

**27** Le plan est muni du repère (O, I, J).
Soit $f$ la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x+3}{x-2}$ et ($\mathscr{C}_f$) sa représentation graphique.
1. Déterminer la dérivée de la fonction $f$.
2. Déterminer les coordonnées des points de ($\mathscr{C}_f$) où la tangente est parallèle à la droite d'équation : $y = -5x + 7$.

**28** Le plan est muni du repère (O, I, J).
Soit $f$ la fonction définie par $f(x) = x^2 - 2x - 3$ et ($\mathscr{C}_f$) sa représentation graphique.
Déterminer le point de ($\mathscr{C}_f$) où la tangente à ($\mathscr{C}_f$) est parallèle à la droite d'équation : $y = 4x - 5$.

**29** Déterminer la fonction polynôme du second degré $f$ telle que : $f(0) = -6$, $f'(0) = 5$ et $f(1) = -2$.

**30** Le plan est muni du repère (O, I, J).
Soit $f$ et $g$ les fonctions définies par :
$$f(x) = 3x^2 - 4x + 2 \quad \text{et} \quad g(x) = -2x^2 + 6x - 3.$$
On désigne par ($\mathscr{C}_f$) et ($\mathscr{C}_g$) les représentations graphiques respectives de $f$ et de $g$.
1. Démontrer que ($\mathscr{C}_f$) et ($\mathscr{C}_g$) passent par A(1 ; 1) et admettent la même tangente (T) en ce point.
*On dit que les courbes ($\mathscr{C}_f$) et ($\mathscr{C}_g$) sont tangentes au point A.*
2. *a)* Déterminer une équation de (T).
*b)* Étudier la position relative de (T) avec chacune des courbes ($\mathscr{C}_f$) et ($\mathscr{C}_g$).

**31** **Approximation de $(1 + x)^2$**
Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J).

Soit $f$ la fonction définie par : $f(x) = (1 + x)^2$.

**1.** Construire la représentation graphique ($\mathscr{C}$) de $f$ sur l'intervalle $[-3 ; 2]$.

**2.** *a)* Construire la tangente (T) à ($\mathscr{C}$) en J.

*b)* Déterminer l'équation réduite de (T).

**3.** *a)* À l'aide de la calculatrice, compléter le tableau suivant.

| $x$ | $-0{,}01$ | $-0{,}001$ | 0 | 0,001 | 0,01 |
|---|---|---|---|---|---|
| $(1+x)^2$ | | | | | |
| $1+2x$ | | | | | |
| $(1+x)^2-(1+2x)$ | | | | | |

*b)* En déduire que $(1 + 2x)$ est une valeur approchée de $(1 + x)^2$ lorsque $x$ est très proche de zéro.

*c)* Exprimer, en fonction de $x$, l'erreur commise.

**4.** ***Application***

Donner une valeur approchée des nombres : $(1{,}02)^2$ ; $(1{,}001)^2$ ; $(0{,}98)^2$ et $(0{,}999)^2$.

**32** Approximation de $\dfrac{1}{1+x}$

Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J).

Soit $f$ la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$.

**1.** Construire la représentation graphique ($\mathscr{C}$) de $f$ sur l'intervalle $]-1 ; +\infty[$.

**2.** *a)* Construire la tangente (T) à ($\mathscr{C}$) en J.

*b)* Déterminer l'équation réduite de (T).

**3.** *a)* À l'aide de la calculatrice, compléter le tableau suivant.

| $x$ | $-0{,}01$ | $-0{,}001$ | 0 | 0,001 | 0,01 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\dfrac{1}{1+x}$ | | | | | |
| $1-x$ | | | | | |
| $\dfrac{1}{1+x}-(1-x)$ | | | | | |

*b)* En déduire que $(1 - x)$ est une valeur approchée de $\dfrac{1}{1+x}$ lorsque $x$ est très proche de zéro.

*c)* Exprimer, en fonction de $x$, l'erreur commise.

**4.** ***Application***

Donner une valeur approchée des nombres $\dfrac{1}{1{,}01}$ et $\dfrac{1}{1{,}009}$.

**33** Une entreprise fabrique des objets.

Le coût de fabrication de $x$ objets, en milliers de francs CFA, est donné par la fonction $f$ telle que :

$$f(x) = 0{,}02x^2 + 4x + 100.$$

**1.** Déterminer le montant des charges fixes, c'est-à-dire des charges de l'entreprise même si elle ne fabrique aucun objet.

**2.** *a)* Calculer le coût de fabrication de 100 objets, de 101 objets.

*b)* En déduire l'augmentation de coût entraînée par la fabrication de cet objet supplémentaire.

**3.** *a)* Déterminer la dérivée $f'$ de la fonction $f$.

*b)* Calculer $f'(100)$.

*c)* Comparer $f'(100)$ au nombre trouvé à la question **2.** *b.*

5

# Statistiques

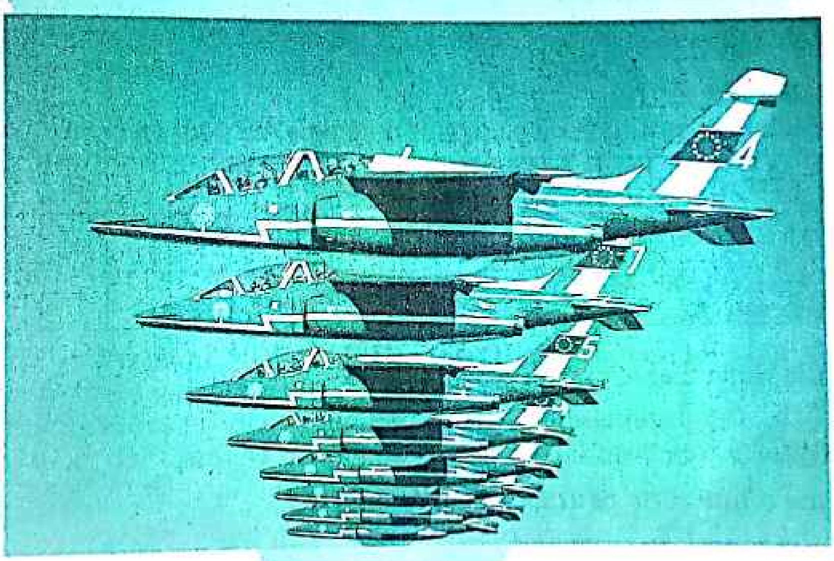
## Introduction

**Q**ue signifie la phrase : « Les élèves de terminale sont plus vieux que ceux de première » ?

Comment désigner le meilleur sportif de l'année ?

Quel avion est le plus performant ?

Pour répondre à de telles questions, on doit, d'une façon ou d'une autre, faire appel aux statistiques.



© Alain Ernoult

## SOMMAIRE

# 1 Caractéristiques d'une série statistique

## 1.1. Caractéristiques de position

### Mode

**Définition**

**On appelle mode d'une série statistique toute modalité qui a le plus grand effectif.**

***Exemple***

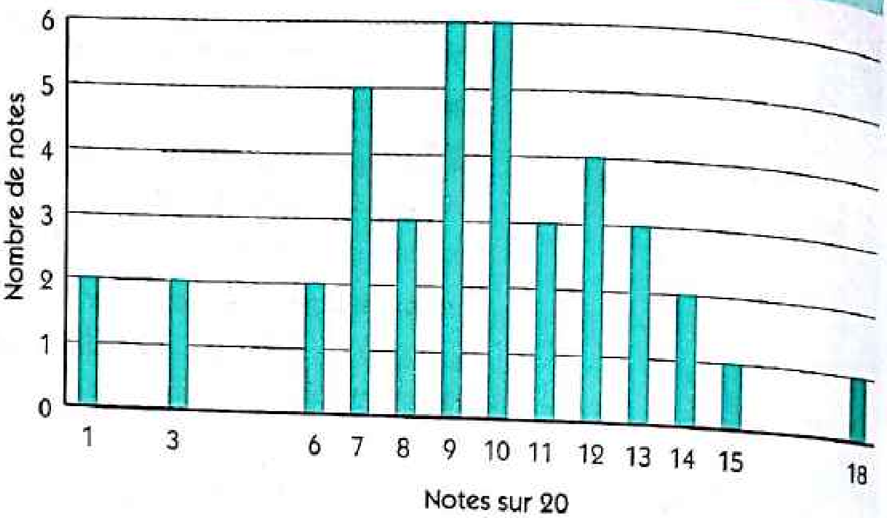
On donne ci-contre le diagramme en bâtons de la série des notes obtenues par les élèves d'une classe à un devoir d'anglais.

Les modalités 9 et 10 ont le plus grand effectif.

La série a donc deux **modes** : les notes 9 et 10.

***Interprétation***

9 et 10 sont les notes obtenues par le plus grand nombre d'élèves.




### Moyenne

Pour apprécier les résultats de ce devoir d'anglais, on peut calculer la **moyenne** de la classe.

| Note | 1 | 3 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 18 | Totaux |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Effectif | 2 | 2 | 2 | 5 | 3 | 6 | 6 | 3 | 4 | 3 | 2 | 1 | 1 | 40 |
| Produit de la note par son effectif | 2 | 6 | 12 | 35 | 24 | 54 | 60 | 33 | 48 | 39 | 28 | 15 | 18 | 374 |

La moyenne de la classe est : $m = \dfrac{374}{40} = 9{,}35$.

**Remarque**

*La moyenne d'une série peut ne pas avoir de sens.*

***Exemple***

Afin de confectionner des chaussures, un cordonnier a relevé les pointures en centimètres d'un échantillon de sa clientèle. Ces mesures sont les suivantes.

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 39 | 41 | 42 | 42 | 39 | 40 | 42 | 40 | 42 | 44 | 41 | 42 | 40 | 42 | 41 | 42 | 43 | 42 | 43 | 41 |
| 42 | 43 | 41 | 43 | 41 | 43 | 40 | 43 | 40 | 41 | 41 | 41 | 42 | 41 | 43 | 43 | 40 | 41 | 44 | 40 |
| 40 | 41 | 40 | 41 | 42 | 41 | 43 | 41 | 41 | 41 | 42 | 44 | 44 | 41 | 42 | 44 | 42 | 44 | 44 | 43 |
| 41 | 43 | 42 | 42 | 40 | 42 | 40 | 42 | 41 | 41 | 44 | 40 | 41 | 42 | 41 | 44 | 41 | 42 | 43 | 41 |

Déterminons le mode et la moyenne de cette série.

| Modalité | 39 | 40 | 41 | 42 | 43 | 44 | Totaux |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Effectif | 2 | 12 | 25 | 20 | 12 | 9 | 80 |
| Produit de la modalité par son effectif | 78 | 480 | 1 025 | 840 | 516 | 396 | 3 335 |

Le mode de la série est 41. La moyenne de la série est $\dfrac{3\,335}{80}$, c'est-à-dire 41,69.

La plupart des clients du cordonnier chaussent du 41. Celui-ci a donc intérêt à fabriquer plus de chaussures de pointure 41 que de chaussures de pointure 41,69 qui n'existent pas.

### Médiane

Reprenons la série statistique relative aux chaussures.
On se propose de déterminer la modalité qui partage cette série en **deux groupes de même effectif**.
On dresse le tableau des effectifs cumulés de la série.

| Modalité | 39 | 40 | 41 | 42 | 43 | 44 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Effectif cumulé croissant | 2 | 14 | 39 | 59 | 71 | 80 |
| Effectif cumulé décroissant | 80 | 78 | 66 | 41 | 21 | 9 |

D'après ce tableau, 59 individus ont une pointure inférieure ou égale à 42 et 41 individus ont une pointure supérieure ou égale à 42 ; la modalité cherchée est donc égale à 42.
On dit que 42 est la **médiane** de la série.

**Définition**

**On appelle médiane d'une série statistique le nombre, noté Me, tel que 50 % des modalités sont inférieures ou égales à Me et 50 % supérieures ou égales à Me.**

***Interprétation de la médiane***

Dans l'exemple des chaussures, une moitié des clients a une pointure inférieure ou égale à 42 et l'autre moitié a une pointure supérieure ou égale à 42.

***Exemple***

On a interrogé les enseignants d'un lycée sur le nombre d'enfants à leur charge, et consigné les résultats dans le tableau des effectifs cumulés suivant.

| Nombre d'enfants à charge | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Effectif cumulé croissant | 2 | 3 | 9 | 14 | 21 | 23 | 25 | 26 | 28 |
| Effectif cumulé décroissant | 28 | 26 | 25 | 19 | 14 | 7 | 5 | 3 | 2 |

L'effectif total de la série est 28.
Le tableau ci-dessus montre que 14 professeurs (50 % de l'effectif total) ont chacun au plus 3 enfants et que 14 professeurs ont chacun au moins 4 enfants.
Ici, la médiane n'est pas l'une des modalités ; elle est comprise entre les modalités 3 et 4.
On convient de prendre pour **médiane** de la série la demi-somme des modalités 3 et 4, c'est-à-dire 3,5.

**Remarque**

*La médiane d'une série statistique n'est pas toujours une modalité de cette série.*

**Vocabulaire**

La médiane, le mode et la moyenne sont appelés **caractéristiques de position** (ou **de tendance centrale**).

## 1.2. Caractéristiques de dispersion

### Introduction

Au cours d'un trimestre, Maho a obtenu les notes suivantes respectivement en français et en anglais.

Français

| Note | 7,5 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| Effectif | 1 | 2 | 1 | 1 |

Anglais

| Note | 3 | 3,5 | 8 | 20 |
|---|---|---|---|---|
| Effectif | 1 | 1 | 2 | 1 |

On veut comparer les performances de Maho dans ces deux disciplines.
Pour cela, on va déterminer la moyenne, le mode et la médiane de chacune des séries des notes de français et d'anglais.

***Série des notes de français***

| Note | 7,5 | 8 | 9 | 10 | Totaux |
|---|---|---|---|---|---|
| Effectif | 1 | 2 | 1 | 1 | 5 |
| Produit de la note par son effectif | 7,5 | 16 | 9 | 10 | 42,5 |
| Effectif cumulé croissant | 1 | 3 | 4 | 5 | |
| Effectif cumulé décroissant | 5 | 4 | 2 | 1 | |

La moyenne de la série est $\frac{42,5}{5}$, c'est-à-dire 8,5.
Le mode de la série est 8.

La modalité 8 a un effectif cumulé croissant et un effectif cumulé décroissant tous deux supérieurs ou égaux à $\frac{N}{2} = 2,5$. Donc, la médiane de la série est 8.

***Série des notes d'anglais***

| Note | 3 | 3,5 | 8 | 20 | Totaux |
|---|---|---|---|---|---|
| Effectif | 1 | 1 | 2 | 1 | 5 |
| Produit de la note par son effectif | 3 | 3,5 | 16 | 20 | 42,5 |
| Effectif cumulé croissant | 1 | 2 | 4 | 5 | |
| Effectif cumulé décroissant | 5 | 4 | 3 | 1 | |

La moyenne de la série est $\frac{42,5}{5}$, c'est-à-dire 8,5.
Le mode de la série est 8.

La modalité 8 a un effectif cumulé croissant et un effectif cumulé décroissant tous deux supérieurs ou égaux à $\frac{N}{2} = 2,5$. Donc, la médiane de la série est 8.

***Conclusion***
Les deux séries ont la même moyenne, le même mode et la même médiane. On remarque cependant que les notes d'anglais varient de 3 à 20 tandis que celles de français varient de 7,5 à 10.
En anglais, les notes sont plus « étalées » qu'en français où les notes sont proches de la moyenne.
Il est donc nécessaire de définir un nouvel indicateur qui permettra de mesurer la dispersion autour de la moyenne ; cet indicateur est appelé **écart type**.

## Variance, écart type

### Définitions

- **La variance d'une série statistique, notée V, est la moyenne des carrés des écarts à la moyenne.**
- **L'écart type, noté $\sigma$, est la racine carrée de la variance : $\sigma = \sqrt{V}$.**

### Vocabulaire

La variance et l'écart type sont appelés **caractéristiques de dispersion**.

*Calculs de la variance et de l'écart type de la série des notes d'anglais*

| Note | 3 | 3,5 | 8 | 20 | Totaux |
|---|---|---|---|---|---|
| Effectif | 1 | 1 | 2 | 1 | 5 |
| Produit de la note par son effectif | 3 | 3,5 | 16 | 20 | 42,5 |
| Écart à la moyenne | – 5,5 | – 5 | – 0,5 | 11,5 | |
| Carré de l'écart à la moyenne | 30,25 | 25 | 0,25 | 132,25 | |
| Produit du carré de l'écart à la moyenne par son effectif | 30,25 | 25 | 0,5 | 132,25 | 188 |

La variance de la série est : $V = \frac{188}{5} = 37{,}6$.

L'écart type est : $\sigma = \sqrt{37{,}6}$ ; donc : $\sigma \approx 6{,}13$.

*Calculs de la variance et de l'écart type de la série des notes de français*

| Note | 7,5 | 8 | 9 | 10 | Totaux |
|---|---|---|---|---|---|
| Effectif | 1 | 2 | 1 | 1 | 5 |
| Produit de la note par son effectif | 7,5 | 16 | 9 | 10 | 42,5 |
| Écart à la moyenne | – 1 | – 0,5 | 0,5 | 1,5 | |
| Carré de l'écart à la moyenne | 1 | 0,25 | 0,25 | 2,25 | |
| Produit du carré de l'écart à la moyenne par son effectif | 1 | 0,5 | 0,25 | 2,25 | 4 |

La variance de la série est : $V = \frac{4}{5} = 0{,}8$.

L'écart type est : $\sigma = \sqrt{0{,}8}$ ; donc : $\sigma =$ 0,89.

On constate que l'écart type des notes de français est nettement inférieur à celui des notes d'anglais.
On peut conclure que Maho est plus régulier en français qu'en anglais.

**M**

Pour déterminer l'écart type d'une série statistique, on peut :
- calculer l'écart de chaque modalité à la moyenne ;
- élever chaque écart au carré ;
- multiplier chaque carré par l'effectif correspondant ;
- additionner les produits obtenus ;
- diviser par l'effectif total ;
- calculer la racine carrée de ce quotient.

# Exercices

**1.a** Dans un autobus, on a relevé l'âge des passagers.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 18 | 11 | 13 | 18 | 17 | 11 | 11 | 14 | 16 | 13 |
| 18 | 12 | 14 | 19 | 16 | 15 | 13 | 17 | 19 | 14 |
| 14 | 10 | 17 | 15 | 18 | 13 | 12 | 18 | 17 | 17 |
| 19 | 15 | 16 | 13 | 17 | 12 | 11 | 19 | 17 | 18 |

1. Établir le tableau des effectifs de cette série.
2. Quel est le mode de cette série ?
3. Représenter cette série par un diagramme en bâtons.
4. Déterminer la médiane de cette série.
5. Calculer la moyenne et l'écart type de cette série.

**1.b** Une entreprise emploie 1 directeur, 4 ingénieurs, 11 contremaîtres et 14 ouvriers.
Les salaires mensuels respectifs, en F CFA, sont : 2 200 000 F, 500 000 F, 100 000 F et 50 000 F.

1. Calculer le salaire moyen dans cette entreprise.
2. Quel est le mode de cette série ?
3. Déterminer la médiane de cette série statistique. Que signifie-t-elle ?

**1.c** Dans un village, on a recensé le nombre d'enfants pour chaque famille. On a obtenu le tableau de répartition suivant.

| Nombre d'enfants | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Nombre de familles | 6 | 8 | 12 | 15 | 20 | 10 | 5 | 4 |

1. Donner la population étudiée, le caractère et le mode.
2. Calculer la moyenne de cette série.
3. Calculer l'écart type de cette série.

# 2 Séries à modalités regroupées en classes

## 2.1. Regroupements en classes

### Introduction

Le tableau ci-dessous donne les tailles, en centimètres, de 50 élèves.

| | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 154 | 168 | 158 | 152 | 170 | 144 | 168 | 137 | 140 | 151 | 165 | 140 | 147 | 152 | 153 | 144 | 150 |
| 145 | 158 | 158 | 152 | 161 | 140 | 134 | 137 | 139 | 171 | 149 | 155 | 169 | 161 | 156 | 146 | 160 |
| 158 | 177 | 149 | 148 | 139 | 175 | 149 | 153 | 153 | 157 | 152 | 144 | 142 | 145 | 134 | 155 | |

La population étudiée est l'ensemble des 50 élèves, le caractère est la taille. Pour faciliter l'étude de cette série, on regroupe les modalités dans des intervalles, appelés **classes**, d'amplitude 10 centimètres : [130 ; 140[, [140 ; 150[, [150 ; 160[, [160 ; 170[, [170 ; 180].

La classe [130 ; 140[ contient les tailles allant de 130 cm à moins de 140 cm. Son effectif est 6 et sa fréquence 12 %. Le tableau suivant donne l'effectif et la fréquence de chaque classe.

| Classe | [130 ; 140[ | [140 ; 150[ | [150 ; 160[ | [160 ; 170[ | [170 ; 180] | Totaux |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Effectif | 6 | 15 | 18 | 7 | 4 | 50 |
| Fréquence | 12 % | 30 % | 36 % | 14 % | 8 % | 100 % |

### Effectifs cumulés et fréquences cumulées

À partir du tableau des effectifs, on veut déterminer le nombre d'élèves qui ont une taille inférieure à 160 cm, le nombre d'élèves qui ont une taille supérieure ou égale à 160 cm, et leurs pourcentages respectifs.

• Le nombre d'élèves qui ont une taille inférieure à 160 cm est 6 + 15 + 18, c'est-à-dire 39. Ce nombre représente 78 % de l'effectif total.
Le nombre 39 est appelé **effectif cumulé croissant** relatif à la classe [150 ; 160[.
**La fréquence cumulée croissante** relative à la classe [150 ; 160[ est 78 %.

• Le nombre d'élèves qui ont une taille supérieure ou égale à 160 cm est 7 + 4, c'est-à-dire 11.
Le nombre 11 est appelé **effectif cumulé décroissant** relatif à la classe [150 ; 160[.

**Définitions**

**On considère une série statistique à modalités regroupées en classes.**
**• On appelle effectif cumulé croissant relatif à une classe la somme des effectifs de cette classe et de celles qui la précèdent.**
**• On appelle fréquence cumulée croissante relative à une classe la somme des fréquences de cette classe et de celles qui la précèdent.**

**Remarques**

*• On définit de la même façon les effectifs cumulés décroissants et les fréquences cumulées décroissantes.*
*- On appelle effectif cumulé décroissant relatif à une classe la somme des effectifs de cette classe et de celles qui lui succèdent.*
*- On appelle fréquence cumulée décroissante relative à une classe la somme des fréquences de cette classe et de celles qui lui succèdent.*
*• La fréquence cumulée est égale au quotient de l'effectif cumulé par l'effectif total.*

*Exemple*

| Classe | [130 ; 140[ | [140 ; 150[ | [150 ; 160[ | [160 ; 170[ | [170 ; 180] |
|---|---|---|---|---|---|
| Effectif | 6 | 15 | 18 | 7 | 4 |
| Effectif cumulé croissant | 6 | 21 | 39 | 46 | 50 |
| Effectif cumulé décroissant | 50 | 44 | 29 | 11 | 4 |

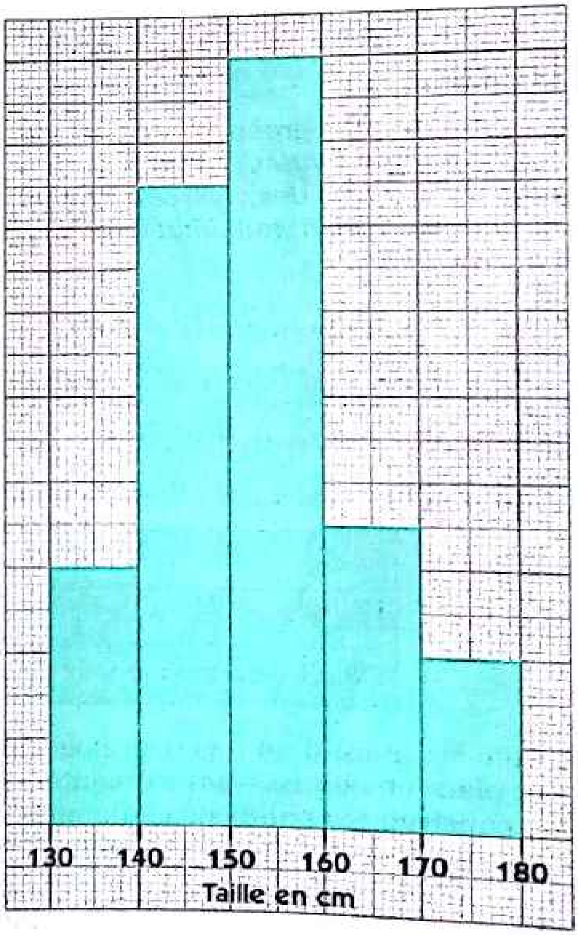
## 2.2. Représentations graphiques

### Histogramme

Pour représenter une série statistique à modalités regroupées en classes, on peut utiliser un histogramme.
Dans un **histogramme**, chaque classe est représentée par un « rectangle ».
Chaque rectangle de l'histogramme a pour « base » l'amplitude d'une classe et une aire proportionnelle à son effectif (ou à sa fréquence).

***Regroupement en classes de même amplitude***
Reprenons la série statistique relative à la taille des élèves.
Choisissons de représenter 2 élèves par une aire de $1 \text{ cm}^2$ et une taille de 10 cm par 1 cm.
Chaque rectangle de l'histogramme a pour « base » 1 cm et on détermine alors les hauteurs correspondant aux différentes classes, à l'aide d'un tableau de proportionnalité.

| Classe | Effectif | Aire du rectangle (en cm²) | Hauteur du rectangle (en cm) |
|---|---|---|---|
| [130 ; 140[ | 6 | 3 | 3 |
| [140 ; 150[ | 15 | 7,5 | 7,5 |
| [150 ; 160[ | 18 | 9 | 9 |
| [160 ; 170[ | 7 | 3,5 | 3,5 |
| [170 ; 180] | 4 | 2 | 2 |

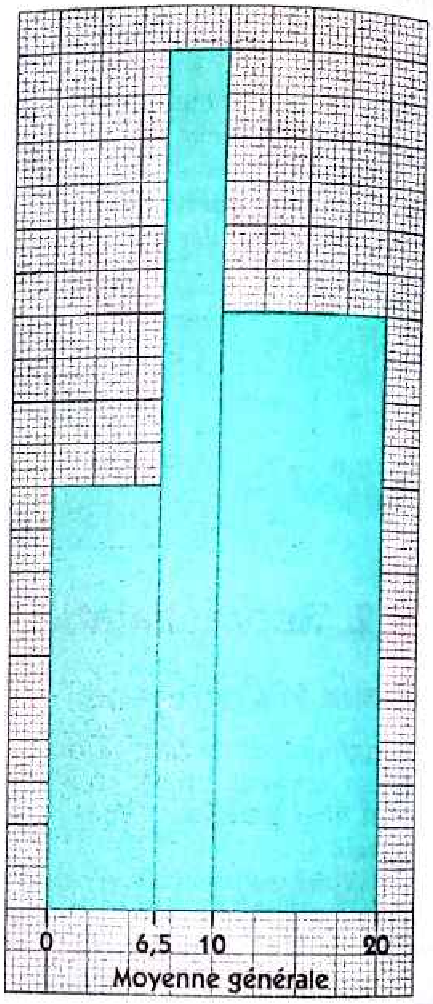


**_Regroupement en classes d'amplitudes différentes_**

Les résultats de fin d'année des 275 élèves d'un lycée sont consignés dans le tableau suivant.

| Moyenne générale | Décision de fin d'année | Nombre d'élèves |
|---|---|---|
| de 0 à moins de 6,5 | exclus | 65 |
| de 6,5 à moins de 10 | admis à redoubler | 70 |
| de 10 à 20 | admis en classe supérieure | 140 |

Les modalités de cette série statistique sont regroupées en trois classes, [0 ; 6,5[, [6,5 ; 10[, [10 ; 20], qui ont pour amplitudes respectives 6,5 ; 3,5 et 10.
Choisissons de représenter 10 élèves par une aire de 1 cm$^2$ et une moyenne de 5 par 1 cm.
Pour chaque classe, on détermine alors la base, l'aire et la hauteur du rectangle correspondant.
($Hauteur = \frac{Aire}{Base}$).




| Classe | Effectif | Aire du rectangle (en cm$^2$) | Base du rectangle (en cm) | Hauteur du rectangle (en cm) |
|---|---|---|---|---|
| [0 ; 6,5[ | 65 | 6,5 | 1,3 | 5 |
| [6,5 ; 10[ | 70 | 7 | 0,7 | 10 |
| [10 ; 20] | 140 | 14 | 2 | 7 |

## Remarque

*La classe de plus grand effectif est [10 ; 20] ; la classe de plus grande hauteur est [6,5 ; 10[.*
*Donc, dans le cas des classes d'amplitudes différentes, une classe d'effectif maximal n'est pas toujours de hauteur maximale.*

## Polygone des effectifs cumulés

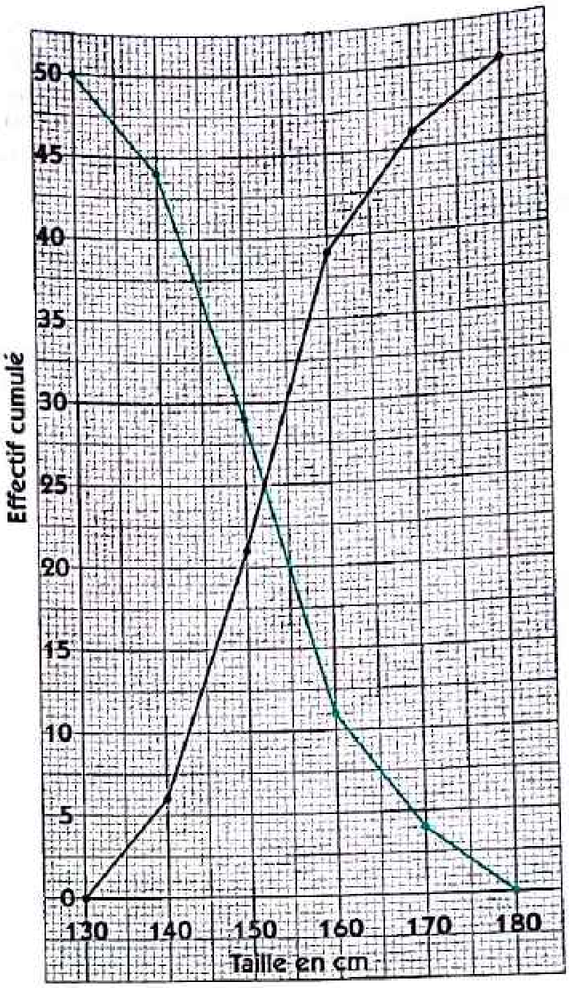
Reprenons le tableau des effectifs cumulés de la série statistique relative à la taille des élèves.

| Classe | [130 ; 140[ | [140 ; 150[ | [150 ; 160[ | [160 ; 170[ | [170 ; 180] |
|---|---|---|---|---|---|
| Effectif cumulé croissant | 6 | 21 | 39 | 46 | 50 |
| Effectif cumulé décroissant | 50 | 44 | 29 | 11 | 4 |

Le plan est muni d'un repère orthogonal.
– On place en abscisses les extrémités des classes et en ordonnées les effectifs cumulés ;
– on construit les points de cordonnées (130 ; 0), (140 ; 6), (150 ; 21), (160 ; 39), (170 ; 46) et (180 ; 50) ;
– on joint ces points par des segments.

La ligne brisée obtenue (en noir) est appelée **polygone des effectifs cumulés croissants** de la série.

**M** Pour représenter graphiquement, dans le plan muni d'un repère orthogonal, les effectifs cumulés croissants, on peut :
- placer le premier point, d'abscisse la borne inférieure de la première classe et d'ordonnée 0 ;
- placer les autres points, d'abscisses les bornes supérieures des classes et d'ordonnées les effectifs cumulés croissants correspondants ;
- joindre ces points par des segments.




**Remarque**

- *Le polygone des effectifs cumulés décroissants (courbe en couleur) s'obtient en construisant les points dont les abscisses sont les bornes inférieures des classes (sauf le dernier point) et dont les ordonnées sont les effectifs cumulés décroissants correspondants (130 ; 50), (140 ; 44), (150 ; 29), (160 ; 11), (170 ; 4) et (180 ; 0).*
*On joint ces points par des segments.*
- *La série ayant pour effectif total N, le polygone des effectifs cumulés croissants et le polygone des effectifs cumulés décroissants se coupent au point d'ordonnée $\frac{N}{2}$.*
- *On construit de manière analogue les polygones des fréquences cumulées de la série.*

## 2.3. Traitement des données

On veut déterminer le mode, la médiane, la moyenne et l'écart type de la série statistique relative à la taille des élèves.

### Détermination du mode

La classe [150 ; 160[ a l'effectif le plus grand. On dit que [150 ; 160[ est une **classe modale**.

**Définition**

**On appelle classe modale d'une série statistique à modalités regroupées en classes toute classe dont l'effectif est le plus grand.**

**Remarque**

*Une série statistique à modalités regroupées en classes peut avoir plusieurs classes modales.*

### Détermination de la médiane

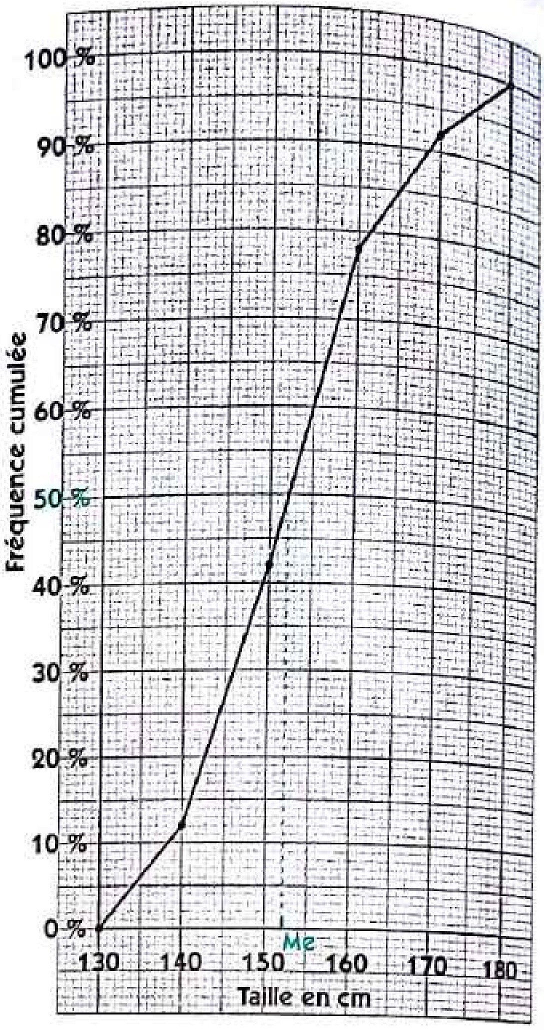
Dressons le tableau des fréquences cumulées croissantes.

| Classe | [130 ; 140[ | [140 ; 150[ | [150 ; 160[ | [160 ; 170[ | [170 ; 180] |
|---|---|---|---|---|---|
| Effectif cumulé croissant | 6 | 21 | 39 | 46 | 50 |
| Fréquence cumulée croissante | 12 % | 42 % | 78 % | 92 % | 100 % |

Traçons le polygone des fréquences cumulées croissantes. Sur ce polygone, l'abscisse du point d'ordonnée 50 % est 152,5. Le nombre 152,5 est appelé **médiane** de la série. Cette médiane appartient à l'intervalle [150 ; 160[ ; l'intervalle [150 ; 160[ est appelé **intervalle médian** de la série.

***Interprétation de cette médiane***

50 % des élèves ont une taille comprise entre 130 cm et 152,5 cm.




## Remarque

*La détermination de la médiane se fait aussi à l'aide des polygones des effectifs cumulés croissants et décroissants. C'est l'abscisse du point d'intersection de ces deux polygones.*

**M**

Pour déterminer la médiane d'une série statistique à modalités regroupées en classes, on peut utiliser l'une des méthodes suivantes.

***1re méthode***

Tracer le polygone des fréquences cumulées croissantes.

La médiane est l'abscisse du point du polygone dont l'ordonnée est 0,5 ou 50 %.

***2e méthode***

Tracer les polygones des effectifs cumulés croissants et décroissants.

La médiane est l'abscisse du point d'intersection de ces deux polygones.

## Détermination de la moyenne et de l'écart type

On prend pour modalités les **centres** des classes 135, 145, 155, 165, 175, et on travaille avec la série des centres suivante.

| Centre de la classe | 135 | 145 | 155 | 165 | 175 | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Effectif | 6 | 15 | 18 | 7 | 4 | 50 |

## Disposition pratique

| Classe | [130 ; 140[ | [140 ; 150[ | [150 ; 160[ | [160 ; 170[ | [170 ; 180] | Totaux |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Centre de la classe | 135 | 145 | 155 | 165 | 175 | |
| Effectif | 6 | 15 | 18 | 7 | 4 | 50 |
| Produit du centre par son effectif | 810 | 2 175 | 2 790 | 1 155 | 700 | 7 630 |
| Écart à la moyenne | – 17,6 | – 7,6 | 2,4 | 12,4 | 22,4 | |
| Carré de l'écart à la moyenne | 309,76 | 57,76 | 5,76 | 153,76 | 501,76 | |
| Produit du carré de l'écart à la moyenne par son effectif | 1 858,56 | 866,40 | 103,68 | 1 076,32 | 2 007,04 | 5 912 |

La moyenne de la série est : $m = \frac{7\,630}{50} = 152,6$.

La variance de la série est : $V = \frac{5\,912}{50} = 118,24$ ;

l'écart type est : $\sigma = \sqrt{118,24}$ ; donc : $\sigma \approx 10,87$.

# Exercices

**2.a** À l'entrée de la ville de Toumodi en Côte d'Ivoire, le relevé des véhicules remorques qui ont franchi le pont Lévis au cours de l'année 2000, suivant l'heure de passage, a donné le tableau suivant.

| Heure | Nombre de véhicules |
|---|---|
| [0 ; 6[ | 4 200 |
| [6 ; 10[ | 11 700 |
| [10 ; 14[ | 6 600 |
| [14 ; 17[ | 11 700 |
| [17 ; 19[ | 8 000 |
| [19 ; 24[ | 4 000 |

1. Combien de véhicules remorques ont franchi le pont Lévis au cours de l'année 2000 ?
2. Quelles sont les classes modales de cette série statistique ? Que signifient-elles ?
3. Construire l'histogramme de cette série.

**2.b** Le service du contrôle routier a interrogé 1 200 automobilistes pour connaître la distance qu'ils avaient parcourue pendant leurs dernières vacances. Les résultats sont les suivants.

| Distance (en km) | Effectif |
|---|---|
| [0 ; 500[ | 180 |
| [500 ; 1 000[ | 660 |
| [1 000 ; 1 500[ | 200 |
| [1 500 ; 2 000[ | 160 |

1. Calculer la fréquence des automobiles ayant parcouru 1 000 km ou plus.
2. Calculer la distance moyenne et l'écart type des distances parcourues.
3. Déterminer graphiquement la distance médiane.

**2.c** On dispose de la série statistique suivante relative aux exploitations agricoles d'une région, classées d'après leur superficie en hectares.

| Superficie (en ha) | Nombre d'exploitations |
|---|---|
| [0 ; 2[ | 31 |
| [2 ; 5[ | 42 |
| [5 ; 10[ | 42 |
| [10 ; 20[ | 53 |
| [20 ; 40] | 48 |

1. Compléter le tableau par les fréquences, les effectifs cumulés croissants et décroissants.
2. Construire, dans le plan muni d'un repère orthogonal, le polygone des effectifs cumulés.
3. Déterminer graphiquement le pourcentage d'exploitations de superficie inférieure à 15 ha.

**2.d** Le trésorier d'une coopérative a noté le montant des 200 premiers versements effectués durant le mois d'octobre. Les données sont représentées par le tableau des fréquences cumulées ci-dessous.

| Versement (en F CFA) | Fréquence (en %) |
|---|---|
| [1 000 ; 2 000[ | 10 |
| [2 000 ; 3 000[ | 32 |
| [3 000 ; 4 000[ | 40 |
| [4 000 ; 5 000[ | 90 |
| [5 000 ; 6 000] | 100 |

1. Dresser le tableau des effectifs de la série statistique correspondante par classe.
2. Calculer le montant moyen des versements.
3. Déterminer le nombre de versements inférieurs à 3 500 F CFA.
4. Déterminer la médiane de cette série. Quelle signification a-t-elle ?

# 3 Exemples de séries chronologiques

## 3.1. Définition

Les résultats du baccalauréat en Côte d'Ivoire de 1990 à l'an 2000 sont consignés dans le tableau suivant. *(Source : DECOB, MEN Côte d'Ivoire, septembre 2000.)*

| Année | 1990 | 1991 | 1992 | 1993 | 1994 | 1995 | 1996 | 1997 | 1998 | 1999 | 2000 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Nombre d'admis | 6 967 | 9 450 | 11 108 | 15 848 | 7 632 | 16 828 | 16 153 | 19 385 | 24 288 | 20 184 | 26 620 |

Ces mesures ont été faites tous les ans, c'est-à-dire sur une variable au cours du temps ; c'est une série **chronologique**.

**Définition**

**Une série chronologique (ou chronique) est la donnée d'une suite de nombres au cours du temps.**

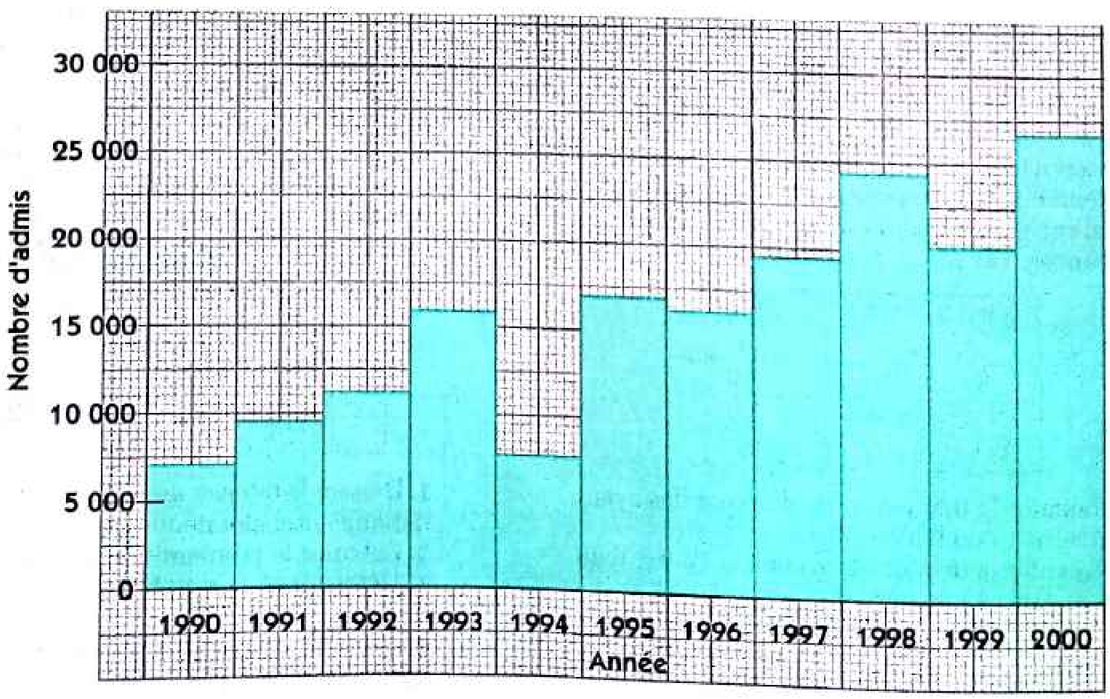
***Exemples***

- La production de café (de cacao ou de diamants) d'un pays année par année.
- La feuille de température d'un malade.
- L'ensemble des observations d'un caractère quantitatif à des époques successives.

## 3.2. Représentations graphiques

### Diagramme à bandes

Pour représenter une série chronologique, on peut utiliser un diagramme à bandes.
Reprenons la série relative aux résultats du baccalauréat en Côte d'Ivoire.
Choisissons de représenter 5 000 admis par une « bande » de hauteur 1 cm.
On en déduit le diagramme à bandes ci-dessous.



## Polygone des effectifs

La série précédente peut également être représentée par un polygone des effectifs.
Le plan est muni d'un repère orthogonal.
- On place en abscisses les années et en ordonnées les effectifs ;
- on construit les points de cordonnées : (1 990 ; 6 967), (1 991 ; 9 450), (1 992 ; 11 108), (1 993 ; 15 848), (1 994 ; 7 632), (1 995 ; 16 828), (1 996 ; 16 153), (1 997 ; 19 385), (1 998 ; 24 288), (1 999 ; 20 184) et (2 000 ; 26 620) ;
- on joint ces points par des segments.


La ligne brisée obtenue est appelée **polygone des effectifs** de la série.

***Interprétation de la représentation graphique***

Cette représentation graphique fait apparaître un certain nombre d'observations sur les 11 années :
- une tendance globale à l'accroissement du nombre de bacheliers ;
- des variations accidentelles plus ou moins brutales et imprévisibles dues à des événements exceptionnels (en 1993 lutte contre la fraude et la tricherie, en 1999 grèves d'enseignants et mouvements de contestation d'élèves).

**Remarque**

*On construit de manière analogue le polygone des fréquences.*

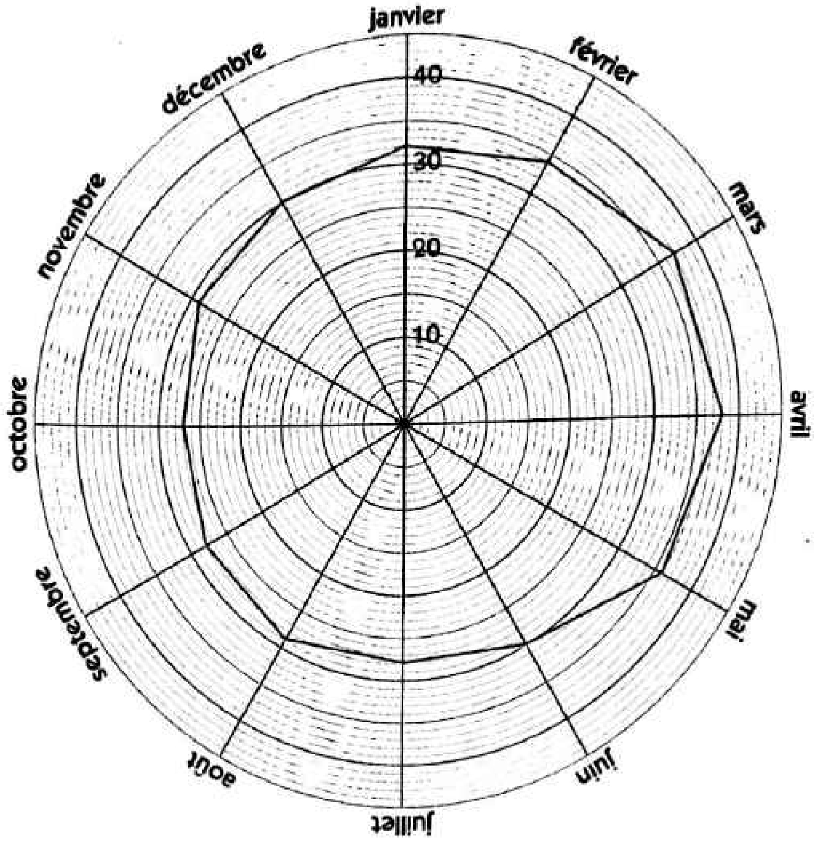
## Diagramme polaire

On utilise souvent un **diagramme polaire** pour représenter une série chronologique.

Le diagramme suivant représente les températures moyennes relevées de septembre 1999 à août 2000 dans une région du centre de la Côte d'Ivoire.

• Dans cette région, la température moyenne en janvier est de 32° et en mai elle est de 36°.

• Donner la température moyenne dans cette région en chacun des autres mois.



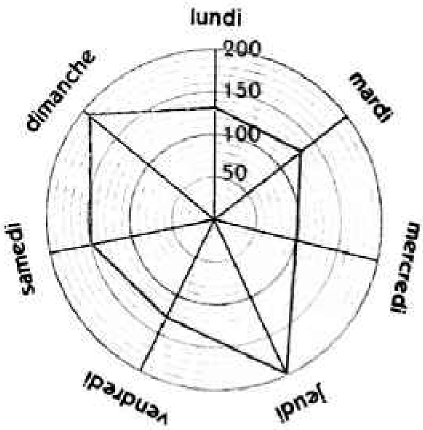

## Exercices

**3.a** La production d'œufs d'une ferme, au cours de 7 jours consécutifs, a donné le tableau suivant.

| Jour | Nombre d'œufs |
|---|---|
| lundi | 5 200 |
| mardi | 6 700 |
| mercredi | 6 300 |
| jeudi | 7 100 |
| vendredi | 6 000 |
| samedi | 6 500 |
| dimanche | 5 400 |

Construire pour cette série chronologique :
*a)* le diagramme à bandes
*b)* le polygone des effectifs
*c)* le diagramme polaire.

**3.b** Mademoiselle Sakinah a noté le nombre d'oranges vendues durant la semaine. Les données sont représentées par le diagramme polaire ci-dessous.




**1.** Dresser le tableau des effectifs de cette série chronologique.
**2.** Construire le polygone des effectifs de cette série chronologique.

# Exercices

## APPRENTISSAGE

## Caractéristiques d'une série statistique

**1** Lors d'un contrôle de fabrication, on a relevé les poids, en grammes, d'une série de pièces usinées et on a trouvé les résultats suivants.

296 ; 301 ; 294 ; 290 ; 299 ; 295 ; 298 ; 298 ; 297 ; 299 ;
303 ; 307 ; 297 ; 297 ; 299 ; 295 ; 298 ; 297 ; 295 ; 295 ;
303 ; 298 ; 306 ; 299 ; 305 ; 297 ; 304 ; 296 ; 301 ; 299 ;
302 ; 307 ; 304 ; 300 ; 299 ; 301 ; 299 ; 306 ; 308 ; 297.

1. Établir le tableau statistique où apparaissent les modalités, les effectifs et les fréquences.
2. Déterminer le(s) mode(s), la médiane et la moyenne de cette série.
3. Déterminer la variance et l'écart type.

**2** Dans un centre d'examen du baccalauréat, le nombre de candidats et leurs notes en mathématiques se répartissent de la façon suivante.

| | Nombre de candidats | Moyenne |
|---|---|---|
| Jury n° 1 | 200 | 14 |
| Jury n° 2 | 300 | 12 |

Calculer la moyenne des notes des 500 candidats de ce centre d'examen.

**3** On lance simultanément 5 pièces de monnaie non truquées et on compte le nombre X de « pile » obtenu.

Après 100 lancers, on obtient la série statistique suivante.

| Valeur de X | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Effectif | 2 | 17 | 29 | 33 | 16 | 3 |

1. Construire le diagramme en bâtons de la série statistique.
2. Dresser le tableau des effectifs cumulés croissants et décroissants.
3. Déterminer le mode, la médiane et la moyenne de cette série.
4. Calculer l'écart type.

**4** Une machine fabrique des écrous. On a noté, sur une fabrication de 350 écrous, les résultats relatifs à leur diamètre intérieur.

| Diamètre (en mm) | 5,8 | 5,85 | 5,9 | 5,95 | 6 | 6,05 | 6,1 | 6,15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Nombre d'écrous | 8 | 27 | 81 | 114 | 75 | 31 | 12 | 2 |

1. Construire le diagramme en bâtons des effectifs de cette série.
2. Déterminer la médiane de cette série. Que représente-t-elle ?
3. Calculer la moyenne et l'écart type de cette série, à $10^{-2}$ près par défaut.

**5** Deux élèves d'une classe de première littéraire ont obtenu, au cours d'un trimestre, les moyennes suivantes par matière (voir tableau ci-dessous).

| | Koné | Yéro | |
|---|---|---|---|
| Matières | Moyenne sur 20 | Moyenne sur 20 | Coefficient |
| Français | 9,25 | 8,15 | 4 |
| Histoire et géographie | 10,12 | 12,14 | 3 |
| Anglais | 13,11 | 14,21 | 4 |
| Seconde langue | 12,15 | 10,13 | 3 |
| Philosophie | 9,72 | 11,72 | 3 |
| Sciences de la vie et de la Terre | 10,00 | 9,00 | 1 |
| Sciences physiques | 6,33 | 10,33 | 1 |
| Mathématique | 14,00 | 12,00 | 2 |
| Dessin et musique | 12,00 | 11,00 | 1 |
| Éducation physique et sportive | 10,00 | 7,00 | 1 |
| Conduite | 16,00 | 15,00 | 1 |

1. Calculer la moyenne de chaque élève.
2. Calculer l'écart type de chaque série de notes.
3. L'élève qui a le mieux travaillé est celui qui a la moyenne la plus élevée et le plus petit écart type. Qui est le meilleur des deux élèves ?

**6** Le tableau ci-dessous donne les notes sur 20 obtenues par les candidats A, B, C, D, E et F aux différentes épreuves d'un examen.

| | Coefficients | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Français | 6 | 11 | 9 | 13 | 15 | 7 | 4 |
| Histoire et géographie | 4 | 13 | 11 | 9 | 13 | 16 | 5 |
| Philosophie | 5 | 10 | 6 | 11 | 8 | 7 | 13 |
| Anglais | 3 | 9 | 13 | 15 | 6 | 7 | 17 |
| Seconde langue | 3 | 11 | 12 | 7 | 9 | 15 | 13 |
| Biologie | 2 | 7 | 5 | 12 | 15 | 7 | 9 |
| Mathématique | 2 | 9 | 10 | 7 | 9 | 3 | 18 |

1. Calculer la moyenne de chaque candidat et classer ces candidats par ordre de mérite décroissant.
2. Peut-on modifier les coefficients de mathématique et de la seconde langue de façon que, sans changer le total des coefficients, le candidat E ait la moyenne ?
3. Le candidat X a eu les notes suivantes.

| | |
|---|---|
| Français | 11 |
| Histoire et géographie | 4 |
| Philosophie | 9 |
| Anglais | 11 |
| Seconde langue | 7 |
| Biologie | 9 |

Malheureusement, sa note de mathématique a été effacée. On sait que sa moyenne générale est 8,6.

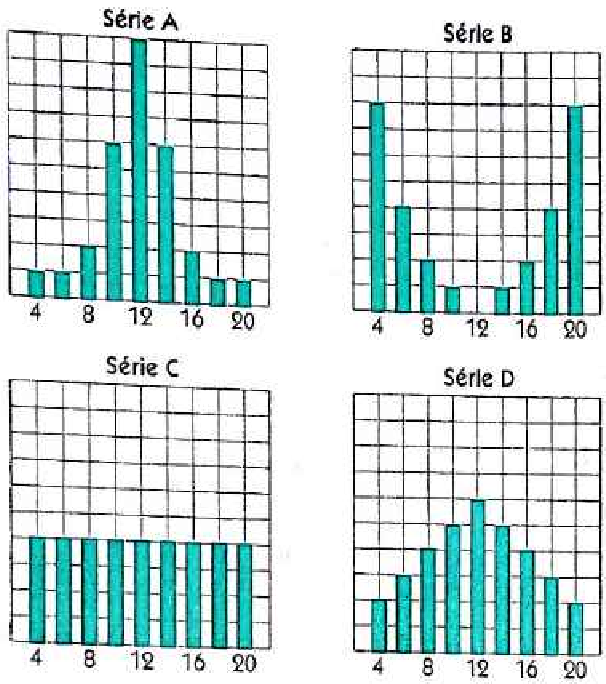
Quelle était sa note en mathématique ?

**7** Les pointures d'un stock de 500 chaussures sont réparties dans le tableau suivant.

| Pointure | 40 | 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Effectif | 30 | 10 | 10 | 200 | 20 | 200 | 20 | 10 |

1. Déterminer le(s) mode(s) de cette série statistique.
2. Dresser le tableau des effectifs cumulés croissants et décroissants.
3. En déduire la médiane de cette série.
4. Calculer la pointure moyenne de ce stock de chaussures.

**8** Voici représentées quatre séries de notes.



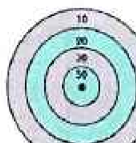

1. Déterminer la moyenne de chaque série.
2. Par lecture graphique, préciser la série qui a le plus petit écart type et celle qui a le plus grand écart type.
3. Déterminer l'écart type de la série A et celui de la série B.

**9** À l'issue d'un devoir commun, les élèves de trois classes de première ont obtenues les notes suivantes.

| Note | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Effectif 1re $L_1$ | 1 | 2 | 3 | 7 | 11 | 8 | 6 | 5 | 4 | 3 |
| Effectif 1re $L_2$ | 5 | 3 | 5 | 5 | 4 | 5 | 6 | 5 | 5 | 7 |
| Effectif 1re $L_3$ | 14 | 1 | 4 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 10 | 13 |

1. Pour chacune des trois classes :
*a)* déterminer le(s) mode(s) et l'effectif total
*b)* calculer la moyenne générale et l'écart type de la série
*c)* déterminer la classe la plus homogène.
2. Calculer la moyenne générale de ce devoir pour l'ensemble des trois classes.

**10** Deux tireurs A et B s'affrontent en vue d'une sélection lors d'une épreuve comportant vingt tirs.




| | 50 | 30 | 20 | 10 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|
| A | 4 | 6 | 5 | 4 | 1 |
| B | 6 | 3 | 5 | 3 | 3 |

Les résultats obtenus sont répartis dans le tableau ci-contre.

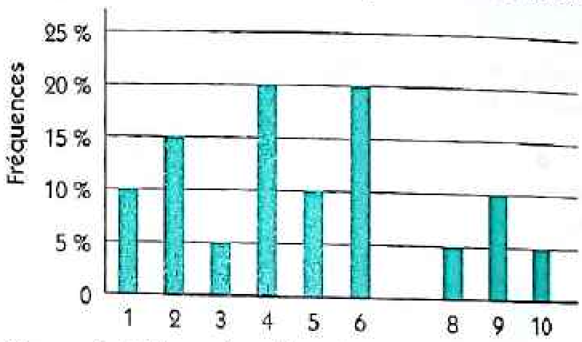
1. Calculer la moyenne de chacune des deux séries. Peut-on départager les deux concurrents ?
2. Calculer l'écart type de chacune des deux séries. Quel est le tireur le plus régulier ?

**11** Durant un mois, un client pointilleux a pesé chaque jour, à un demi-gramme près, les baguettes de pain que lui livre son boulanger. Il a inscrit les résultats dans le tableau ci-après.

| Masse | Effectif | Effectif cumulé croissant | Effectif cumulé décroissant |
|---|---|---|---|
| 140 | 24 | | |
| 140,5 | 20 | | |
| 141 | 16 | | |
| 141,5 | 14 | | |
| 142 | 13 | | |
| 142,5 | 10 | | |
| 143 | 9 | | |
| 143,5 | 7 | | |
| 144 | 3 | | |
| 144,5 | 2 | | |
| 145 | 2 | | |

1. Compléter ce tableau.
2. Calculer la moyenne de cette série statistique.
3. En déduire la quantité moyenne de pain, en grammes, achetée chaque jour par ce client.
4. Déterminer la médiane de cette série.

**12** On donne ci-dessous le diagramme en bâtons des fréquences d'une série statistique d'effectif total 500.



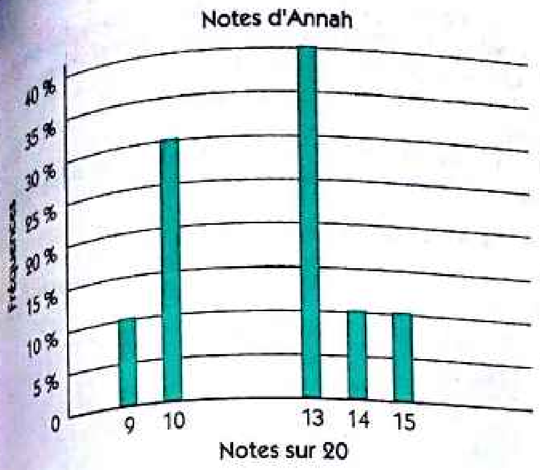

1. Dresser le tableau des effectifs et des effectifs cumulés croissants de cette série statistique.
2. Déterminer la médiane.
3. Calculer la moyenne et l'écart type.

**13** Kakou et Annah ont été présélectionnés pour participer aux Olympiades de Mathématiques. Il reste à choisir, parmi ces deux finalistes, celui qui représentera leur lycée.

Au cours de l'année scolaire, Kakou a obtenu en mathématiques les notes suivantes : 16 ; 8 ; 16 ; 8 ; 19 ; 5 ; 16 ; 8 ; 8 ; 16.

Les notes d'Annah sont données par le diagramme ci-après.

1. Pour chacun de ces deux candidats, présenter sous forme de tableau la série statistique obtenue en classant les notes par ordre croissant et en indiquant, pour chaque note, l'effectif.
2. Calculer, pour chaque série, la moyenne et l'écart type.
3. Lequel de Kakou et d'Annah auriez-vous choisi ? Pourquoi ?




**14** Un professeur de français recense le nombre de livres lus par chacun de ses 180 élèves. Il obtient le résultat suivant : 18 élèves n'ont lu aucun livre, 72 élèves ont lu 1 livre, 45 élèves ont lu 2 livres, 36 élèves ont lu 3 livres et 9 élèves ont lu 4 livres.

1. Recopier et compléter le tableau suivant.

| Nombre de livres | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| Effectif | | | | | |
| Fréquence | | | | | |
| Fréquence cumulée croissante | | | | | |
| Fréquence cumulée décroissante | | | | | |

2. Combien d'élèves ont lu au moins 2 livres ? moins de 2 livres ?
3. Quel est le mode de cette série statistique ?
4. Combien de livres sont lus en moyenne par élève ?

## Séries à modalités regroupées en classes

**15** Dans une usine de fabrication de pièces de voiture, on a relevé, par tranche de 6 heures, le nombre de pièces fabriquées par une machine.

| Heure | Nombre de pièces fabriquées |
|---|---|
| [0 ; 6[ | 300 |
| [6 ; 12[ | 1 000 |
| [12 ; 18[ | 400 |
| [18 ; 24[ | 1 300 |

Déterminer l'heure à partir de laquelle la machine a atteint 50 % de sa production journalière.

**16** Dans un club sportif, le nombre d'athlètes et leurs poids, en kilogrammes, se répartissent de la façon suivante.

| Poids | [70 ; 75[ | [75 ; 80[ | [80 ; 85[ | [85 ; 90[ | [90 ; 95[ |
|---|---|---|---|---|---|
| Effectif | 6 | 10 | 12 | 15 | 7 |

1. Construire les polygones des effectifs cumulés croissants et décroissants.
2. Calculer le pourcentage d'athlètes ayant un poids :
*a)* inférieur à 85 kg
*b)* supérieur à 80 kg
*c)* compris entre 75 kg et 90 kg.
3. Calculer le poids moyen et l'écart type de la série.

**17** Dans un magasin, sur un total de 200 paires de chaussures vendues, la répartition en milliers de francs CFA s'établit comme suit.

| Prix (en milliers de F CFA) | [1 ; 5[ | [5 ; 10[ | [10 ; 20[ |
|---|---|---|---|
| Nombre de paires | 70 | 45 | 30 |

| Prix (en milliers de F CFA) | [20 ; 30[ | [30 ; 50[ | [50 ; 100[ |
|---|---|---|---|
| Nombre de paires | 25 | 20 | 10 |

1. Construire les polygones des fréquences cumulées.
2. Déterminer graphiquement le pourcentage de paires de chaussures ayant un prix :
*a)* inférieur à 10 000 F CFA
*b)* supérieur à 30 000 F CFA
*c)* compris entre 10 000 et 30 000 F CFA.
3. Calculer le poids moyen et l'écart type de la série.

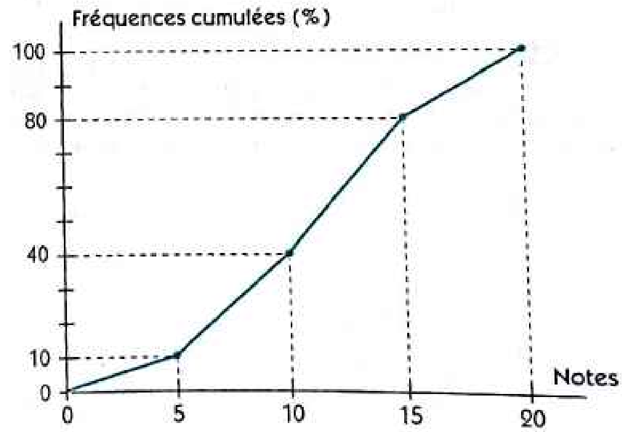
**18** Le tableau suivant donne l'âge des habitants d'un échantillon de la ville de Thiès.

| Âge | [0 ; 6[ | [6 ; 15[ | [15 ; 25[ | [25 ; 35[ | [35 ; 45[ |
|---|---|---|---|---|---|
| Effectif | 300 | 1 000 | 400 | 1 300 | 300 |

| Âge | [45 ; 60[ | [60 ; 90[ |
|---|---|---|
| Effectif | 1 000 | 400 |

1. Construire un histogramme représentant cette série.
2. Déterminer le nombre d'individus de cet échantillon dont l'âge :
*a)* est compris entre 5 ans et 20 ans
*b)* est supérieur à 50 ans
*c)* est inférieur à 30 ans.
3. Construire le polygone des effectifs cumulés croissants et celui des effectifs cumulés décroissants.
4. Déterminer graphiquement les coordonnées du point d'intersection de ces deux courbes. Commenter.

**19** Le graphique suivant représente le polygone des fréquences cumulées croissantes d'une série de 70 notes.




1. Compléter le tableau suivant.

| Classe | [0 ; 5[ | [5 ; 10[ | [10 ; 15[ | [15 ; 20[ |
|---|---|---|---|---|
| Centre de classe | | | | |
| Fréquence | | | | |
| Effectif | | | | |

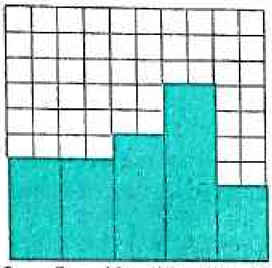
2. Construire l'histogramme des effectifs de cette série.
3. Quelle est la note moyenne ?
4. Calculer l'écart type de la série.

**20** Le tableau ci-dessous donne le nombre d'auditeurs, en milliers, d'une station de radio suivant l'heure d'écoute.

| Heure d'écoute | [4 ; 6[ | [6 ; 8[ | [8 ; 10[ |
|---|---|---|---|
| Nombre d'auditeurs | 1 000 | 1 200 | 800 |
| Heure d'écoute | [10 ; 12[ | [12 ; 13[ | [13 ; 15[ |
| Nombre d'auditeurs | 900 | 2 000 | 700 |
| Heure d'écoute | [15 ; 18[ | [18 ; 20[ | [20 ; 24[ |
| Nombre d'auditeurs | 600 | 2 300 | 500 |

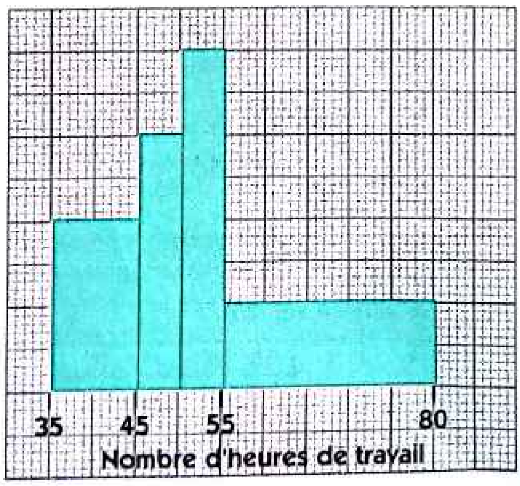
1. *a)* Construire le polygone des fréquences cumulées croissantes.
*b)* En déduire l'intervalle médian de la série.
Donner une interprétation de ce résultat.
2. Déterminer le mode et la moyenne de la série.
3. Déterminer la variance et l'écart type de la série.

**21** Une entreprise a récapitulé les montants des factures de ses 460 clients, en millions de francs CFA, dans l'histogramme suivant.




1. Dresser le tableau des effectifs et des fréquences de cette série.
2. Quelle est la classe modale ?
3. Quel est le pourcentage de clients ayant une facture supérieure à 15 millions de francs CFA ?
4. *a)* Construire, sur un même graphique, les polygones des effectifs cumulés croissants et décroissants.
*b)* En déduire la médiane de la série.
5. Calculer le montant moyen d'une facture.

**22** Dans un lycée, on a interrogé 320 élèves sur le nombre d'heures de travail qu'ils effectuent chaque semaine (y compris les cours). Les résultats de cette enquête sont représentés par l'histogramme suivant.




On peut remarquer que, pour chaque élève, le temps de travail est compris entre 35 heures et 80 heures.
1. Calculer les effectifs de chaque classe
2. Construire le diagramme des effectifs cumulés croissants.
3. Calculer le nombre moyen d'heures de travail qu'effectuent les élèves chaque semaine.

**23** Les salaires journaliers, en francs CFA, des ouvriers d'une entreprise de Douala sont répartis dans le tableau suivant.

| Salaire | [1 000 ; 2 000[ | [2 000 ; 3 000[ |
|---|---|---|
| Effectif | 34 | 76 |
| Salaire | [3 000 ; 5 000[ | [5 000 ; 8 000[ |
| Effectif | 51 | 39 |

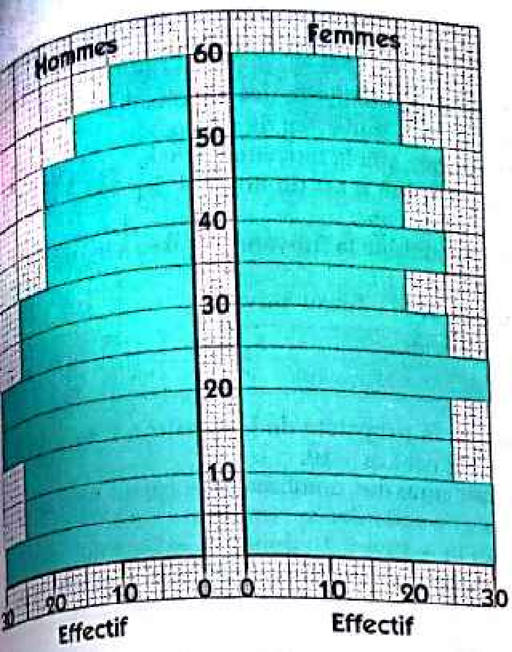
1. Calculer les fréquences de chaque classe.
2. Construire un histogramme représentant cette série.
3. Construire le polygone des fréquences cumulées croissantes.
4. Déterminer la classe modale.
5. *a)* Calculer le salaire journalier moyen des employés de cette entreprise.
*b)* Quel est le pourcentage d'employés qui gagnent moins que ce salaire moyen ?
6. Déterminer graphiquement le salaire journalier médian.

**24** Une machine fabrique des rondelles dont le diamètre doit mesurer 20 mm. On prélève un échantillon de 100 rondelles et on mesure les diamètres. Les mesures, réparties en classes d'amplitude 0,25 mm, sont consignées dans le tableau suivant.

| Diamètre | Effectif |
|---|---|
| [19,25 ; 19,50[ | 5 |
| [19,50 ; 19,75[ | 9 |
| [19,75 ; 20,00[ | 25 |
| [20,00 ; 20,25[ | 32 |
| [20,25 ; 20,50[ | 22 |
| [20,50 ; 20,75[ | 7 |

1. Calculer la moyenne et l'écart type de cette série statistique.
2. Les rondelles sont acceptables si leur diamètre appartient à l'intervalle [19,90 ; 20,10]. Quel est le pourcentage de rondelles acceptables dans l'échantillon prélevé ?
3. La machine est bien réglée lorsqu'un échantillon de 100 rondelles en comporte au moins 95 % d'acceptables et a un écart type inférieur à 0,05.
La machine est-elle bien réglée ?

**25** On répartit en classes d'amplitude 5 ans les âges de la population masculine et féminine d'un village. Sur la pyramide ci-après de ces âges, on lit par exemple 15 hommes âgés de 50 à 55 ans et 20 femmes âgées de 40 à 45 ans.
1. Dresser le tableau des effectifs des populations masculine et féminine de ce village.
2. Calculer la moyenne d'âge de chacune de ces deux populations.
3. Dresser le tableau des effectifs de la population totale de ce village.
4. Calculer la moyenne d'âge de cette population.




**26** La pesée des boîtes de désherbant produit par usine, en une journée, a donné les résultats suints en grammes.
997 ; 9 002 ; 8 988 ; 9 010 ; 9 011 ; 9 005 ;
004,5 ; 9 000 ; 8 992 ; 9 007,5 ; 9 007 ; 8 996,5 ;
990 ; 9 004 ; 8 993,5 ; 9 001 ; 8 995 ; 9 009 ;
003 ; 8 994 ; 9 006.

1. Regrouper ces valeurs en prenant 8 988 comme valeur inférieure de la série et 4 comme amplitude de classe.
2. Donner la classe modale.
3. Dresser le tableau des effectifs cumulés croissants et décroissants.
4. Construire l'histogramme des effectifs et le polygone des effectifs.
5. Déterminer la médiane.
6. Calculer la moyenne et l'écart type de cette série.

**27** Dans une caisse d'épargne, les possesseurs de livrets se répartissent comme suit, d'après leur avoir en milliers de francs CFA, à une date déterminée.

| Dépôts | [10 ; 120[ | [120 ; 160[ | [160 ; 200[ |
|---|---|---|---|
| Nombre de livrets | 160 | 330 | 440 |
| Dépôts | [200 ; 280[ | [280 ; 360[ | [360 ; 400[ |
| Nombre de livrets | 550 | 380 | 140 |

1. Dresser un tableau dans lequel on fera apparaître les effectifs, les fréquences en pourcentage, les fréquences cumulées croissantes et décroissantes.
2. Construire l'histogramme des effectifs.
3. Déterminer le pourcentage de livrets ayant moins de 160 000 F CFA.
4. Déterminer le pourcentage de livrets ayant au moins 280 000 F CFA.
5. Calculer la moyenne et l'écart type.

**28** Le tableau suivant donne les tailles, exprimées en cm, des 50 élèves d'une classe de seconde littéraire.
139 ; 171 ; 134 ; 155 ; 144 ; 153 ; 175 ; 139 ; 149 ; 154 ;
137 ; 140 ; 142 ; 168 ; 152 ; 149 ; 158 ; 155 ; 168 ; 144 ;
134 ; 144 ; 137 ; 156 ; 153 ; 149 ; 159 ; 158 ; 150 ; 147 ;
152 ; 140 ; 161 ; 153 ; 177 ; 146 ; 152 ; 140 ; 145 ; 152 ;
151 ; 145 ; 157 ; 156 ; 160 ; 170 ; 165 ; 158 ; 158 ; 161.

1. Former une série statistique à modalités regroupées :
*a)* en classes d'amplitude 5 cm (cette série est notée S)
*b)* en classes d'amplitude 10 cm (cette série est notée T).
2. Construire les histogrammes des effectifs et les polygones des effectifs cumulés croissants des séries S et T.
3. Déterminer la médiane et la moyenne de chacune des séries S et T.
4. Calculer l'écart type de S et celui de T.
5. Quelles conclusions peut-on en déduire ?

## Séries chronologiques

**29** Le tableau suivant indique l'évolution de la production industrielle dans un pays au cours de 9 années consécutives.

| Année | 1993 | 1994 | 1995 |
|---|---|---|---|
| Production (en milliers de tonnes) | 67 | 85 | 89 |
| Année | 1996 | 1997 | 1998 |
| Production (en milliers de tonnes) | 78 | 96 | 104 |
| Année | 1999 | 2000 | 2001 |
| Production (en milliers de tonnes) | 93 | 110 | 88 |

Construire un diagramme à bandes de cette série chronologique.

**30** Le tableau suivant indique la vente de véhicules d'un concessionnaire automobile au cours de 12 mois consécutifs.
Construire un diagramme polaire de cette série chronologique.

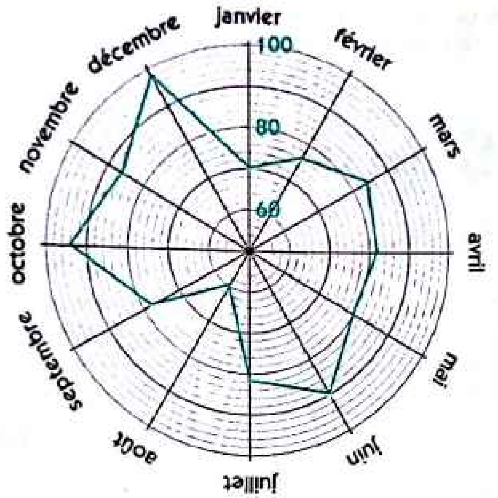
| Mois | janvier | février | mars |
|---|---|---|---|
| Nombre de véhicules vendus | 27 | 28 | 32 |
| Mois | avril | mai | juin |
| Nombre de véhicules vendus | 23 | 30 | 31 |
| Mois | juillet | août | septembre |
| Nombre de véhicules vendus | 29 | 6 | 28 |
| Mois | octobre | novembre | décembre |
| Nombre de véhicules vendus | 37 | 36 | 29 |

**31** Le diagramme polaire ci-après donne les exportations de produits manufacturés d'une usine, en millions de francs CFA, au cours des 12 mois de l'année.
1. Compléter le tableau suivant.

| Mois | janvier | février | mars |
|---|---|---|---|
| Exportation (en millions de F CFA) | 70 | | |
| Mois | avril | mai | juin |
| Exportation (en millions de F CFA) | 82 | | |
| Mois | juillet | août | septembre |
| Exportation (en millions de F CFA) | | 60 | |

| Mois | octobre | novembre | décembre |
|---|---|---|---|
| Exportation (en millions de F CFA) | | | 98 |

**2.** Construire un polygone des effectifs de cette série chronologique.
**3.** Calculer la moyenne annuelle des exportations.




**32** Le diagramme polaire ci-dessous donne les notes moyennes d'un élève dans différentes disciplines pour les deux semestres de l'année.
Donner une autre représentation graphique des résultats scolaires de cet élève.


## APPROFONDISSEMENT

**33** La distribution des salaires mensuels dans une usine a pour moyenne 125 000 F CFA et pour écart type 20 000 F CFA.
Déterminer, dans chaque cas, la moyenne et l'écart type des salaires :
*a)* on augmente chaque salaire de 2 500 F CFA
*b)* on augmente chaque salaire de 2 %.

**34 La méthode des décréments**

**1.** Soit $m$ la moyenne de $n$ nombres $x_1, x_2, ..., x_n$.
Démontrer que la moyenne de $n$ nombres $x_1 + a, x_2 + a, ..., x_n + a$ (où $a$ est un nombre donné) est $m + a$.
**2.** *Application*
Soit à calculer la moyenne $m$ des nombres : 8, 10, 11, 17 et 5.
On établit le tableau suivant.

| Nombre $x_i$ | 8 | 10 | 11 | 17 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Nombre $x_i - 10$ | −2 | 0 | 1 | 7 | −5 |

D'après la propriété de la question 1, la moyenne des $(x_i - 10)$ est : $m - 10$.
La moyenne des nombres $(x_i - 10)$ est plus facile à calculer que celle des $x_i$ ; on trouve : 0,2.
On a : $m - 10 = 0{,}2$ ; donc : $m = 10{,}2$.
En utilisant une méthode analogue, calculer la moyenne des nombres 18, 8, 11, 7, 9, 13 et 10.

**35** Un journaliste a constaté que, dans son pays, 24 % des étudiants inscrits dans un établissement d'enseignement supérieur sont issus d'une famille d'agriculteurs et 13 % d'une famille d'ouvriers.
Dans son journal, il écrit : « À l'université, les enfants d'ouvriers sont désavantagés par rapport aux enfants d'agriculteurs. »
**1.** Les données recueillies par le journaliste sont-elles suffisantes pour justifier cette affirmation ?
**2.** Sinon, à quelles conditions cette affirmation est-elle vraie ? À quelles conditions est-elle fausse ?
*(On pourra noter $x$ et $y$ les pourcentages d'agriculteurs et d'ouvriers dans la population totale de ce pays.)*

**36** Le tableau suivant donne la répartition d'un groupe d'enfants par leur taille, en centimètres.

| Taille (en cm) | Effectif |
|---|---|
| [80 ; 90[ | 3 |
| [90 ; 95[ | 15 |
| [95 ; 100[ | 22 |
| [100 ; 105[ | 18 |
| [105 ; 110[ | 12 |
| [110 ; 120[ | 5 |

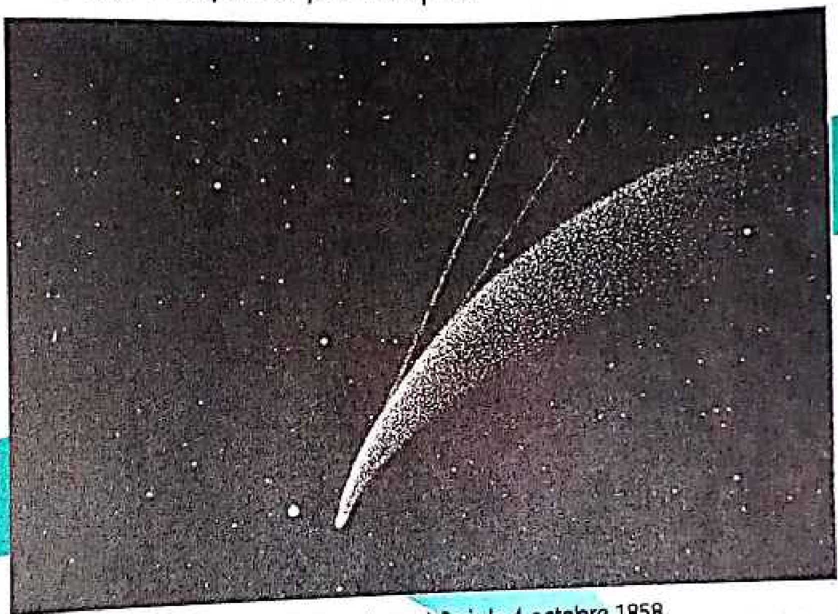
**1.** *a)* Construire l'histogramme des effectifs de cette série.
*b)* En déduire le polygone des effectifs.
**2.** Calculer la moyenne $m$ de cette série.
**3.** De façon générale, en statistique, une répartition est dite **normale** lorsque son polygone des effectifs a l'aspect d'une courbe en cloche, centrée en $m$. Dans ce cas, les intervalles $[m - \sigma ; m + \sigma]$, $[m - 2\sigma ; m + 2\sigma]$ et $[m - 3\sigma ; m + 3\sigma]$ contiennent respectivement 68 %, 95 % et 99 % de l'effectif.
La répartition de la série donnée est-elle normale ?

6

# Étude de fonctions

## Introduction

*Certaines comètes décrivent dans le système solaire des trajectoires hyperboliques ou paraboliques.*



© Hachette

La comète de Donati, vue à Paris le 4 octobre 1858.
Dessin de E. Guillemin et Ph. Benoist,
dans *Le ciel, notions d'astronomie élémentaire*, Hachette, 1877.

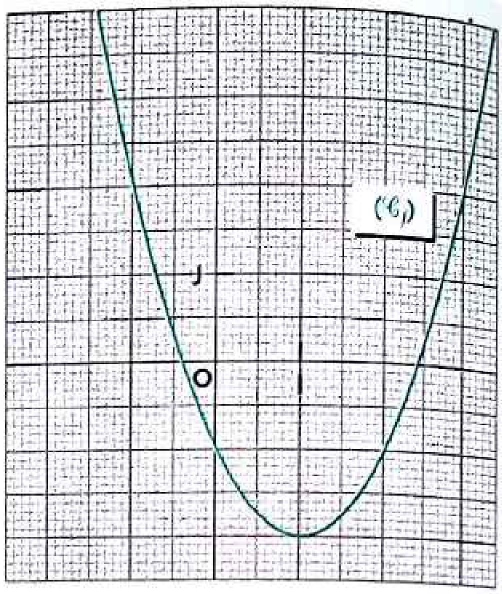
## SOMMAIRE

# 1 Applications de la dérivation

## 1.1. Dérivée et sens de variation

Le plan est muni du repère (O, I, J).

La courbe $(\mathscr{C}_f)$ ci-contre est la représentation graphique de la fonction $f$ définie par : $f(x) = x^2 - 2x - 1$.




- Déterminer la fonction dérivée de $f$.
- Construire la tangente (T) à la courbe $(\mathscr{C}_f)$ au point A d'abscisse $-2$.
- Construire la tangente (T') à la courbe $(\mathscr{C}_f)$ au point B d'abscisse 2.
- On constate que :
  – la droite (T) est la représentation graphique d'une fonction affine décroissante ;
  – la droite (T') est la représentation graphique d'une fonction affine croissante.
  Quelles conjectures peut-on faire pour le sens de variation de $f$ « aux voisinages » de $-2$ et de 2 ?
- En utilisant la courbe $(\mathscr{C}_f)$, dresser le tableau de variation de la fonction $f$.
  Les conjectures précédentes sont-elles vraies ?

On admet la propriété suivante.

### Propriété

**Soit $f$ une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I.**
- **Si $f'$ est positive sur I, alors $f$ est croissante sur I.**
- **Si $f'$ est négative sur I, alors $f$ est décroissante sur I.**
- **Si $f'$ est nulle sur I, alors $f$ est constante sur I.**

***Exemples***

- Soit $f$ la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$.

$f$ est une fonction rationnelle, elle est donc dérivable sur les intervalles $]-\infty\,;2[$ et $]2\,;+\infty[$ ; sa dérivée est la fonction $f' : x \mapsto \dfrac{-3}{(x-2)^2}$.

On a : pour tout $x \in ]-\infty\,;2[$, $f'(x) < 0$ ;
pour tout $x \in ]2\,;+\infty[$, $f'(x) < 0$.

Donc : $f$ est décroissante sur $]-\infty\,;2[$ ;
$f$ est décroissante sur $]2\,;+\infty[$.

On en déduit, ci-contre, le tableau de variation de $f$.

| $x$ | $-\infty$ | | 2 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | ‖ | $-$ | |
| $f(x)$ | | ↘ | ‖ | ↘ | |

- Soit $g$ la fonction définie par : $g(x) = -x^2 + 3x + 1$.

$g$ est une fonction polynôme, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ ; sa dérivée est la fonction $g' : x \mapsto -2x + 3$.

On a : pour tout $x \in ]-\infty\,;\frac{3}{2}[$, $g'(x) > 0$ ;
pour tout $x \in ]\frac{3}{2}\,;+\infty[$, $g'(x) < 0$.

Donc : $g$ est croissante sur $]-\infty\,;\frac{3}{2}[$ ;
$g$ est décroissante sur $]\frac{3}{2}\,;+\infty[$.

On en déduit, ci-contre, le tableau de variation de $g$, que l'on complète en calculant : $g(\frac{3}{2}) = \frac{13}{4}$.

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{3}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | 0 | $-$ | |
| $g(x)$ | | ↗ | $\frac{13}{4}$ | ↘ | |

**Remarque**

*$g'$ est positive sur $]-\infty\,;\frac{3}{2}[$, nulle en $\frac{3}{2}$ et négative sur $]\frac{3}{2}\,;+\infty[$.*

*On dit que $g'$ s'annule et change de signe en $\frac{3}{2}$.*

## 1.2. Dérivée et extremum

On admet la propriété suivante.

**Propriété**

**Soit $f$ une fonction dérivable sur un intervalle $]a\,;b[$ et $x_0$ un élément de $]a\,;b[$. Si $f'$ s'annule et change de signe en $x_0$, alors $f$ admet un extremum relatif en $x_0$.**

| $x$ | $a$ | | $x_0$ | | $b$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | − | |
| $f(x)$ | | ↗ | M | ↘ | |

$f$ admet un maximum relatif M en $x_0$

| $x$ | $a$ | | $x_0$ | | $b$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | − | 0 | + | |
| $f(x)$ | | ↘ | $m$ | ↗ | |

$f$ admet un minimum relatif $m$ en $x_0$

*Exemples*

Soit $f$ la fonction définie par : $f(x) = -x^3 + 3x + 4$.

$f$ est une fonction polynôme, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

Sa dérivée est la fonction $f'\,: x \mapsto -3(x+1)(x-1)$.

- La fonction $f'$ s'annule et change de signe en $-1$ ;
donc $f$ admet en $-1$ un extremum relatif qui est 2.
On a : pour tout $x \in ]-\infty\,;-1[$, $f'(x) < 0$ ;
pour tout $x \in ]-1\,;1[$, $f'(x) > 0$.
Donc : 2 est un minimum relatif de $f$.

- La fonction $f'$ s'annule et change de signe en 1 ;
donc $f$ admet en 1 un extremum relatif qui est 6.
On a : pour tout $x \in ]-1\,;1[$, $f'(x) > 0$ ;
pour tout $x \in ]1\,;+\infty[$, $f'(x) < 0$.
Donc : 6 est un maximum relatif de $f$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | − | 0 | + | 0 | − | |
| $f(x)$ | | ↘ | 2 | ↗ | 6 | ↘ | |

## 1.3. Travaux dirigés

*Pierre de FERMAT (1601-1665), magistrat français et conseiller au parlement de Toulouse, était un fervent amateur de mathématiques. Il a largement contribué à l'essor de la géométrie analytique, du calcul infinitésimal et du calcul des probabilités.*

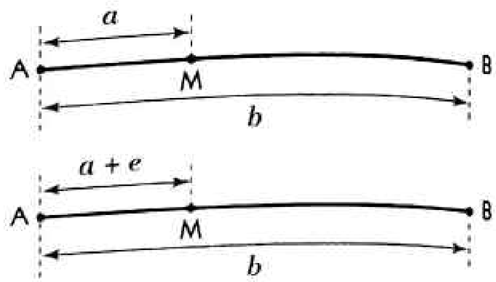
*D'après sa méthode, toute la théorie de la recherche du maximum et du minimum suppose la position de deux inconnues selon la seule règle que voici :*

*• Soit a une inconnue quelconque de la question (qu'elle ait une, deux ou trois dimensions, suivant qu'il convient d'après l'énoncé). On exprimera la quantité maxima ou minima en a, au moyen de termes qui pourront être de degrés quelconques. On substituera ensuite a + e à l'inconnue primitive a, et on exprimera ainsi la quantité maxima ou minima en termes où entreront a et e à des degrés quelconques. On adégalera, pour parler comme Diophante, les deux expressions de la quantité maxima ou minima, et on retranchera les termes communs de part et d'autre. Cela fait, il se trouvera que de part et d'autre tous les termes seront affectés de e ou d'une de ses puissances. On divisera tous les termes par e, ou par une puissance de e d'un degré plus élevé, de façon que, dans l'un au moins des termes de l'un quelconque des membres, e disparaisse entièrement. On supprimera ensuite tous les termes où entrera encore e ou*

*l'une de ses puissances et l'on égalera les autres, ou bien, si dans l'un des membres il ne reste rien, on égalera, ce qui revient au même, les termes en plus aux termes en moins. La résolution de cette dernière équation donnera la valeur de a, qui conduira au maximum ou au minimum, en reprenant sa première expression. »*

**Soit [AB] un segment de longueur $b$ ($b > 0$).**
**On se propose de déterminer le point M de [AB] tel que AM × MB soit maximal.**
**1. Déterminer le point M par la méthode de Fermat.**
**2. Démontrer que le problème revient à déterminer le maximum de la fonction $f : x \mapsto x(b - x)$ sur l'intervalle $[0 ; b]$. Déterminer alors M.**

## Solution




1. • Posons d'une part : AM = $a$.
On a : AM × MB = $a(b - a)$ ;
AM × MB = $-a^2 + ba$ (I).

• Posons d'autre part : AM = $a + e$.
On a : AM × MB = $(a + e)(b - a - e)$ ;
AM × MB = $-a^2 + ba - 2ea + be - e^2$ (II).

• On égale les deux expressions : $-a^2 + ba = -a^2 + ba - 2ea + be - e^2$.
• On supprime les termes communs : $-2ea + be - e^2 = 0$.
• On divise tous les termes par $e$ : $-2a + b - e = 0$.
• On supprime $e$ : $-2a + b = 0$.
• On conclut : $a = \dfrac{b}{2}$.
Donc, M est le milieu du segment [AB].

2. Posons : AM = $x$ ; on a : AM × MB = $x(b - x)$.
On doit chercher le maximum de la fonction $f : x \mapsto x(b - x)$ sur $[0 ; b]$.
On a : $f(x) = -x^2 + bx$ ;
$f'(x) = -2x + b$.
On en déduit, ci-contre, le tableau de variation de $f$.
Le maximum de $f$ est atteint pour : $x = \dfrac{b}{2}$ ;
ce maximum est alors $\dfrac{b^2}{4}$.

| $x$ | $0$ | | $\frac{b}{2}$ | | $b$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | − | |
| $f(x)$ | 0 | ↗ | $\frac{b^2}{4}$ | ↘ | 0 |

**M**

Pour résoudre un problème d'optimisation, on peut :
- faire apparaître une fonction qui sert de modèle mathématique au phénomène étudié ;
- étudier les variations de cette fonction et préciser ses extremums ;
- confronter les résultats théoriques avec le phénomène réel.

# Exercices

**1.a** Dans chacun des cas suivants, étudier sur I les variations de la fonction $f$.
*a)* $f(x) = -2x + 3$ ; $I = \mathbb{R}$
*b)* $f(x) = 4x$ ; $I = \mathbb{R}$
*c)* $f(x) = -x^2 + 4x$ ; $I = [-1 ; 5]$
*d)* $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + x - 2$ ; $I = [-3 ; 3]$
*e)* $f(x) = \dfrac{x}{x + 1}$ ; $I = [-2 ; 1]$
*f)* $f(x) = \dfrac{-2x + 1}{x + 3}$ ; $I = [-4 ; 0]$.

**1.b** Soit $f$ la fonction définie par : $f(x) = -x^2 + 2x + 3$.
*a)* Étudier les variations de $f$ sur $[-1 ; 3]$.
*b)* Justifier que 4 est le maximum de $f$ sur $[-1 ; 3]$.

**1.c** Soit $f$ la fonction définie par : $f(x) = x^2 - 4x + 3$.
*a)* Étudier les variations de $f$ sur $[0 ; 4]$.
*b)* Justifier que $-1$ est le minimum de $f$ sur $[0 ; 4]$.

# 2 Étude de fonctions polynômes et homographiques

Le plan est muni du repère (O, I, J).

## 2.1. Étude de fonctions polynômes

### Fonctions polynômes du second degré

Le repère (O, I, J) est orthogonal.

**1. Soit $f$ la fonction définie par : $f(x) = x^2 + x - 2$.**

**1°) Étudier les variations de $f$ et construire sa représentation graphique ($\mathscr{C}_f$).**

**2°) Résoudre graphiquement l'inéquation : $x^2 + x - 2 \leq 0$.**

**Solution**

***1°) Ensemble de définition***

$f$ est une fonction polynôme, elle est donc définie en tout élément de $\mathbb{R}$.

***Dérivée et sens de variation***

$f$ est une fonction polynôme, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

Sa dérivée est la fonction $f' : x \mapsto 2x + 1$.

On a : $f'(-\frac{1}{2}) = 0$ et $f(-\frac{1}{2}) = -\frac{9}{4}$ ;

$f'(x) > 0$ *équivaut à* $x > -\frac{1}{2}$ ;

$f'(x) < 0$ *équivaut à* $x < -\frac{1}{2}$.

Donc : $f$ est croissante sur $]-\frac{1}{2} ; +\infty[$ ;

$f$ est décroissante sur $]-\infty ; -\frac{1}{2}[$.

***Tableau de variation***

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{1}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $f(x)$ | | $\searrow$ | $-\frac{9}{4}$ | $\nearrow$ | |

***Représentation graphique***

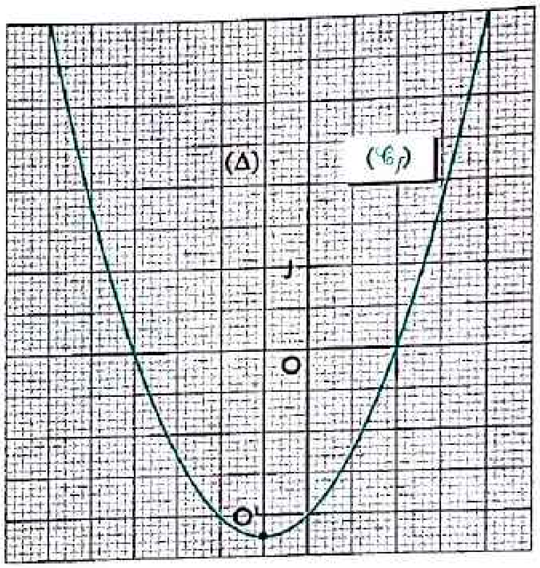



***Table de valeurs***

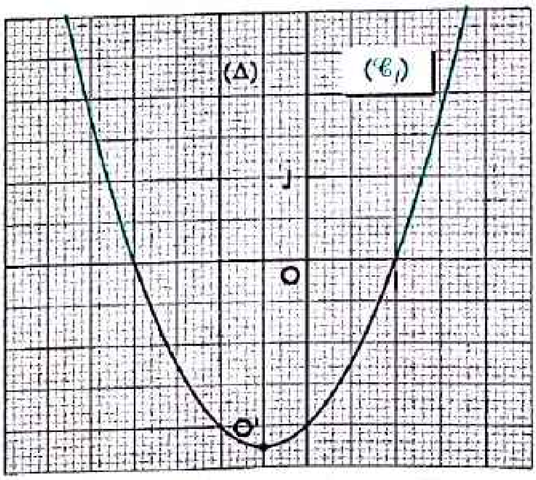
| $x$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $-\frac{1}{2}$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 4 | 0 | $-2$ | $-\frac{9}{4}$ | $-2$ | 0 | 4 |

($\mathscr{C}_f$) est la parabole de sommet $O'(-\frac{1}{2} ; -\frac{9}{4})$ et d'axe la droite ($\Delta$) d'équation : $x = -\frac{1}{2}$.

2°) Colorions en noir la partie de ($\mathscr{C}_f$) située au-dessous de la droite (OI).

Les solutions de l'inéquation $x^2 + x - 2 \leq 0$ sont les abscisses des points de la partie coloriée en noir.

Donc, l'ensemble des solutions est : $S = [-2 ; 1]$.






Scanned by CamScanner

**M** Pour étudier une fonction $f$, en l'absence de consignes particulières, on peut adopter le plan suivant.

- Déterminer l'ensemble de définition de $f$.
- Déterminer la dérivée de $f$.
- Donner le sens de variation de $f$.
- Dresser la tableau de variation de $f$.
- Donner une table de valeurs de $f$.
- Construire la représentation graphique de $f$.

**2. Soit $g$ la fonction définie par : $g(x) = -x^2 + 4x - 3$.**

**1°) Étudier les variations de $g$ et construire sa représentation graphique $(\mathscr{C}_g)$.**

**2°) En déduire la représentation graphique de la fonction $h : x \mapsto |-x^2 + 4x - 3|$.**

## Solution

**1°) *Ensemble de définition***

$g$ est une fonction polynôme, elle est donc définie en tout élément de $\mathbb{R}$.

***Dérivée et sens de variation***

$g$ est une fonction polynôme, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.
Sa dérivée est la fonction $g' : x \mapsto -2x + 4$.

On a : $g'(2) = 0$ et $g(2) = 1$ ;
$g'(x) > 0$ *équivaut à* $x < 2$ ;
$g'(x) < 0$ *équivaut à* $x > 2$.

Donc : $g$ est croissante sur $]-\infty\,;2[$ ;
$g$ est décroissante sur $]2\,;+\infty[$.

***Tableau de variation***

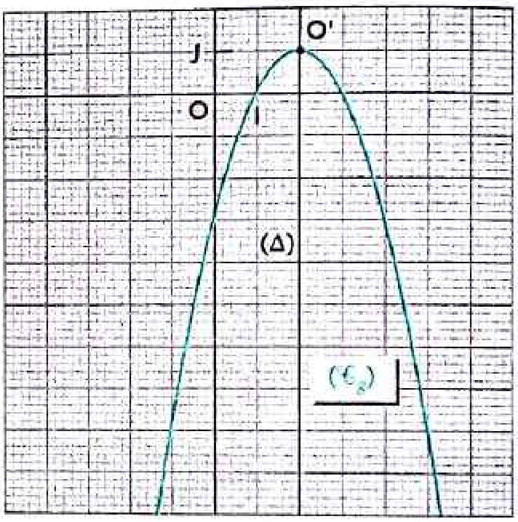
| $x$ | $-\infty$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g(x)$ | | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | |

***Table de valeurs***

| $x$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ | $4$ | $5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | $-8$ | $-3$ | $0$ | $1$ | $0$ | $-3$ | $-8$ |

$(\mathscr{C}_g)$ est la parabole de sommet O'(2 ; 1) et d'axe la droite $(\Delta)$ d'équation : $x = 2$.

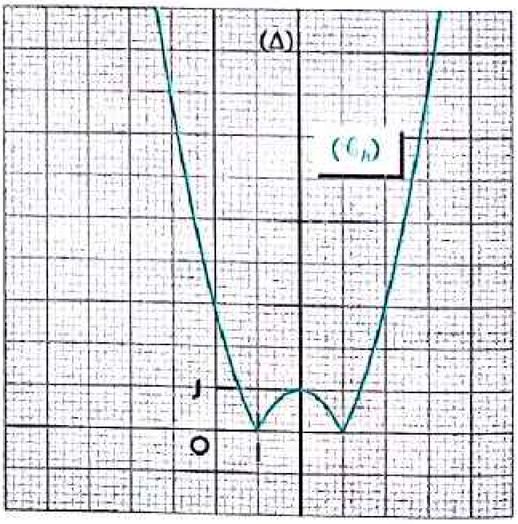
***Représentation graphique***




**2°)** • Sur l'intervalle [1 ; 3], $(\mathscr{C}_g)$ est au-dessus de la droite (OI) ; la représentation graphique de $h$ coïncide avec $(\mathscr{C}_g)$.

• Sur $]-\infty\,;1[$, $(\mathscr{C}_g)$ est au-dessous de la droite (OI) ; la représentation graphique de $h$ est la symétrique de $(\mathscr{C}_g)$ par rapport à la droite (OI).

• Sur $]3\,;+\infty[$, $(\mathscr{C}_g)$ est au-dessous de la droite (OI) ; la représentation graphique de $h$ est la symétrique de $(\mathscr{C}_g)$ par rapport à la droite (OI).



# Fonctions polynômes du troisième degré

**1. Soit $f$ la fonction définie par : $f(x) = -x^3 + 3x^2$.**
**1°) Étudier les variations de $f$ et construire sa représentation graphique ($\mathscr{C}_f$).**
**2°) Déterminer une équation de la tangente à ($\mathscr{C}_f$) en A(1 ; 2).**
**3°) Résoudre graphiquement l'inéquation : $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 > 0$.**

## Solution

**1°) *Ensemble de définition***
$f$ est une fonction polynôme, elle est donc définie en tout élément de $\mathbb{R}$.

***Dérivée et sens de variation***
$f$ est une fonction polynôme, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.
Sa dérivée est la fonction $f' : x \mapsto -3x(x-2)$.
On a : $f'(0) = 0$ et $f(0) = 0$ ; $f'(2) = 0$ et $f(2) = 4$ ;
$f'(x) > 0$ *équivaut à* $x \in ]0 ; 2[$ ;
$f'(x) < 0$ *équivaut à* $x \in ]-\infty ; 0[ \cup ]2 ; +\infty[$.

Donc : $f$ est croissante sur $]0 ; 2[$ ;
$f$ est décroissante sur $]-\infty ; 0[$ et sur $]2 ; +\infty[$.

***Tableau de variation***

| $x$ | $-\infty$ | 0 | | 2 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ |
| $f(x)$ | $\searrow$ | 0 | $\nearrow$ | 4 | $\searrow$ |

***Représentation graphique***

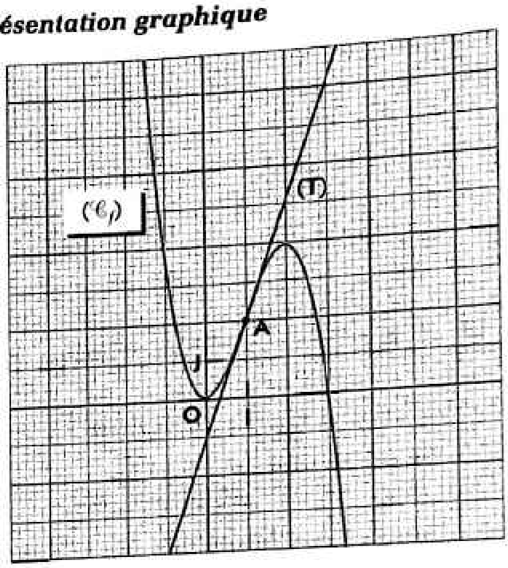



***Table de valeurs***

| $x$ | $-\frac{3}{2}$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 | 3 | $\frac{7}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $\frac{81}{8}$ | 4 | 0 | 2 | 4 | 0 | $-\frac{49}{4}$ |

2°) On a : $f'(1) = 3$ ; une équation de la tangente à ($\mathscr{C}_f$) en A est la droite (T) d'équation : $y - 2 = 3(x - 1)$, c'est-à-dire : $y = 3x - 1$.

3°) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 > 0$ *équivaut à* $-x^3 + 3x^2 < 3x - 1$.
Résoudre cette inéquation revient à déterminer les abscisses des points de ($\mathscr{C}_f$) situés au-dessous de (T).
Traçons sur le même graphique que ($\mathscr{C}_f$) la tangente (T).
L'ensemble des solutions de l'inéquation, par lecture graphique, est $]1 ; +\infty[$.

**2. Soit $g$ la fonction définie par : $g(x) = x^3 + x$.**
**1°) Démontrer que $g$ est une fonction impaire.**
**2°) Étudier les variations de $g$ et construire sa représentation graphique ($\mathscr{C}_g$).**

## Solution

**1°) *Ensemble de définition***
On a : $D_g = \mathbb{R}$.
$D_g$ est symétrique par rapport à 0 ;
de plus, pour tout nombre réel $x$, $g(-x) = (-x)^3 + (-x) = -x^3 - x = -g(x)$.
Donc, $g$ est une fonction impaire et le point O est un centre de symétrie pour ($\mathscr{C}_g$).
On peut donc restreindre l'étude de $g$ à l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

**2°) *Dérivée et sens de variation***
$g$ est une fonction polynôme ; elle est donc dérivable sur $[0 ; +\infty[$.
Sa dérivée est la fonction $g' : x \mapsto 3x^2 + 1$.

On a : pour tout $x$ élément de $[0 ; +\infty[$, $g'(x) > 0$ ;
donc, $g$ est croissante sur $[0 ; +\infty[$.

***Tableau de variation***

| $x$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $g'(x)$ | $1$ | $+$ |
| $g(x)$ | $0$ | $\nearrow$ |

***Représentation graphique***

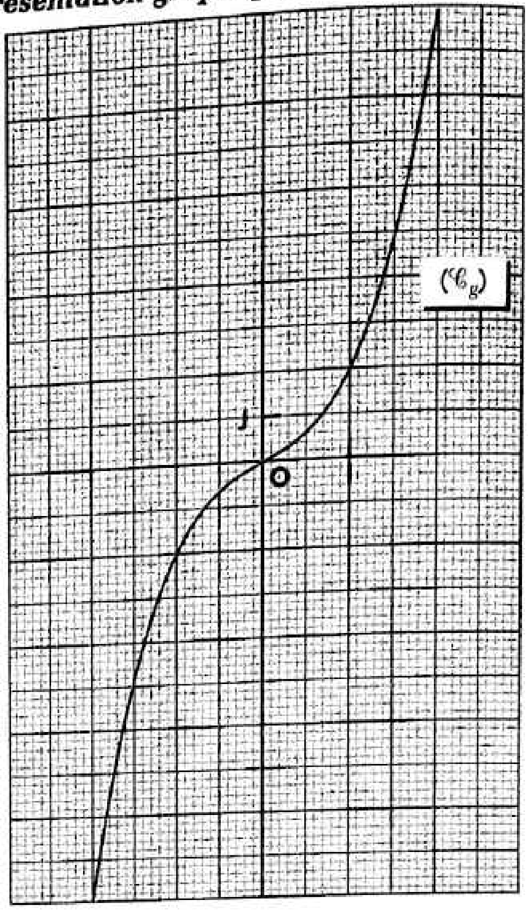



***Table de valeurs***

| $x$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $g(x)$ | 0 | 2 | 10 |

On trace la portion de la courbe correspondant aux valeurs positives de $x$ ;
puis l'on complète en faisant une symétrie par rapport à l'origine du repère.

## 2.2. Étude de fonctions homographiques

### Étude de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x-2}{x+1}$

***Ensemble de définition***

On a : $D_f = ]-\infty ; -1[ \cup ]-1 ; +\infty[$.

***Dérivée et sens de variation***

$f$ est une fonction rationnelle, elle est donc dérivable sur $]-\infty ; -1[$ et sur $]-1 ; +\infty[$.

Sa dérivée est la fonction $f' : x \mapsto \dfrac{3}{(x+1)^2}$.

On a : pour tout $x \in ]-\infty ; -1[ \cup ]-1 ; +\infty[$, $f'(x) > 0$.

Donc, $f$ est croissante sur $]-\infty ; -1[$ et sur $]-1 ; +\infty[$.

***Tableau de variation***

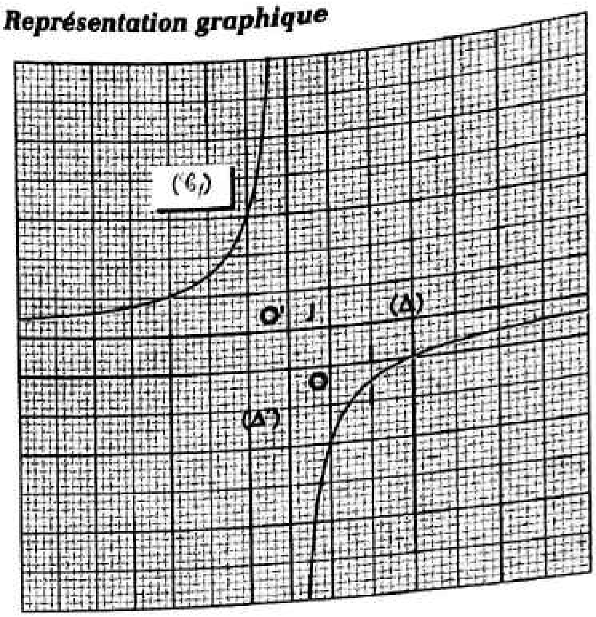
| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | ‖ | $+$ |
| $f(x)$ | $\nearrow$ | ‖ | $\nearrow$ |

***Table de valeurs***

| $x$ | $-4$ | $-2$ | $-\frac{3}{2}$ | $-1$ | $-\frac{1}{2}$ | $0$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 2 | 4 | 7 | | $-5$ | $-2$ | 0 |

$(\mathscr{C}_f)$ est une hyperbole de centre O'(− 1 ; 1).
O' est le point d'intersection des droites (Δ) et (Δ') d'équations respectives $x = -1$ et $y = 1$.

***Représentation graphique***




## Étude de la fonction $g : x \mapsto \dfrac{2x+1}{x-1}$

***Ensemble de définition***

On a : $D_g = ]-\infty\,;\,1[\,\cup\,]1\,;\,+\infty[$.

***Dérivée et sens de variation***

$g$ est une fonction rationnelle, elle est donc dérivable sur $]-\infty\,;\,1[$ et sur $]1\,;\,+\infty[$.

Sa dérivée est la fonction $g' : x \mapsto \dfrac{-3}{(x-1)^2}$.

On a : pour tout $x \in\, ]-\infty\,;\,1[\,\cup\,]1\,;\,+\infty[$, $g'(x) < 0$.

Donc, $g$ est décroissante sur $]-\infty\,;\,1[$ et sur $]1\,;\,+\infty[$.

***Tableau de variation***

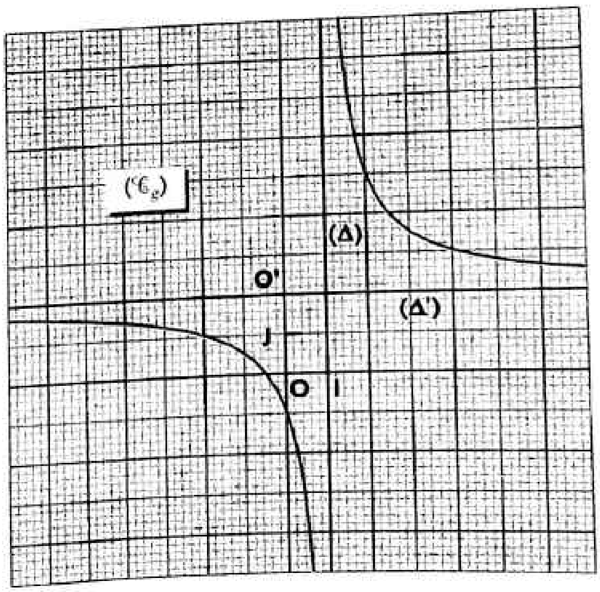
| $x$ | $-\infty$ | 1 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | $-$ | ‖ | $-$ |
| $g(x)$ | ↘ | ‖ | ↘ |

***Table de valeurs***

| $x$ | −2 | −1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | 1 | $\frac{1}{2}$ | −1 | | 5 | $\frac{7}{2}$ | 3 |

$(\mathscr{C}_g)$ est une hyperbole de centre O'(1 ; 2).
O' est le point d'intersection des droites (Δ) et (Δ') d'équations respectives $x = 1$ et $y = 2$.

***Représentation graphique***



# Exercices

**2.a** Dans chacun des cas suivants, étudier la fonction $f$ et construire sa représentation graphique $(\mathscr{C})$.

*a)* $f(x) = x^2 + 2x - 3$ *b)* $f(x) = -x^2 + 2x$.

**2.b** Dans chacun des cas suivants, étudier la fonction $f$ et construire sa représentation graphique $(\mathscr{C})$.

*a)* $f(x) = \dfrac{-x+1}{x+2}$ *b)* $f(x) = \dfrac{-2x+5}{x-3}$.

**2.c** Étudier la fonction définie par $f(x) = x^3 - 3x$ et construire sa représentation graphique $(\mathscr{C})$.

**2.d** Résoudre graphiquement les inéquations suivantes.

*a)* $-\dfrac{x^2}{4} + 2x - 3 > \dfrac{x}{2} - 2$

*b)* $-1 < \dfrac{x+2}{x-1} < 3$.

# 3 Résolution de problèmes

## 3.1. Problèmes conduisant à une fonction polynôme

### Un peu d'arithmétique

**La somme de deux nombres entiers naturels est 20.**
**Déterminer ces deux nombres dans chacun des cas suivants :**
***a)* le produit des deux nombres est maximal ;**
***b)* la somme des carrés des deux nombres est minimale.**

### Solution

Désignons par $x$ et $y$ ces deux nombres.
On a : $x + y = 20$ ; donc $y = 20 - x$, avec $0 \leq x \leq 20$.

*a)* Le produit des deux nombres est : $P(x) = xy = x(20 - x) = -x^2 + 20x$.
La fonction $x \mapsto -x^2 + 20x$ est une fonction polynôme, elle est donc dérivable sur $[0 ; 20]$.
On a : pour tout $x \in [0 ; 20]$, $P'(x) = -2(x - 10)$.

Donc : $P'(10) = 0$ et $P(10) = 100$ ;
$P'(x) > 0$ *équivaut à* $x < 10$ ;
$P'(x) < 0$ *équivaut à* $x > 10$.

On en déduit, ci-contre, le tableau de variation de la fonction P, que l'on complète par : $P(0) = 0$ et $P(20) = 0$.

| $x$ | 0 | | 10 | | 20 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P'(x)$ | | + | 0 | − | |
| $P(x)$ | 0 | ↗ | 100 | ↘ | 0 |

$P(x)$ est maximal pour $x = 10$ et $y = 10$.
Le maximum de P sur $[0 ; 20]$ est 100.

*b)* La somme des carrés des deux nombres est :
$S(x) = x^2 + y^2 = x^2 + (20 - x)^2 = 2x^2 - 40x + 400$.
La fonction $x \mapsto 2x^2 - 40x + 400$ est une fonction polynôme, elle est donc dérivable sur $[0 ; 20]$.
On a : pour tout $x \in [0 ; 20]$, $S'(x) = 4(x - 10)$.

Donc : $S'(10) = 0$ et $S(10) = 200$ ;
$S'(x) > 0$ *équivaut à* $x > 10$ ;
$S'(x) < 0$ *équivaut à* $x < 10$.

On en déduit, ci-contre, le tableau de variation de la fonction S, que l'on complète par : $S(0) = 400$ et $S(20) = 400$.

| $x$ | 0 | | 10 | | 20 |
|---|---|---|---|---|---|
| $S'(x)$ | | − | 0 | + | |
| $S(x)$ | 400 | ↘ | 200 | ↗ | 400 |

$S(x)$ est minimal pour $x = 10$ et $y = 10$.
Le minimum de S sur $[0 ; 20]$ est 200.

## Point d'une courbe le plus proche d'un point donné

**...repère (O, I, J) est orthonormé.**
**...it (𝒞) la courbe d'équation $y = \sqrt{x}$ et A le point de coordonnée $(\frac{9}{2}\ ;\ 0)$.**
**...terminer le point de (𝒞) le plus proche de A.**

### Solution

...oit $M(x\ ;\ \sqrt{x})$ un point de (𝒞).

...n a : $AM^2 = (x - \frac{9}{2})^2 + x = x^2 - 8x + \frac{81}{4}$.

...oit $f$ la fonction définie par : $f(x) = x^2 - 8x + \frac{81}{4}$.

...e point de (𝒞) le plus proche de A est tel que $f(x)$ soit minimal.

...a fonction $x \mapsto x^2 - 8x + \frac{81}{4}$ est une fonction polynôme, elle est donc dérivable sur $[0\ ;+\infty[$.

...n a : pour tout $x \in [0\ ;+\infty]$, $f'(x) = 2(x-4)$.

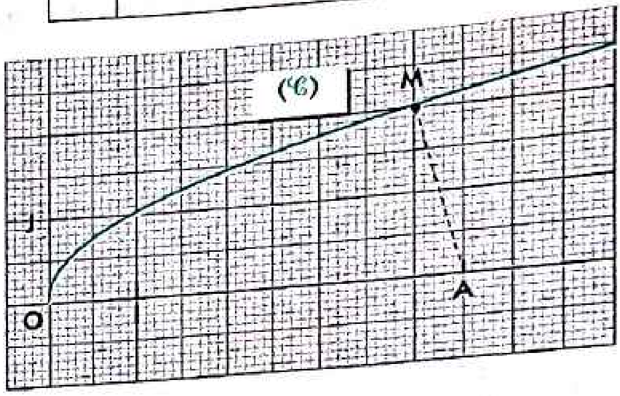
...onc : $f'(4) = 0$ et $f(4) = \frac{17}{4}$ ;

$f'(x) < 0$ *équivaut à* $x < 4$ ;

$f'(x) > 0$ *équivaut à* $x > 4$.

...n en déduit, ci-contre, le tableau de variation de la fonction $f$, que l'on complète par : $f(0) = \frac{81}{4}$.

| $x$ | $0$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $\frac{81}{4}$ | ↘ | $\frac{17}{4}$ | ↗ | |




$f(x)$ est minimal pour $x = 4$.

Le point de (𝒞) le plus proche de A est donc M(4 ; 2).

On a alors : $AM = \frac{\sqrt{17}}{2}$.

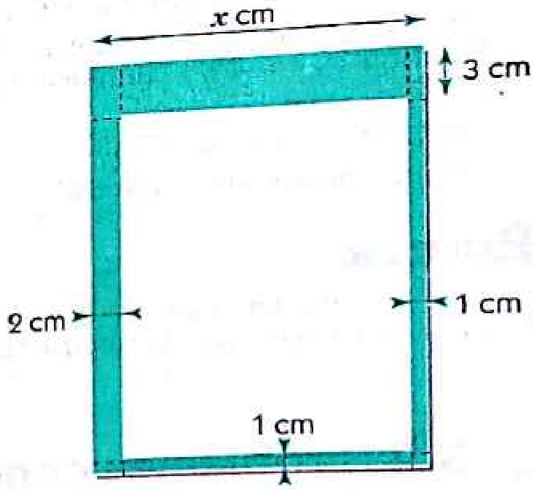
## Surface d'aire maximale

**La figure ci-contre représente une page d'un atlas de poche. La page a pour largeur $x$ cm et pour périmètre 50 cm. Les parties coloriées représentent les marges.**

**1°) Exprimer, en fonction de $x$, l'aire $\mathcal{A}(x)$ de la surface imprimée.**

**2°) Quelles sont les valeurs extrêmes de $x$ ?**

**3°) Déterminer la largeur de la page d'atlas pour que l'aire de la surface imprimée soit maximale.**




### Solution

1°) Soit $y$ la longueur de la page.

Le périmètre de la page est : $2(x + y) = 50$ ; donc : $y = 25 - x$.

Désignons respectivement par $x'$ et $y'$ la largeur et la longueur de la page imprimée.

On a : $x' = x - 3$ et $y' = y - 4 = 21 - x$.

Donc : $\mathcal{A}(x) = x'y' = (x-3)(21-x) = -x^2 + 24x - 63$.

2°) On doit avoir : $x - 3 \geq 0$ et $21 - x \geq 0$ ; c'est-à-dire : $3 \leq x \leq 21$.

Donc, l'ensemble de définition de $\mathcal{A}$ est $[3\ ;\ 21]$.

La fonction $x \mapsto -x^2 + 24x - 63$ est une fonction polynôme, elle est donc dérivable sur $[3\ ;\ 21]$.

On a : pour tout $x \in [3\ ;\ 21]$, $\mathcal{A}'(x) = -2(x - 12)$.

Donc : $\mathscr{A}'(12) = 0$ et $\mathscr{A}(12) = 81$ ;
$\mathscr{A}'(x) > 0$ *équivaut à* $x < 12$ ;
$\mathscr{A}'(x) < 0$ *équivaut à* $x > 12$ .

On en déduit, ci-contre, le tableau de variation de la fonction $\mathscr{A}$, que l'on complète par : $\mathscr{A}(3) = 0$ et $\mathscr{A}(21) = 0$.

| $x$ | 3 | | 12 | | 21 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mathscr{A}'(x)$ | | + | 0 | − | |
| $\mathscr{A}(x)$ | 0 | ↗ | 81 | ↘ | 0 |

3°) L'aire de la surface imprimée est maximale pour $x = 12$.
Cette aire est alors 81 cm².

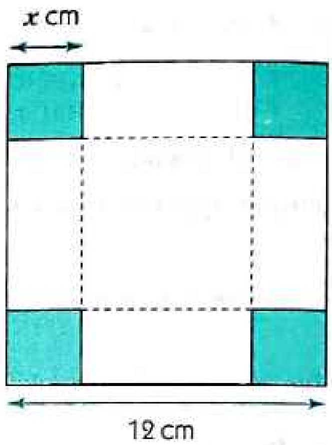
## Problème du cendrier

*Ce problème a été abordé en classe de seconde littéraire (voir chapitre 6).*
*Nous allons en poursuivre l'étude ici.*

**La figure ci-contre représente une feuille carrée de côté 12 cm. À chaque coin de cette feuille, on fait une encoche carrée de côté $x$ cm, puis on replie la feuille suivant les pointillés pour former un cendrier.**

**1°) Exprimer le volume du cendrier en fonction de $x$.**

**2°) Pour quelle valeur de $x$ ce volume est-il maximal ?**




### Solution

1°) Le cendrier a la forme d'un pavé droit.
La base est un carré de côté $12 - 2x$ ; la hauteur est $x$.
Le volume du cendrier est donc : $v(x) = x(12 - 2x)^2$.
On doit avoir : $x \geq 0$ et $12 - 2x \geq 0$ ; c'est-à-dire : $0 \leq x \leq 6$.
L'ensemble de définition de la fonction $v$ est donc : $[0 ; 6]$.

2°) On a : $v(x) = 4x^3 - 48x^2 + 144x$.
La fonction $x \mapsto 4x^3 - 48x^2 + 144x$ est une fonction polynôme, elle est donc dérivable sur $[0 ; 6]$.

On a : pour tout $x \in [0 ; 6]$, $v'(x) = 12x^2 - 96x + 144 = 12(x - 2)(x - 6)$.
Pour tout $x \in [0 ; 6]$, $x - 6 \leq 0$ ; donc $v'(x)$ est du signe de $-12(x - 2)$.

On a : $v'(2) = 0$ et $v(2) = 128$ ;
$v'(x) > 0$ *équivaut à* $x \in [0 ; 2[$ ;
$v'(x) < 0$ *équivaut à* $x \in ]2 ; 6]$.

On en déduit, ci-contre, le tableau de variation de la fonction $v$, que l'on complète par : $v(0) = 0$ et $v(6) = 0$.

| $x$ | 0 | | 2 | | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| $v'(x)$ | | + | 0 | − | |
| $v(x)$ | 0 | ↗ | 128 | ↘ | 0 |

$v(x)$ est maximal pour $x = 2$.

Le volume maximal est 128 cm³.

### Remarque

*Nous avons vu, en classe de seconde, que pour $x = 4$ le cendrier a la forme d'un cube.*
*Le cube n'est donc pas le cendrier de volume maximal, comme l'intuition pourrait le suggérer.*

# 3.2. Problèmes conduisant à une fonction homographique

## Fluctuations du marché

**Le prix d'un article a subi une augmentation de $x$ % puis une diminution de $y$ %.**

**1°) Déterminer $y$ en fonction de $x$ pour que le prix revienne à sa valeur initiale.**

**2°) Sachant que l'augmentation ne peut excéder 100 %, déterminer la plus grande diminution possible.**

**3°) Quelle augmentation le prix doit-il subir pour qu'il puisse diminuer de 20 % ?**

**Solution**

1°) Soit $p$ le prix initial de l'article.

Après augmentation, son prix est : $(1 + \frac{x}{100})p$.

Après diminution, son prix est : $(1 - \frac{y}{100})(1 + \frac{x}{100})p$.

Le prix de l'article revient à sa valeur initiale si : $(1 - \frac{y}{100})(1 + \frac{x}{100})p = p$.

On en déduit que : $y = \frac{100x}{x + 100}$.

L'augmentation ne peut excéder 100 % ; donc : $x \in [0 ; 100]$.

2°) Soit $f$ la fonction définie par : $f(x) = \frac{100x}{x + 100}$.

La plus grande diminution possible est le maximum de la fonction $f$ sur $[0 ; 100]$.

$f$ est une fonction homographique, elle est donc dérivable sur $[0 ; 100]$. On a : $f'(x) = \frac{10\ 000}{(x + 100)^2}$.

Donc, $f$ est strictement croissante sur $[0 ; 100]$.

On en déduit, ci-contre, le tableau de variation de la fonction $f$, que l'on complète par : $f(0) = 0$ et $f(100) = 50$.

| $x$ | 0 | | 100 |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | |
| $f(x)$ | 0 | ↗ | 50 |

3°) On doit résoudre l'équation : $f(x) = 20$.

On a : $\frac{100x}{x + 100} = 20$ *équivaut à* $100x = 20x + 2\ 000$
*équivaut à* $x = 25$.

Pour qu'il puisse diminuer de 20 %, le prix doit subir au préalable une augmentation de 25 %.

## Production de jouets

**Une entreprise lance sur le marché un nouvel article qu'elle compte produire en grande quantité. Les frais fixes de fabrication s'élèvent à 200 000 F CFA et chaque article coûte 500 F CFA supplémentaires.**

**On prévoit de vendre $x$ articles.**

**1°) Déterminer le coût total de production de $x$ articles.**

**2°) Déterminer le coût moyen de la production, c'est-à-dire le prix de revient d'un article.**

**3°) Déterminer la valeur minimale du coût moyen de la production, sachant que l'entreprise ne peut produire que 10 000 articles.**

**4°) Est-il possible de rendre le coût moyen inférieur à 400 F CFA ? à 700 F CFA ?**

**Solution**

1°) Le coût total de production de $x$ articles est $200\ 000 + 500x$.

2°) Soit $y$ le coût moyen de production, c'est-à-dire le prix de revient d'un article.

On a : $xy = 200\ 000 + 500x$ ; donc : $y = 500 + \frac{200\ 000}{x}$.

3°) Soit $f$ la fonction définie sur $]0 ; 10\ 000]$ par : $f(x) = 500 + \frac{200\ 000}{x}$.

La fonction $x \mapsto 500 + \frac{200\ 000}{x}$ est une fonction homographique ;

la fonction $f$ est donc dérivable sur $]0 ; 10\ 000]$ et on a : $f'(x) = \frac{-200\ 000}{x^2}$.

Donc, $f$ est strictement décroissante sur $]0 ; 10\ 000]$.

On en déduit, ci-contre, le tableau de variation de la fonction $f$, que l'on complète par : $f(10\ 000) = 520$.

| $x$ | 0 | | 10 000 |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | − | |
| $f(x)$ | ‖ | ↘ | 520 |

La valeur minimale du coût moyen de la production est de 520 F CFA.

4°) • D'après la question précédente, le coût moyen de la production ne peut pas être inférieur à 400 F CFA.

• Le coût moyen de la production est inférieur à 700 F CFA si : $500 + \frac{200\ 000}{x} < 700$

c'est-à-dire : $\frac{200\ 000 - 200x}{x} < 0$

ou : $x > 1\ 000$.

# Exercices

## APPRENTISSAGE

### Application de la dérivation

**1** Dans chacun des cas suivants, démontrer que la fonction $f$ a un extremum relatif sur l'intervalle I. Indiquer la nature et la valeur de cet extremun relatif.

*a)* $f(x) = x^2 + 6x$ ; $I = [-7 ; 1]$

*b)* $f(x) = -\frac{x^2}{2} + 4x - 3$ ; $I = [2 ; 6]$

*c)* $f(x) = x^2(x-1)$ ; $I = [0 ; +\infty[$

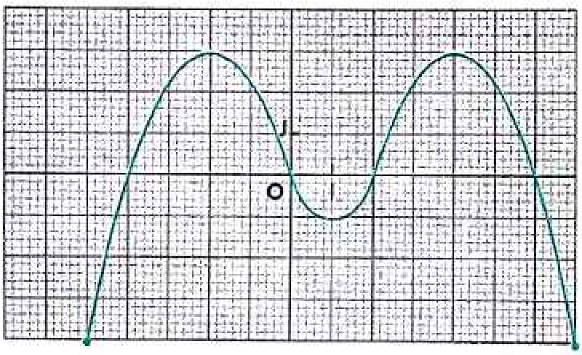
*d)* $f(x) = 4x + \frac{1}{x}$ ; $I = ]-\infty ; 0[$.

**2** Soit $f$ la fonction définie par :

$$f(x) = -x^3 + 3x^2 - 5.$$

Démontrer que $f$ a pour minimum relatif $-5$, atteint en 0, et pour maximum relatif $-1$, atteint en 2.

**3** La courbe ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction $f$ définie et dérivable sur $[-5 ; 7]$.




1. Déterminer le signe de $f'$ sur chacun des intervalles $[-5 ; -2[$, $]-2 ; 1[$, $]1 ; 4[$ et $]4 ; 7]$.
2. Dresser le tableau de variation de la fonction $f$.
3. Indiquer la nature et la valeur de ces extremums relatifs.

**4** Le plan est muni du repère (O, I, J).
$f$ est une fonction définie et dérivable sur $[0 ; 4]$ telle que : $f(2) = 1$ et $f'(2) = 0$.
Dans chacun des cas suivants, construire une représentation graphique de $f$.
*a)* $f$ admet un minimum en 2.
*b)* $f$ admet un maximum en 2.

**5** Le plan est muni du repère (O, I, J).
$f$ est une fonction définie et dérivable sur $[0 ; 4]$ telle que : $f(1) = 2$ et $f'(1) = \frac{1}{2}$ ;

$f(3) = 1$ et $f'(3) = -1$.

Construire une représentation graphique de $f$.

### Étude de fonctions polynômes et homographiques

**6** Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J).
Soit $f$ la fonction définie par :

$$f(x) = -\frac{x^2}{2} + 4x - 3.$$

1. Étudier $f$ et construire sa représentation graphique.
2. Résoudre graphiquement l'inéquation :

$$-\frac{x^2}{2} + 4x - 3 \geq -\frac{x}{2} + 4.$$

Vérifier le résultat par le calcul.

**7** Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J).
Soit $f$ et $g$ les fonctions définies par :

$$f(x) = x^2 - 4x + 2 \text{ et } g(x) = \frac{2}{x-3}.$$

On désigne $(\mathscr{C})$ et $(\Gamma)$ les représentations graphiques respectives de $f$ et de $g$.
1. Étudier les fonctions $f$ et $g$, puis construire, sur le même graphique, les courbes $(\mathscr{C})$ et $(\Gamma)$.
2. Résoudre graphiquement l'équation : $f(x) = g(x)$.

**8** Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J).
Soit $f$ et g les fonctions définies par :

$$f(x) = \frac{1}{2}(x^2 + 3x) \text{ et } g(x) = \frac{3x}{x+2}.$$

On désigne par $(\mathscr{C})$ et $(\Gamma)$ les représentations graphiques respectives de $f$ et de $g$.
Démontrer que les courbes $(\mathscr{C})$ et $(\Gamma)$ admettent la même tangente $(\Delta)$ à l'origine.
*On dit que $(\mathscr{C})$ et $(\Gamma)$ sont tangentes en O.*

**9** Le plan est muni du repère (O, I, J).
Soit $f$ la fonction définie par : $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$.
1. Étudier $f$ et construire sa représentation graphique.
2. Résoudre graphiquement : $0 < \frac{x-1}{x+2} < 4$.
Vérifier le résultat par le calcul.

**10** Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J).
Soit $f$ la fonction définie par : $f(x) = \frac{x+3}{x+2}$.
1. Étudier $f$ et construire sa représentation graphique $(\mathscr{C})$.
2. Déduire de $(\mathscr{C})$ la représentation graphique $(\Gamma)$ de la fonction $g$ définie par : $g(x) = \left|\frac{x+3}{x+2}\right|$.

**11** Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J).
Soit $f$ la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x - 1.$$

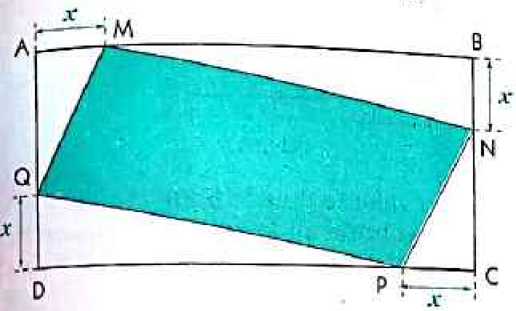
1. Étudier $f$ et construire sa représentation graphique $(\mathscr{C})$.
2. Déduire de $(\mathscr{C})$ la représentation graphique $(\Gamma)$ de la fonction $g$ définie par : $g(x) = \left|\frac{1}{2}x^2 - 2x - 1\right|$.

**12** Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J).
Soit $f$ la fonction définie par $f(x) = ax^2 + bx + \frac{3}{2}$ et ($\mathscr{C}$) sa représentation graphique.
Déterminer $a$ et $b$ pour que ($\mathscr{C}$) passe par le point A(3 ; 0) et que la tangente en ce point ait pour coefficient directeur − 2.

**13** Le plan est muni du repère (O, I, J).
Soit $f$ la fonction définie par $f(x) = \frac{3x-4}{2x-3}$ et ($\mathscr{C}$) sa représentation graphique.
1. Démontrer que ($\mathscr{C}$) a deux tangentes de coefficient directeur − 1.
2. Déterminer une équation de chacune de ces tangentes.

# Résolution de problèmes

**14** La figure ci-dessous représente un rectangle ABCD et un parallélogramme MNPQ tels que :
AB = 12, BC = 8 et AM = $x$.

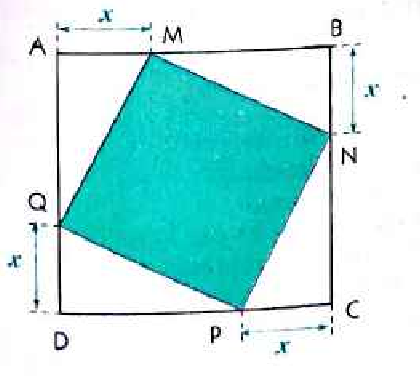



1. Pour quelles valeurs de $x$ le parallélogramme MNPQ existe-t-il ?
2. Déterminer, en fonction de $x$, l'aire $\mathscr{A}(x)$ de MNPQ.
3. Pour quelle valeur de $x$ l'aire $\mathscr{A}(x)$ est-elle minimale ?

**15** Déterminer le point M situé sur le segment [AB] tel que la somme des carrés des distances de M à A et à B soit minimale.

**16** On place, dans une boîte parallélépipédique de base 20 cm sur 15 cm, un cube de cristal. Le côté du cube est la hauteur de la boîte. On comble le vide avec de la mousse.
1. Exprimer, en fonction du côté $x$ du cube, le volume $v(x)$ de mousse nécessaire.
2. Pour quelle valeur de $x$ ce volume est-il maximal ?

**17** La figure ci-dessous représente deux carrés ABCD et MNPQ tels que : AB = 4 et AM = $x$.




1. Pour quelles valeurs de $x$ le carré MNPQ existe-t-il ?
2. Déterminer, en fonction de $x$, l'aire $\mathscr{A}(x)$ de MNPQ.
3. Pour quelle valeur de $x$ l'aire $\mathscr{A}(x)$ est-elle minimale ?

**18** Une entreprise lance sur le marché un nouvel article qu'elle compte produire en grande quantité. Les frais fixes s'élèvent à 5 000 000 F CFA et la production de chaque article coûte 2 000 F CFA supplémentaires. De plus, pour assurer la promotion du produit, 1 000 articles sont distribués gratuitement. On prévoit de vendre $x$ articles.
1. Déterminer, en fonction de $x$, le prix de revient de chaque article vendu.
2. Pour des raisons de concurrence, chaque article ne peut être vendu plus de 2 500 F CFA. Combien d'articles faut-il vendre pour amortir les investissements ?

**19** Un article est vendu 8 000 F CFA TTC (toutes taxes comprises). Soit $x$ le prix de cet article HT (hors taxes), $y$ le montant de la taxe et $t$ le taux de la TVA (taxe sur la valeur ajoutée).
1. Exprimer $x$ en fonction de $t$, puis $y$ en fonction de $t$.
2. Le taux de la TVA ne peut excéder 100 %.
*a)* Construire sur le même graphique les représentations graphiques ($\mathscr{C}$) et ($\Gamma$) des fonctions qui à $t$ associent respectivement $x$ et $y$.
*b)* À quel taux correspond une TVA de 3 000 F CFA ? 4 000 F CFA ?

**20** Un homme place, au taux d'intérêt annuel de $x$ %, un capital c qui lui rapporte chaque année 50 000 F CFA.
1. Exprimer c en fonction de $x$.
2. Le taux d'intérêt annuel est compris entre 1 % et 10 %.
*a)* Quelles sont les valeurs extrêmes du capital ?
*b)* Construire la courbe représentative de la fonction qui à $x$ associe $c$.
*c)* À quel taux correspond un capital de 2 500 000 F CFA ?

**21** Le prix de vente d'un article, en milliers de francs, est 60. Soit $y$ le prix de revient de cet article et $x$ le pourcentage du bénéfice calculé sur le prix de revient.
1. Exprimer $y$ en fonction de $x$.
2. Étudier et construire la représentation graphique de la fonction qui à $x$ associe $y$, pour $x \in [0 ; 5]$.

## APPROFONDISSEMENT

**22** Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J).
Soit $f$ et $g$ les fonctions définies par :
$$f(x) = x^2 + 2x - 4 \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{-2x+8}{x-1}.$$
On désigne par ($\mathscr{C}$) et ($\Gamma$) les représentations graphiques respectives de $f$ et de $g$.
1. *a)* Vérifier que : $f(2) = g(2)$.
*b)* Étudier le signe de $f(x) - g(x)$.
*c)* En déduire la position relative des courbes ($\mathscr{C}$) et ($\Gamma$).
2. Étudier les fonctions $f$ et $g$, puis construire ($\mathscr{C}$) et ($\Gamma$) sur le même graphique.
3. Résoudre graphiquement :
*a)* $f(x) = 0$
*b)* $f(x) = 4$
*c)* $g(x) \leq 4$
*d)* $g(x) > -5$.
Vérifier les résultats par le calcul.

**23** Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J).

Soit $f$ la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{x^2}{4} - x$.

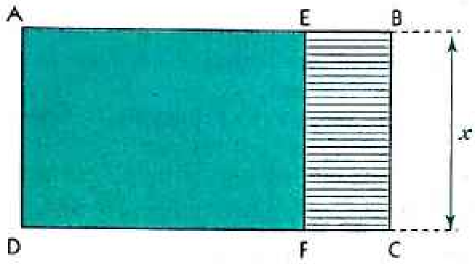
**1.** Étudier $f$ et construire sa représentation graphique $(\mathscr{C})$.

**2.** On désigne par $(\mathscr{D})$ la tangente à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse $-2$ et par $(\mathscr{D}')$ la tangente à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 3.

*a)* Déterminer une équation de chacune des droites $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$.

*b)* Démontrer que $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ sont perpendiculaires en un point A dont on déterminera les coordonnées.

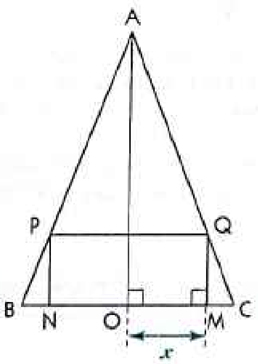
**24** Sur la figure ci-dessous, ABCD représente un terrain rectangulaire d'aire 150 m². On veut clôturer ce terrain et le diviser en deux lots rectangulaires au moyen d'une clôture [EF]. On pose : $x$ = BC.




**1.** Exprimer, en fonction de $x$, la longueur totale L($x$) de la clôture.

**2.** Déterminer les dimensions du terrain afin que la longueur de la clôture soit minimale.
Calculer alors la longueur de la clôture.

**25** Sur la figure ci-dessous, ABC est un triangle tel que : AB = AC et BC = 6. La hauteur issue de A coupe (BC) en O tel que OA = 6. Le quadrilatère MNPQ est un rectangle. On pose : OM = $x$.




**1.** *a)* Calculer, en fonction de $x$, les distances MN et QM.
*b)* En déduire la valeur de $x$ pour laquelle MNPQ est un carré.

**2.** Déterminer, en fonction de $x$, l'aire $\mathscr{A}(x)$ du rectangle MNPQ.

**3.** Pour quelle valeur de $x$ cette aire est-elle maximale ?

**26** Du haut d'un pont, on lance une balle en l'air. $t$ secondes après le lancement, elle atteint une hauteur $f(t)$ au-dessus du sol qui, exprimée en mètres, est donnée par : $f(t) = -5t^2 + 10t + 15$.

**1.** Quelle est la hauteur du pont ?

**2.** À quel instant $t$ la balle tombera-t-elle au sol ?
En déduire l'ensemble de définition de la fonction $f$.

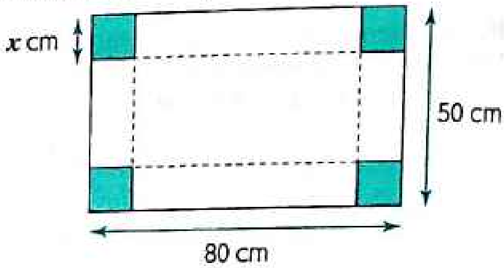
**3.** Étudier les variations de la fonction $f$ sur l'intervalle [0 ; 3].
En déduire la hauteur maximale atteinte par la balle.

**4.** Représenter, dans le plan muni du repère orthogonal (O, I, J), la trajectoire de la balle.

**27** **1.** Vérifier que : pour tout $x$ réel,
$$4x^3 + 2x - 6 = 2(x-1)(2x^2 + 2x + 3).$$

**2.** Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J).
Soit $(\mathscr{P})$ la parabole d'équation $y = x^2$ et A le point de coordonnées (3 ; 0).
Déterminer le point de $(\mathscr{P})$ le plus proche de A.
*[On pourra étudier la fonction $x \mapsto AM^2$, avec $M(x\,;x^2)$.]*

**28** La figure ci-dessous représente une feuille rectangulaire de dimensions 80 cm et 50 cm.
À chaque coin de cette feuille, on découpe un carré de côté $x$, puis on replie la feuille suivant les pointillés pour former une boîte parallélépipédique.

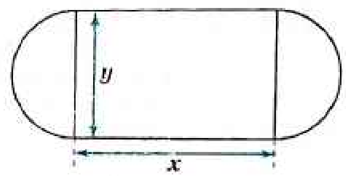



**1.** Pour quelles valeurs de $x$ la boîte est-elle réalisable ?

**2.** Exprimer le volume de la boîte en fonction de $x$.

**3.** Pour quelle valeur de $x$ ce volume est-il maximal ?

**29** La figure ci-dessous représente un rectangle accolé à deux demi-cercles dont le diamètre est égal à la largeur du rectangle.




**1.** Sachant que le périmètre de cette figure vaut 40, établir une relation entre $x$ et $y$.

**2.** Démontrer que l'aire du rectangle, en fonction de $x$, est égale à : $\mathscr{A}(x) = x\left(\dfrac{40}{\pi} - \dfrac{2x}{\pi}\right)$.

**3.** Représenter graphiquement la fonction $\mathscr{A}$ pour $x \in [0\,;20]$.

**4.** Quelle conjecture découle de cette représentation graphique quant au maximum de la fonction $\mathscr{A}$ sur l'intervalle [0 ; 20] ?

**5.** Démontrer que : pour tout $x \in [0\,;20]$, $\mathscr{A}(x) \leq \dfrac{200}{\pi}$.

**6.** Pour quelle valeur $x$ de l'intervalle [0 ; 20], l'aire du rectangle est-elle maximale ?

**30** Soit [AB] un segment de longueur $b$ ($b > 0$).
On se propose de déterminer le point M de [AB] tel que $AM^2 \times MB$ soit maximal.

**1.** Déterminer le point M par la méthode de Fermat.

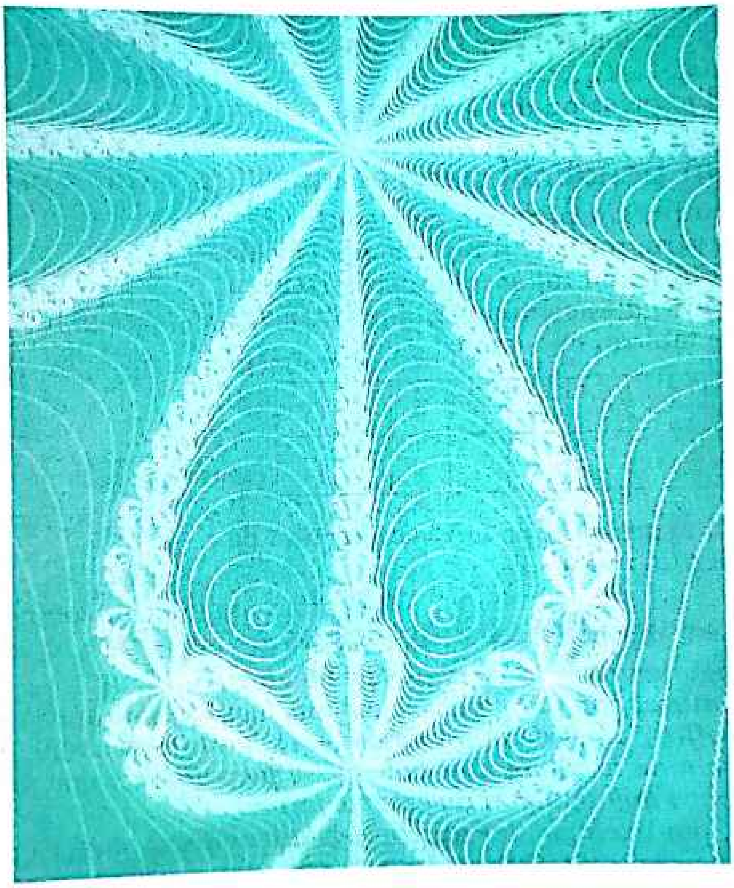
**2.** Démontrer que le problème revient à déterminer le maximum de la fonction $f : x \mapsto x^2(b - x)$.
Déterminer alors M.

7

# Suites numériques

## Introduction

*Les suites numériques se retrouvent dans de nombreux domaines de la vie : arts, économie, biologie, politique... Grâce à la diversité de leurs applications, elles présentent un grand intérêt pour les mathématiciens.*



© Greg Sams/S P L /Cosmos

## SOMMAIRE

# 1 Généralités

## 1.1. Approches de la notion

### Coûts de confection de vêtements d'un couturier styliste

Monsieur Tianton est un couturier styliste. Il décide de confectionner un nouveau modèle de vêtement. Le premier vêtement confectionné lui est revenu à 5 500 F CFA. Son expérience lui permet d'affirmer que le coût de confection unitaire augmentera de 250 F CFA par vêtement supplémentaire.

- Compléter le tableau ci-contre.
- Calculer le coût de confection du 7e vêtement.
- À tout entier naturel non nul, numéro d'ordre du vêtement, on associe un nombre réel, le coût de confection (en F CFA) du vêtement.

Ainsi, pour tout entier naturel non nul $n$, on désigne par $C_n$ le coût de confection du $n^{\text{ième}}$ vêtement.

– Exprimer $C_{n+1}$ en fonction de $C_n$.
– Calculer $C_8$, $C_9$, ..., $C_{12}$.
– Conjecturer l'expression de $C_n$ en fonction de $n$.

| Vêtement | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Coût de confection (en F CFA) | 5 500 | 5 750 | | | | |

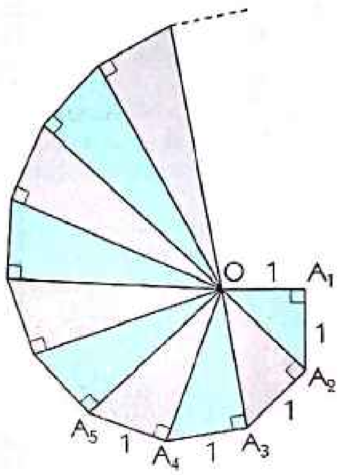
### Un pendentif géométrique

La figure ci-contre représente un pendentif.
Pour la construire, on part d'un triangle isocèle rectangle de côté 1 ; on lui accole successivement des triangles rectangles comme l'indique la figure.

- Compléter le tableau ci-dessous.

| Rang $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Côté $OA_n$ | 1 | | | | | | |

- Conjecturer l'expression de $OA_n$ en fonction de l'entier naturel non nul $n$.




### Les nombres triangulaires

*Pour les Pythagoriciens, « toute chose est nombre ».*
*À tout entier naturel non nul, ils associent une figure visible qui n'est pas un signe conventionnel comme le serait un chiffre : 2 est de la forme n(n + 1), 3 est triangulaire, 4 est carré et n est n-gonal. Pour être valable, la forme de la figure doit pouvoir se perpétuer en une forme semblable engendrant ainsi une suite infinie, par l'adjonction d'une même forme.*
*Ainsi on aura, par exemple,* ***les nombres triangulaires****.*

- Observer et compléter le tableau ci-dessous.

| Rang | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Figure |  |  |  |  | | |
| Nombre triangulaire associé | 1 | 3 | 6 | 10 | | |

- On désigne par $u_n$ le nombre triangulaire de rang $n$.

Vérifier, pour tout entier naturel supérieur à 1, l'égalité : $u_n = u_{n-1} + n$.

• L'égalité précédente équivaut à : pour tout entier naturel supérieur à 1, $u_n - u_{n-1} = n$.

– Compléter les égalités suivantes :

$u_2 - u_1 = 2$
$u_3 - u_2 = 3$
$u_4 - u_3 = \dots$
$u_5 - u_4 = \dots$
$u_6 - u_5 = \dots$
$u_7 - u_6 = \dots$
$u_8 - u_7 = \dots$
$u_9 - u_8 = \dots$
$u_{10} - u_9 = \dots$

– En faisant la somme membre à membre, trouver la valeur de $u_{10}$, le 10e nombre triangulaire.

### Notion de suite

Dans les activités précédentes, on a associé des nombres réels à des entiers naturels. On définit ainsi des suites numériques.

**Définition**

**On appelle suite numérique toute fonction de $\mathbb{N}$ (ou d'une partie de $\mathbb{N}$) vers $\mathbb{R}$.**

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| entier naturel | 0 | 1 | 2 | 3 | … | $n$ |
| $u$ | $\downarrow$ | $\downarrow$ | $\downarrow$ | $\downarrow$ | | $\downarrow$ |
| nombre | $u_0$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ | … | $u_n$ |

#### Notations et vocabulaire

• Si E désigne l'ensemble de définition d'une suite numérique $u$, on a les notations suivantes.

*notation fonctionnelle*

$u : E \to \mathbb{R}$
$n \mapsto u(n)$

*notation indicielle*

$(u_n)_{n \in E}$ ou, plus simplement, $(u_n)$.

• $u(n)$ ou $u_n$ est appelé terme d'indice $n$ ou terme général.

• Le $n^{\text{ième}}$ terme est appelé terme de rang $n$.

*Exemples*

• La suite des entiers naturels pairs est définie par : pour tout entier naturel $n$, $u_n = 2n$.

• La suite des entiers naturels impairs est définie par : pour tout entier naturel $n$, $v_n = 2n + 1$.

• Soit $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} w_0 = 3 \\ w_{n+1} = \frac{1}{2} w_n + 5. \end{cases}$

Calculer $w_1$, $w_2$ et $w_3$.

## 1.2. Déterminations d'une suite numérique

En général, une suite numérique $(u_n)$ est déterminée par l'un des procédés suivants :

• une formule explicite permettant de calculer $u_n$ en fonction de $n$ ;
• le premier terme et une formule de récurrence exprimant $u_{n+1}$ en fonction de $u_n$.

### Suite définie par une formule explicite

• Le terme général d'une suite est donné par la formule : $u_n = 2n - 7$.

Le terme général est fonction de $n$ ; la suite $(u_n)$ est définie par une **formule explicite**.
Le 1er terme est : $u_0 = 2 \times 0 - 7 = -7$.
Le 10e terme est : $u_9 = 2 \times 9 - 7 = 11$.

• Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par : $v_n = \dfrac{2n + 1}{n}$.

Cette suite est définie par une formule explicite.

Le terme général de cette suite est : $\frac{2n+1}{n}$.
Le premier terme est : $v_1 = 3$.

Le 16ᵉ terme est : $v_{16} = \frac{33}{16}$.

## Remarque

*Le $n^e$ terme d'une suite $(u_n)$ peut ne pas être $u_n$.*

### Suite définie par une formule de récurrence

• Une suite $(u_n)$ est donnée par : son premier terme $u_0 = \frac{1}{2}$ ;

et la formule $u_{n+1} = \frac{1+u_n}{2}$.

Le premier terme est connu et chaque terme est fonction du précédent ; la suite $(u_n)$ est définie par une **formule de récurrence.**

On a : $u_1 = \frac{1+u_0}{2} = \frac{1+\frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{4}$ ;

$u_2 = \frac{1+u_1}{2} = \frac{1+\frac{3}{4}}{2} = \frac{7}{8}$.

• Soit $(C_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par : $\begin{cases} C_1 = 5\,500 \\ C_{n+1} = C_n + 250 \end{cases}$.

La suite $(C_n)$ est définie par son premier terme $C_1 = 5\,500$ et une formule de récurrence.

On a : $C_2 = C_1 + 250 = 5\,500 + 250 = 5\,750$ ;
$C_3 = C_2 + 250 = 5\,750 + 250 = 6\,000$ ;
$C_4 = C_3 + 250 = 6\,000 + 250 = 6\,250$.

## 1.3. Représentations graphiques d'une suite numérique

Une suite numérique est une fonction, donc elle peut être représentée graphiquement dans le plan muni d'un repère.

### Suites définies par une formule explicite

Le plan est muni du repère (O, I, J).

***1er exemple***

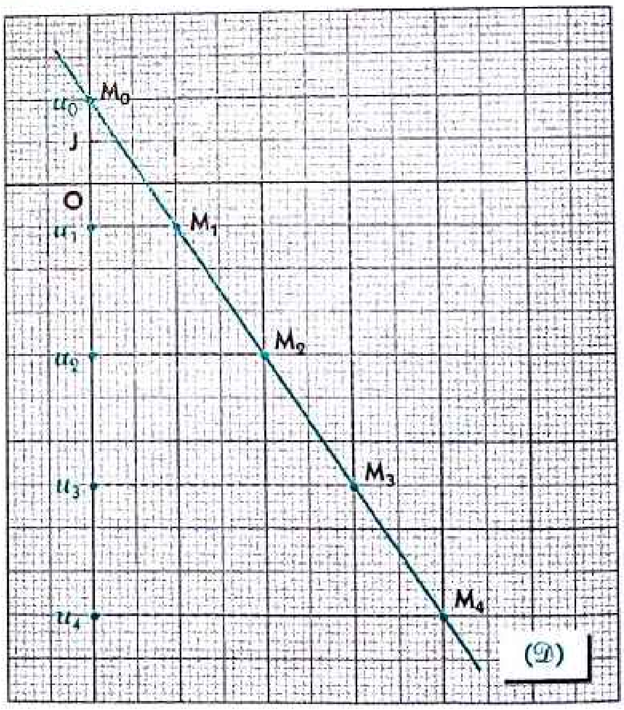
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_n = 2 - 3n$.

Soit $(\mathscr{D})$ la représentation graphique de la fonction $f : x \mapsto 2 - 3x$.

Pour tout entier naturel $n$, on désigne par $M_n$ le point de coordonnées $(n\,;f(n))$.

L'ensemble des points $M_n$ est une représentation graphique de la suite $(u_n)$ dans le plan.

Lorsqu'on projette orthogonalement les points $M_n$ sur l'axe des ordonnées, on obtient une représentation des termes de la suite sur l'axe (OJ).



*2e exemple*

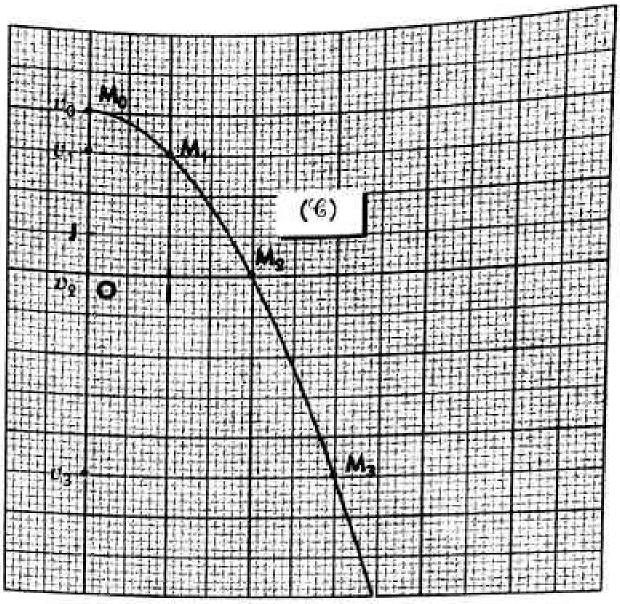
Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $v_n = 4 - n^2$.

Soit $(\mathscr{C})$ la représentation graphique de la fonction $g : x \mapsto 4 - x^2$.

Pour tout entier naturel $n$, on désigne par $M_n$ le point de coordonnées $\big(n\,;\,g(n)\big)$.

L'ensemble des points $M_n$ est une représentation graphique de la suite $(v_n)$ dans le plan.

Lorsqu'on projette orthogonalement les points $M_n$ sur l'axe des ordonnées, on obtient une représentation des termes de la suite $(v_n)$ sur l'axe (OJ).




## Suites définies par une formule de récurrence

Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J).

*1er exemple*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 6 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{4}u_n + 2. \end{cases}$

Soit $(\mathscr{D})$ la représentation graphique de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{4}x + 2$ et $(\Delta)$ la droite d'équation $y = x$.

*Construction de $u_1$*

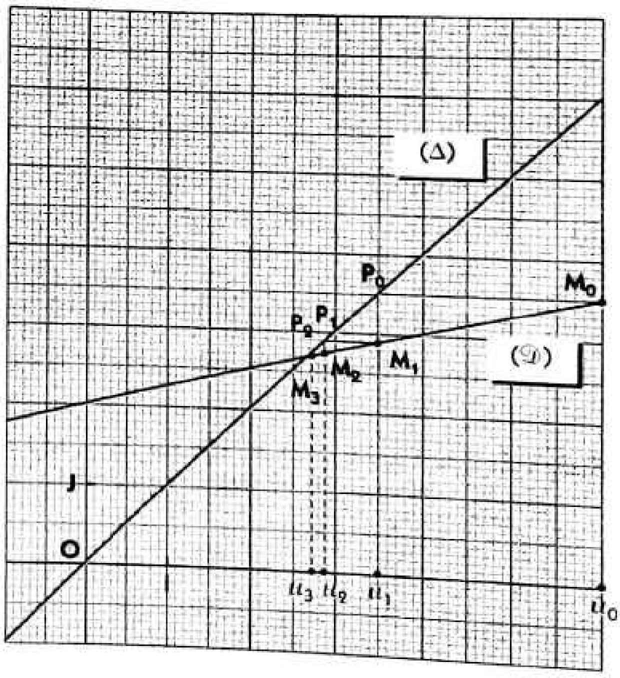
Soit $M_0$ le point de $(\mathscr{D})$ d'abscisse $u_0 = 6$ ;
l'ordonnée de $M_0$ est $u_1 = f(u_0)$.
Soit $P_0$ le point de $(\Delta)$ d'ordonnée $u_1$ ;
l'abscisse de $P_0$ est $u_1$.

*Construction de $u_2$*

Soit $M_1$ le point de $(\mathscr{D})$ d'abscisse $u_1$ ;
l'ordonnée de $M_1$ est $u_2 = f(u_1)$.
Soit $P_1$ le point de $(\Delta)$ d'ordonnée $u_2$ ;
l'abscisse de $P_1$ est $u_2$.

*Construction de $u_3$*

Soit $M_2$ le point de $(\mathscr{D})$ d'abscisse $u_2$ ;
l'ordonnée de $M_2$ est $u_3 = f(u_2)$.
Soit $P_2$ le point de $(\Delta)$ d'ordonnée $u_3$ ;
l'abscisse de $P_2$ est $u_3$.




Cette méthode permet une construction, de proche en proche sur l'axe (OI), des termes de la suite $(u_n)$.

*2e exemple*

Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = \dfrac{v_n + 2}{2v_n}. \end{cases}$

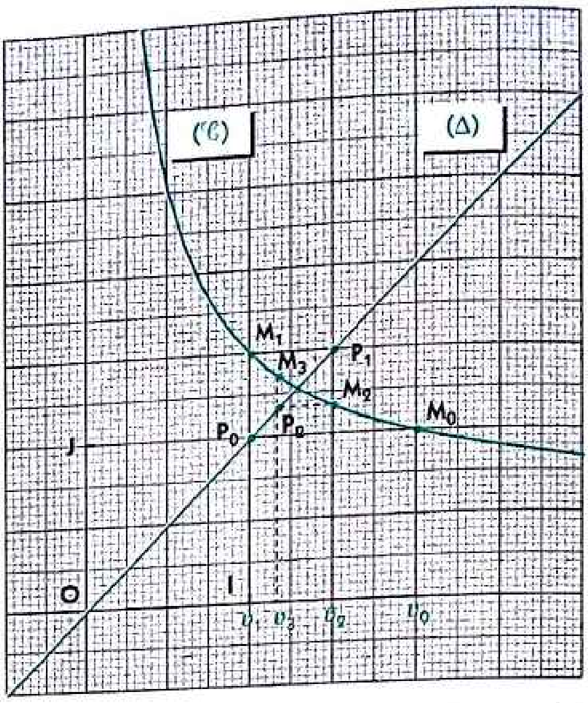
Soit ($\mathscr{C}$) la représentation graphique, sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$, de la fonction

$g : x \mapsto \dfrac{x+2}{2x}$ et ($\Delta$) la droite d'équation $y = x$.

*Construction de $v_1$*
Soit $M_0$ le point de ($\mathscr{C}$) d'abscisse $v_0 = 2$ ;
l'ordonnée de $M_0$ est $v_1 = g(v_0)$.
Soit $P_0$ le point de ($\Delta$) d'ordonnée $v_1$ ;
l'abscisse de $P_0$ est $v_1$.

*Construction de $v_2$*
Soit $M_1$ le point de ($\mathscr{C}$) d'abscisse $v_1$ ;
l'ordonnée de $M_1$ est $v_2 = g(v_1)$.
Soit $P_1$ le point de ($\Delta$) d'ordonnée $v_2$ ;
l'abscisse de $P_1$ est $v_2$.

*Construction de $v_3$*
Soit $M_2$ le point de ($\mathscr{C}$) d'abscisse $v_2$ ;
l'ordonnée de $M_2$ est $v_3 = g(v_2)$.
Soit $P_2$ le point de ($\Delta$) d'ordonnée $v_3$ ;
l'abscisse de $P_2$ est $v_3$.




Cette méthode permet une construction, de proche en proche sur l'axe (OI), des termes de la suite $(v_n)$.

# Exercices

**1.a** Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite de terme général : $u_n = \dfrac{1}{2n}$.
Calculer les trois premiers termes de la suite $(u_n)$.

**1.b** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = 2u_n + 3 \end{cases}$.
Calculer $u_1$, $u_2$, $u_3$ et $u_4$.

**1.c** Voici les 4 premiers termes d'une suite numérique : $\dfrac{1}{3}$ ; $\dfrac{4}{9}$ ; $\dfrac{7}{27}$ ; $\dfrac{10}{81}$ ; ...
1. Quels sont les deux termes suivants de cette suite ?
2. Conjecturer une formule explicite donnant le terme de rang $n$.

**1.d** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_n = 3n + 5$.
Exprimer $u_{n+1}$ en fonction de $n$, puis en fonction de $u_n$.

**1.e** Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J).
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = -4 \\ u_{n+1} = \dfrac{3}{2}u_n \end{cases}$.
1. Construire les droites ($\mathscr{D}$) et ($\Delta$) d'équations respectives $y = \dfrac{3}{2}x$ et $y = x$.
2. Utiliser ($\mathscr{D}$) et ($\Delta$) pour représenter, sur l'axe (OI), les quatre premiers termes de la suite $(u_n)$.

**1.f** Le plan est muni du repère (O, I, J).
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par : $u_n = \dfrac{1}{n}$.
1. Construire, sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$, la représentation graphique ($\mathscr{C}$) de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$.
2. Utiliser ($\mathscr{C}$) pour représenter, sur l'axe (OJ), les trois premiers termes de la suite $(u_n)$.

# 2 Suites arithmétiques, suites géométriques

## 2.1. Suites arithmétiques

### Introduction

Pour mener des enquêtes sur le respect des droits de l'homme dans un pays, une organisation non gouvernementale (ONG) internationale loue un autobus aux conditions suivantes :
– à la première heure de location, l'ONG paie 20 000 F CFA ;
– à chaque heure supplémentaire, elle paie une somme forfaitaire de 5 000 F CFA.

• Remplir le tableau ci-contre.
• On désigne par $L_n$ le coût de location de l'autobus à la $n^{\text{ième}}$ heure.
Exprimer $L_{n+1}$ en fonction de $L_n$.

| Heure | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| Location | | | | |

### Définitions

**Soit $(u_n)_{n \in E}$ une suite numérique.**
**• $(u_n)$ est une suite arithmétique s'il existe un nombre réel $r$ tel que :**
**pour tout $n$ élément de E, $u_{n+1} = u_n + r$.**
**• Le nombre réel $r$ est appelé raison de la suite $(u_n)$.**

### Remarque

*On obtient un nouveau terme de la suite en ajoutant au terme précédent un nombre indépendant de n.*

*Exemples*

• Reprenons l'exemple des coûts de confection de vêtements du couturier styliste.
Les coûts de confection des vêtements sont les termes de la suite $(C_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par : $\begin{cases} C_1 = 5\,500 \\ C_{n+1} = C_n + 250 \end{cases}$.
$(C_n)$ est une suite arithmétique de raison 250 et de premier terme 5 500.

• Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = u_n - 5 \end{cases}$.
$(u_n)$ est une suite arithmétique de raison – 5 et de premier terme – 2.

### Propriétés

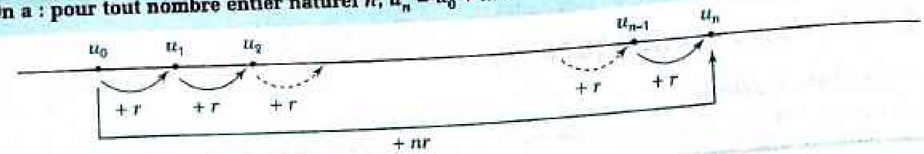
Reprenons l'exemple introductif.
Les coûts de location de l'autobus sont les termes de la suite arithmétique $(L_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de raison 5 000 et de premier terme 20 000.
En appliquant successivement la définition, on obtient :
$L_2 = 20\,000 + 5\,000 = 20\,000 + 1 \times 5\,000$ ;
$L_3 = (20\,000 + 1 \times 5\,000) + 5\,000 = 20\,000 + 2 \times 5\,000$ ;
$L_4 = (20\,000 + 2 \times 5\,000) + 5\,000 = 20\,000 + 3 \times 5\,000$ ;
$L_5 = (20\,000 + 3 \times 5\,000) + 5\,000 = 20\,000 + 4 \times 5\,000$.

• Conjecturer une formule explicite donnant le terme de rang $n$ de la suite $(L_n)$ en fonction de $n$ et $L_1$.
• Quel est le coût de location de l'autobus au bout de 10 heures ?

Nous admettons la propriété suivante.

## Propriété

**Soit $(u_n)$ une suite arithmétique de premier terme $u_0$ et de raison $r$.**
**On a : pour tout nombre entier naturel $n$, $u_n = u_0 + nr$.**




Plus généralement, nous admettons la propriété suivante.

## Propriété

**Soit $(u_n)$ une suite arithmétique de raison $r$.**
**On a : pour tous nombres entiers naturels $n$ et $k$, $u_n = u_k + (n - k)r$.**

## Remarques

- *Si $(u_n)$ a pour premier terme $u_1$, le terme général est : $u_n = u_1 + (n - 1)r$.*
- *Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = an + b$, où $a$ et $b$ sont deux nombres réels donnés.*
*On a : $u_{n+1} = a(n + 1) + b = (an + b) + a = u_n + a$.*
*Donc, $(u_n)$ est une suite arithmétique de raison $a$ et de premier terme $b$.*

***Exemples***

- La suite des nombres entiers naturels impairs est une suite arithmétique de raison 2 et de premier terme 1.
- La suite des nombres entiers naturels multiples de 5 est une suite arithmétique de raison 5 et de premier terme 0.
- La suite $(C_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ précédente est telle que : $\begin{cases} C_1 = 5\,500 \\ C_{n+1} = C_n + 250 \end{cases}$.

On a : pour tout entier naturel non nul $n$, $C_n = 5\,500 + 250(n - 1)$.

**M**

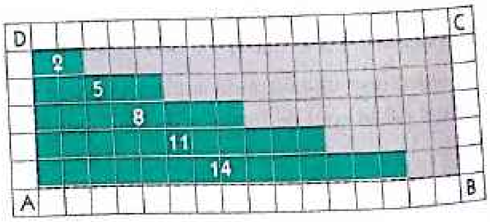
Pour démontrer qu'une suite $(u_n)$ est arithmétique, on peut utiliser l'un des procédés suivants.
Pour démontrer qu'une suite $(u_n)$ est arithmétique, on peut utiliser l'un des procédés suivants :

- Établir que la différence de deux termes consécutifs est un nombre réel indépendant de $n$ :
$u_n - u_{n-1} = r$.
- Écrire $u_n$ sous la forme $u_n = an + b$, où $a$ et $b$ sont deux nombres réels indépendants de $n$.

### Somme de termes consécutifs

On se propose de calculer de façon performante la somme : $S = 2 + 5 + 8 + 11 + 14$.
*Lorsqu'il avait à peine 7 ans, Karl Friedrich Gauss (1777-1855) émerveilla toute la classe en donnant immédiatement le résultat d'un calcul analogue que monsieur Buttner, le maître, venait de poser.*
Nous allons exposer, ici, la méthode géniale que Gauss utilisa.

- Représentons, sur une feuille de papier quadrillé, chaque terme de la somme S par un rectangle dont l'aire est égale à ce nombre.
Quel nombre représente l'aire de la surface coloriée ?
- Complétons la figure pour obtenir le rectangle ABCD.
– Justifier l'égalité : aire(ABCD) = 2S.
– Déduire de cette égalité la valeur de S.



Plus généralement, nous admettons la propriété suivante.

**Propriété**

**La somme de $n$ termes consécutifs d'une suite arithmétique est égale au produit par $n$ de la demi-somme des termes extrêmes.**

*Exemples*

• La somme des $n$ premiers nombres entiers naturels non nuls est :

$1 + 2 + 3 + ... + n = n \times \frac{1+n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$.

• La somme des $n$ premiers nombres entiers naturels pairs est :

$0 + 2 + 4 + ... + 2(n-1) = n \times \frac{0 + 2(n-1)}{2} = n(n-1)$.

• La somme des $n$ premiers nombres entiers naturels impairs est :

$1 + 3 + 5 + ... + (2n-1) = n \times \frac{1 + (2n-1)}{2} = n^2$.

### Déterminations de suites arithmétiques

**1. $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique telle que : $u_6 = 15$ et $u_8 = 19$.**
**Déterminer la raison et le premier terme de cette suite.**

**Solution**

Soit $r$ la raison et $u_0$ le premier terme de $(u_n)$.

On a : pour tout nombre entier naturel $n$, $u_n = u_0 + nr$.

$u_6 = 15$ *équivaut à* $u_0 + 6r = 15$.

$u_8 = 19$ *équivaut à* $u_0 + 8r = 19$.

On résoud le système : $\begin{cases} u_0 + 6r = 15 \\ u_0 + 8r = 19 \end{cases}$.

On obtient : $r = 2$ et $u_0 = 3$.

Donc : pour tout nombre entier naturel $n$, $u_n = 3 + 2n$.

**2. La somme des trois termes consécutifs d'une suite arithmétique est 45, leur produit est 3 240.**
**Déterminer ces trois nombres.**
***On pourra les noter $a - r$, $a$ et $a + r$.***

**Solution**

$(a - r) + a + (a + r) = 45$ *équivaut à* $3a = 45$.

Donc : $a = 15$.

$(a - r) \times a \times (a + r) = 3\,240$ *équivaut à* $225 - r^2 = 216$.

Donc : $r^2 = 9$ ; c'est-à-dire : $r = -3$ ou $r = 3$.

• Si $a = 15$ et $r = -3$, les trois nombres cherchés sont dans l'ordre : 18, 15 et 12.

• Si $a = 15$ et $r = 3$, les trois nombres cherchés sont dans l'ordre : 12, 15 et 18.

## 2.2. Suites géométriques

### Introduction

Monsieur Ouédraogo désire acheter un vélo qui, en janvier 2001, coûtait 100 000 F CFA.
Le taux annuel d'inflation, à partir de 2001, est de 5 %.

• Calculer le prix du vélo en janvier 2002, en janvier 2003.

• On désigne par $P_n$ le prix du vélo au bout de $n$ années.
Conjecturer une relation entre $P_n$ et $P_{n-1}$.

## Définitions

**Soit $(u_n)_{n \in E}$ une suite numérique.**

- **$(u_n)$ est une suite géométrique s'il existe un nombre réel $q$ tel que :**

  **pour tout $n$ élément de E, $u_{n+1} = qu_n$.**
- **Le nombre réel $q$ est appelé raison de la suite $(u_n)$ .**

*Dans la suite de ce chapitre, on suppose que les suites géométriques ont un premier terme et une raison non nuls.*

## Remarque

*On obtient un nouveau terme de la suite en multipliant le terme précédent par un nombre indépendant de n.*

### *Exemples*

- Reprenons l'exemple introductif.

Le prix du vélo est une suite géométrique $(P_n)$ de raison 1,05 et de premier terme 100 000.

- Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 6 \\ u_{n+1} = -2u_n \end{cases}$.

$(u_n)$ est une suite géométrique de raison – 2 et de premier terme 6.

## Propriétés

Reprenons l'exemple introductif.

Le prix du vélo est une suite géométrique $(P_n)$ de raison 1,05 et de premier terme 100 000.

En appliquant successivement la définition, on obtient :

$P_1 = 1{,}05 \times 100\,000 = 105\,000$ ;

$P_2 = 1{,}05 \times 105\,000 = (1{,}05)^2 \times 100\,000 = 110\,250$ ;

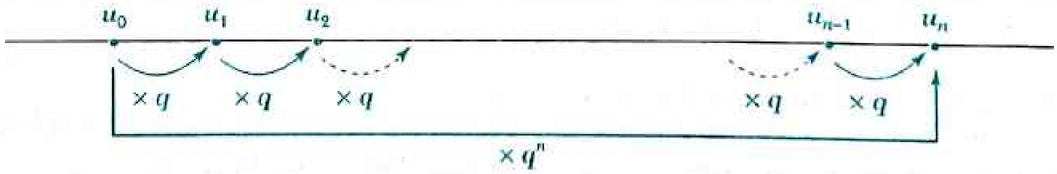
$P_3 = 1{,}05 \times 110\,250 = (1{,}05)^3 \times 100\,000 = 115\,762{,}5$.

- Conjecturer une formule explicite donnant le terme de rang $n$ de la suite $(P_n)$ en fonction $n$.
- Quel est le prix du vélo au bout de 6 ans ?
- À l'aide d'une calculatrice, déterminer au bout de combien d'années le prix du vélo va doubler.

Nous admettons la propriété suivante.

## Propriété

**Soit $(u_n)$ une suite géométrique de premier terme $u_0$ et de raison $q$.**
**On a : pour tout nombre entier naturel $n$, $u_n = u_0 q^n$.**




Plus généralement, nous admettons la propriété suivante.

## Propriété

**Soit $(u_n)$ une suite géométrique de raison $q$.**

**On a : pour tous nombres entiers naturels $n$ et $k$, $u_n = u_k\, q^{n-k}$.**

## Remarques

- *Si une suite $(u_n)$ a pour premier terme $u_1$, le terme général est : $u_n = u_1\, q^{n-1}$.*
- *Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = ba^n$, où $a$ et $b$ sont deux nombres réels donnés.*

### Exemples

• Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de terme général : $u_n = 10^n$.
$(u_n)$ est une suite géométrique de raison 10 et de premier terme 1.

• Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} v_0 = 6 \\ v_{n+1} = -2v_n \end{cases}$.

$(v_n)$ est une suite géométrique de raison $-2$ et de premier terme 6.
On a : pour tout entier naturel $n$, $v_n = 6 \times (-2)^n$.

## Somme de termes consécutifs

*On trouve au Musée du Louvre une tablette écrite en caractères cunéiformes, sous le règne de Nabuchodonosor (– 605, – 539). Il y est gravé l'égalité suivante :*

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8 + 2^9 = 2^{10} - 1.$$

Vérifier ce beau résultat en calculant successivement :

$S_1 = 1 + 2$ ;
$S_2 = 1 + 2 + 2^2$ ;
$S_3 = 1 + 2 + 2^2 + 2^3$ ;
..........................................................................
$S_9 = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8 + 2^9$.

Plus généralement, nous admettons la propriété suivante.

**Propriété**

**Soit S la somme de $n$ termes consécutifs d'une suite géométrique de premier terme $a$ et de raison $q$.**

**• Si $q \neq 1$, alors $S = a \times \dfrac{1-q^n}{1-q}$.**

**• Si $q = 1$, alors $S = n \times a$.**

### Exemples

• $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1$.

• $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \dots + \dfrac{1}{2^{n-1}} = 2 - \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

## Déterminations de suites géométriques

**1. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique telle que : $u_3 = -5$ et $u_6 = 40$.**
**Déterminer la raison et le premier terme de cette suite.**

### Solution

Soit $q$ la raison et $u_0$ le premier terme de $(u_n)$.
On a : pour tout nombre entier naturel $n$, $u_n = u_0 q^n$.
$u_3 = -5$ *équivaut à* $u_0q^3 = -5$.
$u_6 = 40$ *équivaut à* $u_0q^6 = 40$.
On a : $u_0 \neq 0$ et $q \neq 0$ ; donc : $\dfrac{u_0q^6}{u_0q^3} = \dfrac{40}{-5}$, c'est-à-dire : $q^3 = -8$ ou : $q = -2$.

$u_0q^3 = -5$ *équivaut à* $-8u_0 = -5$ ; donc : $u_0 = \frac{5}{8}$.

Donc : pour tout nombre entier naturel $n$, $u_n = \frac{5}{8}(-2)^n$.

**2. La somme des trois termes consécutifs d'une suite géométrique est 777, leur produit est 343 000. Déterminer ces trois nombres.**

***On pourra les noter $\frac{a}{q}$, $a$ et $aq$.***

## Solution

$\frac{a}{q} \times a \times aq = 343\,000$ *équivaut à* $a^3 = 343\,000$.

Donc : $a = 70$.

$\frac{a}{q} + a + aq = 777$ *équivaut à* $a(1 + q + q^2) = 777q$.

$a(1 + q + q^2) = 777q$ *équivaut à* $70(1 + q + q^2) = 777q$.

On résoud l'équation du second degré : $10q^2 - 101q + 10 = 0$.

On obtient : $q = 10$ ou $q = 0{,}1$.

- Si $a = 70$ et $q = 10$, les trois nombres cherchés sont dans l'ordre : 7, 70 et 700.
- Si $a = 70$ et $q = 0{,}1$, les trois nombres cherchés sont dans l'ordre : 700, 70 et 7.

# Exercices

**2.a** Écrire les cinq premiers termes d'une suite arithmétique de raison 7 et de 1er terme 2.

**2.b** Déterminer le 20e terme et la somme des 20 premiers termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison 4 et de 1er terme – 5.

**2.c** **1.** Déterminer la raison et le 1er terme d'une suite arithmétique dont le 5e terme est 6 et le 12e terme est – 8.
**2.** Exprimer, en fonction de l'entier naturel $n$, le terme général de cette suite et la somme des $n$ premiers termes consécutifs.

**2.d** Déterminer la raison et le 1er terme d'une suite arithmétique dont le 4e terme est 16 et la somme des 4 premiers termes consécutifs est 34.

**2.e** Dans chacun des cas suivants, déterminer la raison et le premier terme de la suite arithmétique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

*a)* $u_n = \frac{1}{5}n$ *b)* $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} - u_n = 5 \end{cases}$

*c)* $u_n = 2 + 4n$ *d)* $\begin{cases} u_0 = -3 \\ u_{n+1} = u_n + 3 \end{cases}$.

**2.f** Écrire les trois premiers termes d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de 1er terme 36.

**2.g** Déterminer le 10e terme et la somme des dix premiers termes consécutifs d'une suite géométrique de raison 2 et de 1er terme 3.

**2.h** **1.** Déterminer la raison et le 1er terme d'une suite géométrique dont le 4e terme est 2 000 et le 7e terme est 2 000 000.
**2.** Exprimer, en fonction de l'entier naturel $n$, le terme général de cette suite et la somme des $n$ premiers termes consécutifs.

**2.i** Déterminer la raison d'une suite géométrique de 1er terme 1 dont la somme des deux premiers termes consécutifs est 5.

**2.j** Dans chacun des cas suivant, déterminer la raison et le premier terme de la suite géométrique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

*a)* $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ *b)* $\begin{cases} u_0 = -1 \\ \frac{u_{n+1}}{u_n} = 3 \end{cases}$

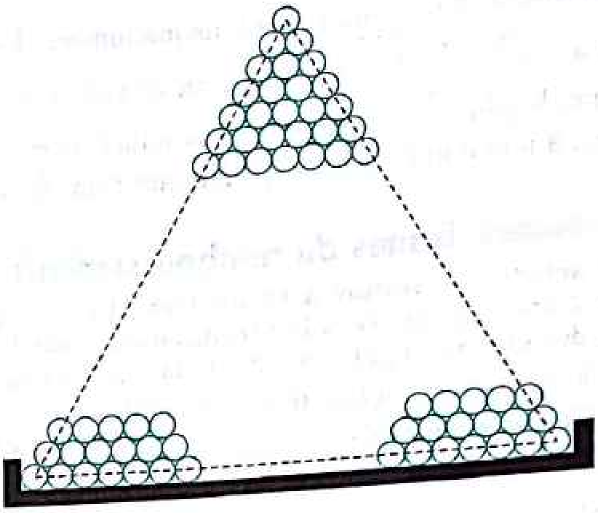
*c)* $u_n = -5 \times 4^n$ *d)* $\begin{cases} u_0 = 9 \\ u_{n+1} = -3u_n \end{cases}$.

# 3 Résolution de problèmes

## 3.1. Problèmes conduisant à une suite arithmétique

### Stockage de tuyaux cylindriques

**Des tuyaux cylindriques de même diamètre sont stockés de la manière suivante.**
**Une rangée de $n$ tuyaux côte à côte est placée entre deux butées ; sur cette rangée sont disposés $(n-1)$ tuyaux ; sur la deuxième rangée sont disposés $(n-2)$ tuyaux ; ... ; sur la $(n-2)^{\text{ième}}$ rangée sont disposés 2 tuyaux ; sur la $(n-1)^{\text{ième}}$ rangée est disposé 1 tuyau. Ce dernier tuyau constitue la $n^{\text{ième}}$ rangée.**



**1°) Calculer, en fonction de $n$, le nombre de tuyaux que l'on peut stocker en un seul tas.**

**2°) Déterminer le nombre de rangées d'un tas de 78 tuyaux.**

### Solution

1°) La 1^re^ rangée comporte $n$ tuyaux ;
la 2^e^ rangée comporte $(n-1)$ tuyaux ;
la 3^e^ rangée comporte $(n-2)$ tuyaux ;
.......................................................... ;
la $(n-2)^{\text{ième}}$ rangée comporte 3 tuyaux ;
la $(n-1)^{\text{ième}}$ rangée comporte 2 tuyaux ;
la $n^{\text{ième}}$ rangée comporte 1 tuyau.
Donc, le nombre de tuyaux que l'on peut stocker est :

$$n + (n-1) + (n-2) + \ldots + 3 + 2 + 1 = \frac{n(n+1)}{2}.$$

2°) Tout revient à déterminer l'entier naturel $n$, tel que : $\frac{n(n+1)}{2} = 78$.

On déduit de cette égalité l'équation du second degré : $n^2 + n - 156 = 0$.
Cette équation a pour solutions 12 et $-13$. La solution négative ne convient pas.
Donc, le tas comporte 12 rangées de tuyaux.

### Hydraulique villageoise

**Une entreprise de forage propose le tarif suivant : 10 000 F CFA le premier mètre, 12 000 F CFA le deuxième mètre, 14 000 F CFA le troisième mètre et ainsi de suite en ajoutant chaque fois 2 000 F CFA.**
**On désigne par $u_n$ le coût du forage du $n^{\text{ième}}$ mètre.**

**1°) Exprimer, pour tout entier naturel non nul $n$, $u_n$ en fonction de $n$.**

**2°) *a)* Quel est le coût du forage du 16^e^ mètre ? du 30^e^ mètre ?**
***b)* Quel est le coût du forage d'un puits de profondeur 16 mètres ?**

**3°) Quelle profondeur maximale, en mètres, peut-on atteindre avec un budget de 3 000 000 F CFA ?**

### Solution

1°) $(u_n)$ est une suite arithmétique de premier terme 10 000 et de raison 2 000.
Donc : pour tout entier naturel non nul $n$, $u_n = 10\,000 + 2\,000 \times (n-1) = 8\,000 + 2\,000n$.

2°) *a)* On a : $u_{16} = 8\,000 + 2\,000 \times 16 = 40\,000$ F CFA.
$u_{30} = 8\,000 + 2\,000 \times 30 = 68\,000$ F CFA.

*b)* Le coût du forage d'un puits de profondeur 16 mètres est :

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_{16} = 16 \times \frac{u_1 + u_{16}}{2} = 8(10\,000 + 40\,000) = 400\,000 \text{ F CFA}.$$

3°) Tout revient à déterminer le plus grand entier naturel $n$, tel que : $u_1 + u_2 + ... + u_n \leq 3\ 000\ 000$.

On a : $u_1 + u_2 + ... + u_n = n \times \dfrac{u_1 + u_n}{2} = \dfrac{n(18\ 000 + 2\ 000n)}{2}$.

Donc : $\dfrac{n(18\ 000 + 2\ 000n)}{2} \leq 3\ 000\ 000$.

On en déduit l'inéquation du second degré : $n^2 + 9n - 3\ 000 \leq 0$.
Le discriminant de l'équation $n^2 + 9n - 3\ 000 = 0$ est : $\Delta = 9^2 + 4 \times 3\ 000 = 12\ 081$ ;

L'ensemble des solutions de l'inéquation est : $I = \left]\dfrac{-9-\sqrt{12\ 081}}{2} ; \dfrac{-9+\sqrt{12\ 081}}{2}\right[$.

On a : $\dfrac{-9+\sqrt{12\ 081}}{2} \approx 50{,}45688$.

Donc, le plus grand entier naturel $n$ de l'intervalle I est 50.
Avec 3 000 000 F CFA, on peut creuser un puits d'une profondeur maximale de 50 mètres.

## Traites de remboursements

**Ali achète une voiture à 15 000 000 F CFA. Le vendeur lui propose de la payer par traites mensuelles sur 2 ans sans intérêts. Les traites diminuent de 20 000 F CFA de mois en mois.**
**On désigne par $T_n$ ($1 \leq n \leq 24$) le montant de la $n^{\text{ième}}$ traite.**

**1°) Exprimer $T_n$ en fonction de $T_1$ et de $n$.**

**2°) Calculer, en fonction de $T_1$, la somme des 24 traites.**

**3°) Déterminer les montants des différentes traites.**

## Solution

1°) La traite $T_{n+1}$ s'obtient en soustrayant 20 000 F CFA de la traite $T_n$.
Donc, $(T_n)$ est une suite arithmétique de premier terme $T_1$ et de raison $-20\ 000$.

On a : pour tout $n$ élément de $\{1, 2, ..., 24\}$, $T_n = T_1 + (-20\ 000) \times (n-1)$
$= T_1 - 20\ 000n + 20\ 000$.

2°) On a : $T_1 + T_2 + ... + T_{24} = 24 \times \dfrac{T_1 + T_{24}}{2}$
$= 12(T_1 + T_{24})$
$= 24(T_1 - 230\ 000)$.

3°) $T_1 + T_2 + ... + T_{24} = 15\ 000\ 000$ *équivaut à* $24(T_1 - 230\ 000) = 15\ 000\ 000$.

On en déduit que : $T_1 = 855\ 000$ F CFA ;
$T_2 = 835\ 000$ F CFA ;
$T_3 = 815\ 000$ F CFA ;
................................ ;
$T_{23} = 415\ 000$ F CFA ;
$T_{24} = 395\ 000$ F CFA.

## Placement à intérêts simples

*Dans un* ***placement à intérêts simples****, chaque fin de période (année, trimestre, mois ou jour), le capital produit le même intérêt. La* ***valeur acquise*** *est la somme du capital et des intérêts générés au bout de n périodes de placement.*

**Astou place, à intérêts simples, la somme de 1 000 000 F CFA au taux mensuel de 0,5 %.**
**On désigne par $V_n$ la valeur acquise par le capital au bout de $n$ mois de placement.**

**1°) Calculer $V_1$, $V_2$ et $V_3$.**

**2°) Exprimer $V_{n+1}$ en fonction de $V_n$.**
**En déduire que $(V_n)$ est une suite arithmétique dont on déterminera la raison.**

**3°) Calculer la valeur acquise par le capital au bout de 10 mois de placement.**

**4°) Au bout de combien de temps le capital atteindra-t-il la valeur de 1 600 000 F CFA ?**

**Solution**

**1°)** Le capital est : 1 000 000 F CFA.

L'intérêt mensuel est : $1\,000\,000 \times \frac{0{,}5}{100} = 5\,000$ F CFA.

On a : $V_1 = 1\,000\,000 + 5\,000 = 1\,005\,000$ F CFA ;
$V_2 = 1\,005\,000 + 5\,000 = 1\,010\,000$ F CFA ;
$V_3 = 1\,010\,000 + 5\,000 = 1\,015\,000$ F CFA.

**2°)** On pose : $V_0 = 1\,000\,000$.
On a : pour tout entier naturel $n$, $V_{n+1} = V_n + 5\,000$.
$(V_n)$ est une suite arithmétique de premier terme 1 000 000 et de raison 5 000.
Donc : pour tout entier naturel $n$, $V_n = 1\,000\,000 + 5\,000n$.

**3°)** La valeur acquise par le capital au bout de 10 mois est $V_{10}$.
On a : $V_{10} = 1\,000\,000 + 5\,000 \times 10 = 1\,050\,000$ F CFA.

**4°)** $V_n = 1\,600\,000$ *équivaut à* $1\,000\,000 + 5\,000n = 1\,600\,000$.
On en déduit : $n = 120$.
C'est au bout de dix ans que le capital atteindra la valeur de 1 600 000 F CFA.

## 3.2. Problèmes conduisant à une suite géométrique

### Placement à intérêts composés

*Dans un **placement à intérêts composés**, chaque fin de période (année, trimestre, mois ou jour), les intérêts sont capitalisés et entraînent à leur tour des intérêts au cours des périodes suivantes.*
*La **valeur acquise** est la somme du capital et des intérêts générés au bout de n périodes de placement.*

**Sylvie place, à intérêts composés, la somme de 1 000 000 F CFA dans une banque au taux annuel de 5 %. On désigne par $V_n$ la valeur acquise par le capital au bout de $n$ années de placement.**

**1°) Calculer $V_1$, $V_2$ et $V_3$.**

**2°) Exprimer $V_{n+1}$ en fonction de $V_n$.**
**En déduire que $(V_n)$ est une suite géométrique dont on déterminera la raison.**

**3°) Calculer la valeur acquise par le capital au bout de 10 années de placement.**

**4°) À l'aide d'une calculatrice, déterminer au bout de combien d'années le capital aura doublé.**

**Solution**

**1°)** On a : $V_1 = 1\,000\,000 + \frac{5}{100} \times 1\,000\,000 = 1\,050\,000$ F CFA ;

$V_2 = 1\,050\,000 + \frac{5}{100} \times 1\,050\,000 = 1\,102\,500$ F CFA ;

$V_3 = 1\,102\,500 + \frac{5}{100} \times 1\,102\,500 = 1\,157\,625$ F CFA.

**2°)** On pose : $V_0 = 1\,000\,000$.
On a : pour tout entier naturel $n$, $V_{n+1} = V_n + \frac{5}{100} V_n = 1{,}05V_n$.
$(V_n)$ est une suite géométrique de premier terme 1 000 000 et de raison 1,05.
Donc : pour tout entier naturel $n$, $V_n = (1{,}05)^n V_0 = 1\,000\,000 \times (1{,}05)^n$.

**3°)** La valeur acquise par le capital au bout de 10 ans est $V_{10}$.
On a : $V_{10} = (1{,}05)^{10} V_0 = 1\,000\,000 \times (1{,}05)^{10} = 1\,628\,894{,}627$.
$V_{10} \approx 1\,628\,895$ F CFA.

**4°)** Tout revient à déterminer l'entier naturel $n$, tel que : $1\,000\,000 \times (1{,}05)^n = 2\,000\,000$.
$1\,000\,000 \times (1{,}05)^n = 2\,000\,000$ *équivaut à* $(1{,}05)^n = 2$.
On a : $(1{,}05)^{14} \approx 1{,}979\,931\,6$ et $1\,000\,000 \times (1{,}05)^{14} \approx 1\,979\,932$.
$(1{,}05)^{15} \approx 2{,}078\,928\,2$ et $1\,000\,000 \times (1{,}05)^{15} \approx 2\,078\,928$.
Donc, c'est au bout de 15 années que Sylvie pourra doubler son capital.

## Le téléphone arabe

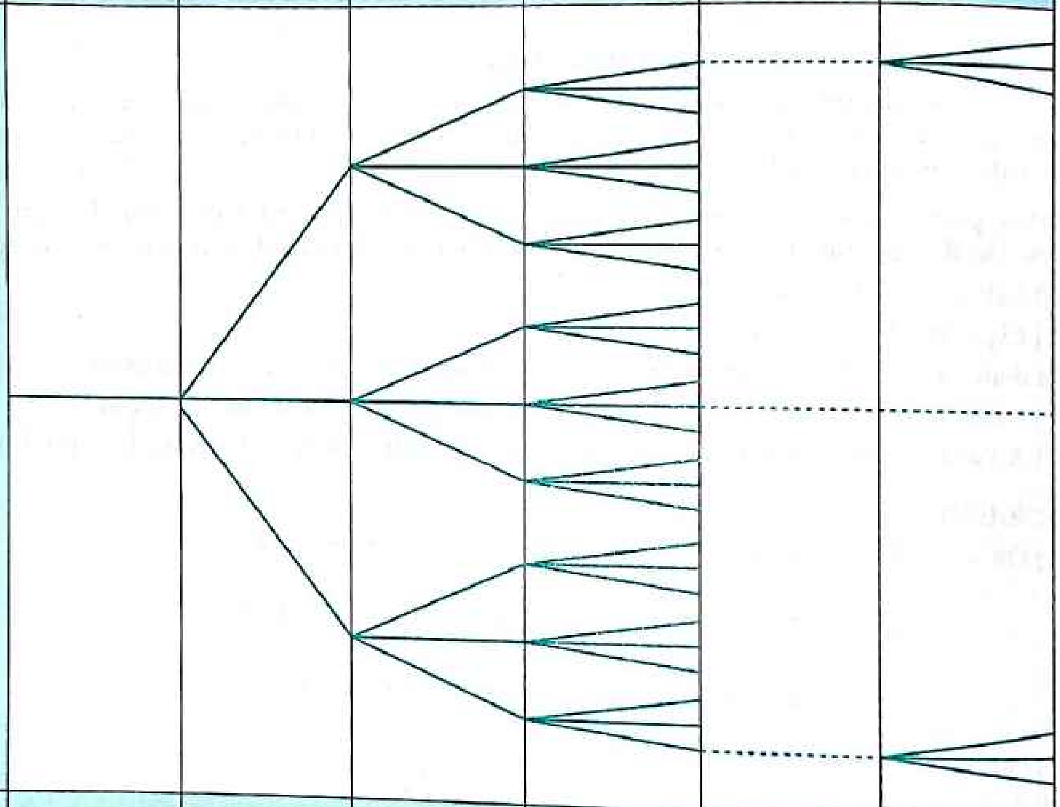
**Dans un village de 7 500 habitants, un habitant revient un jour à 8 heures au village avec une nouvelle étonnante. Dans le quart d'heure qui suit, il la raconte aux trois premiers habitants qu'il rencontre. Ceux-ci s'empressent de la raconter chacun à trois nouveaux habitants le quart d'heure suivant, ainsi de suite.**

**1°) On désigne par $u_n$ le nombre d'habitants informés pendant le $n^{\text{ième}}$ quart d'heure et on pose $u_0 = 1$.**
***a)* Calculer $u_1$, $u_2$ et $u_3$.**
***b)* En utilisant un arbre de choix, exprimer $u_n$ en fonction de $n$.**
***c)* Quel est le nombre d'habitants informés entre 9 h et 9 h 30 ?**

**2°) On désigne par $S_n$ le nombre total d'habitants informés depuis 8 h jusqu'au terme du $n^{\text{ième}}$ quart d'heure.**
***a)* Calculer $S_1$, $S_2$ et $S_3$.**
***b)* Exprimer $S_n$ en fonction de $n$.**
***c)* À quelle heure la nouvelle sera-t-elle connue de tout le village ?**

## Solution

**1°)** ***a)*** On a : $u_0 = 1$ ; $u_1 = 1 \times 3 = 3$ ; $u_2 = 3 \times 3 = 9$ ; $u_3 = 9 \times 3 = 27$.
***b)*** L'arbre ci-dessous permet de déterminer $u_n$.

| Rang du quart d'heure | 0 | 1 | 2 | 3 | … | $n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| |  | | | | | |
| Nombre d'habitants informés pendant le quart d'heure | 1 | 3 | $3^2$ | $3^3$ | … | $3^n$ |

On a : pour tout entier naturel $n$, $u_n = 3^n$.
***c)*** On a :

| Heure | 8 h 00 | 8 h 15 | 8 h 30 | 8 h 45 | 9 h 00 | 9 h 15 | 9 h 30 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Rang $n$ du quart d'heure | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| $u_n$ | 1 | 3 | $3^2$ | $3^3$ | $3^4$ | $3^5$ | $3^6$ |

Entre 9 h et 9 h 30, le nombre d'habitants informés est la somme de ceux qui sont informés entre 9 h et 9 h 15, et de ceux qui sont informés entre 9 h 15 et 9 h 30 ; c'est-à-dire : $3^5 + 3^6$.
On a : $3^5 + 3^6 = 972$.

2°) *a)* On a : $S_1 = 1 + 3 = 4$ ; $S_2 = 4 + 3^2 = 13$ ; $S_3 = 13 + 3^3 = 40$.

*b)* On a : $S_n = 1 + 3 + 3^2 + ... + 3^n = \dfrac{1 - 3^{n+1}}{1 - 3} = \dfrac{3^{n+1} - 1}{2}$.

*c)* On doit avoir : $S_n \geq 7\,500$ ; c'est-à-dire : $3^{n+1} \geq 15\,001$.
On a : $3^8 = 6\,561$ et $3^9 = 19\,683$ ; donc : $n + 1 = 9$.
On déduit que la nouvelle sera connue de tout le village au terme du 8e quart d'heure, c'est-à-dire à 10 h.

## Histoire du jeu d'échecs

**Un auteur arabe, Al Séphadi, rapporte que le roi des Perses demanda à Sessa, l'inventeur du jeu d'échecs, quelle récompense il souhaitait recevoir. Celui-ci répondit qu'il désirait simplement 1 grain de blé pour la 1re case de l'échiquier, 2 pour la 2e case, 4 pour la 3e, en doublant ainsi le nombre de grains jusqu'à la 64e case. Le roi sourit de la modestie de cette demande.**

**1°) Pour tout nombre entier $n$ compris entre 1 et 64, on note $b_n$ le nombre de grains de blé correspondant à la $n^{\text{ième}}$ case.**
***a)* Calculer $b_1$, $b_2$ et $b_3$.**
***b)* Exprimer $b_{n+1}$ en fonction de $b_n$.**
***c)* Exprimer $b_n$ en fonction de $n$.**

**2°) Pour tout nombre entier $n$ compris entre 1 et 64, on note $S_n$ le nombre total de grains de blé de la 1re à la $n^{\text{ième}}$ case.**
***a)* Calculer $S_1$, $S_2$ et $S_3$.**
***b)* Quel est le nombre de grains de blé demandés par le savant ?**

**3°) On admet qu'un grain de blé pèse environ 0,05 g.**
**Calculer, en tonnes ($10^6$ g), la quantité de blé demandée par le savant.**

### Solution

**1°)** *a)* On a : $b_1 = 1$ ; $b_2 = 2$ ; $b_3 = 4$.
*b)* Doubler chaque fois le nombre de grains de blé, c'est multiplier chaque fois le nombre de grains de blé par 2 ; donc : $b_{n+1} = 2b_n$.
$(b_n)$ est une suite géométrique de premier terme 1 et de raison 2.
*c)* Donc : pour tout entier naturel non nul $n$, $b_n = 2^{n-1}$.

**2°)** *a)* On a : $S_1 = 1$ ; $S_2 = 1 + 2 = 3$ ; $S_3 = 3 + 2^2 = 7$.
*b)* Le nombre de grains de blé demandés par le savant est : $S_{64}$.

On a : $S_{64} = 1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{63} = \dfrac{1 - 2^{64}}{1 - 2} = 2^{64} - 1 = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615$.

**3°)** La quantité, en tonnes, de blé demandé par le savant est :
$5 \times 10^{-8} \times 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615 \approx 922\,337\,203\,685$.
Il a demandé plus de 922,337 milliards de tonnes de blé.
*Les producteurs de blé ont encore beaucoup d'efforts et d'années à faire pour satisfaire le savant !*

## Gestion de fonds

**Une banque reçoit un dépôt de 5 000 000 F CFA. Elle met 80 % de ce dépôt en circulation sous forme de prêts et conserve le reste. L'activité économique se traduit par le fait que les sommes prêtées reviennent dans le système où elles apparaissent comme un nouveau dépôt, lequel sera traité selon le même processus, à savoir 80 % remis en circulation et 20 % en réserve.**
**Le premier dépôt engendre une suite de dépôts et une suite de mises en réserve.**

**1°) On désigne par $(d_n)$ le $n^{\text{ième}}$ dépôt.**
***a)* Calculer $d_1$, $d_2$ et $d_3$.**
***b)* Exprimer $d_{n+1}$ en fonction de $d_n$.**
***c)* Exprimer $d_n$ en fonction de $n$.**

2°) On désigne par $(r_n)$ la $n^{\text{ième}}$ mise en réserve.
*a)* Calculer $r_1$, $r_2$, $r_3$ et $r_4$.
*b)* Exprimer $r_{n+1}$ en fonction de $r_n$.
*c)* Exprimer $r_n$ en fonction de $n$.

3°) On fait le bilan après que la banque ait reçu les 20 premiers dépôts.
*a)* Déterminer la somme totale que la banque a reçue.
*b)* Déterminer la somme totale que la banque a mise en réserve.

## Solution

**1°)** ***a)*** Le 1er dépôt est : $d_1 = 5\ 000\ 000$.

Le 2e dépôt est égal aux 80 % de $d_1$ ; donc : $d_2 = d_1 \times \frac{80}{100} = 0{,}8d_1$.

Le 3e dépôt est égal aux 80 % de $d_2$ ; donc : $d_3 = d_2 \times \frac{80}{100} = d_1 \times (0{,}8)^2$.

On a : $d_1 = 5\ 000\ 000$ F CFA ;

$d_2 = d_1 \times 0{,}8 = 5\ 000\ 000 \times 0{,}8 = 4\ 000\ 000$ F CFA ;

$d_3 = d_1 \times (0{,}8)^2 = 5\ 000\ 000 \times (0{,}8)^2 = 3\ 200\ 000$ F CFA.

***b)*** Le dépôt suivant s'obtient en multipliant le précédent par 0,8 ; donc : $d_{n+1} = 0{,}8d_n$.

$(d_n)$ est une suite géométrique de raison 0,8 et de premier terme : $d_1 = 5\ 000\ 000$.

***c)*** On a : pour tout entier naturel non nul $n$, $d_n = 5\ 000\ 000 \times (0{,}8)^{n-1}$.

**2°)** ***a)*** La 1re réserve est égale aux 20 % de $d_1$ : donc : $r_1 = d_1 \times \frac{20}{100} = 0{,}2d_1$.

La 2e réserve est égale aux 20 % de $d_2$ ; donc : $r_2 = d_2 \times \frac{20}{100} = 0{,}8d_1 \times 0{,}2 = 0{,}2d_1 \times 0{,}8$.

La 3e réserve est égale aux 20 % de $d_3$ ; donc : $r_3 = d_3 \times \frac{20}{100} = 0{,}2d_1 \times (0{,}8)^2$.

La 4e réserve est égale aux 20 % de $d_4$ ; donc : $r_4 = d_4 \times \frac{20}{100} = 0{,}2d_1 \times (0{,}8)^3$.

On a : $r_1 = 0{,}2 \times 5\ 000\ 000 = 1\ 000\ 000$ F CFA ;

$r_2 = 1\ 000\ 000 \times 0{,}8 = 800\ 000$ F CFA ;

$r_3 = = 1\ 000\ 000 \times (0{,}8)^2 = 640\ 000$ F CFA ;

$r_4 = = 1\ 000\ 000 \times (0{,}8)^2 = 512\ 000$ F CFA.

***b)*** La réserve suivante s'obtient en multipliant la précédente par 0,8 ; donc : $r_{n+1} = 0{,}8r_n$.

$(r_n)$ est une suite géométrique de raison 0,8 et de premier terme : $0{,}2d_1 = 1\ 000\ 000$.

***c)*** On a : pour tout entier naturel non nul $n$, $r_n = 1\ 000\ 000 \times (0{,}8)^{n-1}$.

**3°)** On fait le bilan après que la banque ait reçu les 20 premiers dépôts.

***a)*** La somme totale que la banque a reçue après les 20 premiers dépôts est : $d_1 + d_2 + ... + d_{20}$.

On a : $d_1 + d_2 + ... + d_{20} = d_1 \times \frac{1-(0{,}8)^{20}}{1-0{,}8} = 5\ 000\ 000 \times \frac{1-(0{,}8)^{20}}{0{,}2}$ ;

$d_1 + d_2 + ... + d_{20} \approx 24\ 711\ 770$ F CFA.

***b)*** La somme totale que la banque a mise en réserve immédiatement après le 20e dépôt est : $r_1 + r_2 + ... + r_{20}$.

On a : $r_1 + r_2 + ... + r_{20} = 0{,}2d_1 \times \frac{1-(0{,}8)^{20}}{1-0{,}8} = 1\ 000\ 000 \times \frac{1-(0{,}8)^{20}}{0{,}2}$ ;

$r_1 + r_2 + ... + r_{20} \approx 4\ 942\ 355$ F CFA.

# Exercices

## APPRENTISSAGE

### Généralités

**1** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_n = \dfrac{n}{1+n}$.
Déterminer les cinq premiers termes de la suite $(u_n)$.

**2** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_n = (-3)^n + 4$.
Déterminer les trois premiers termes de la suite $(u_n)$.

**3** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = 4 + \dfrac{1}{2}u_n. \end{cases}$$

Déterminer $u_1$, $u_2$, $u_3$ et $u_4$.

**4** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} - u_n = -1 \end{cases}$$

Déterminer $u_1$, $u_2$, $u_3$, $u_4$ et $u_5$.

**5** On donne les premiers termes d'une suite $(u_n)$.
Déterminer, dans chaque cas, les deux termes suivants.

*a)* $8 ; 4 ; 2 ; 1 ; \dfrac{1}{2} ; \dots$

*b)* $-5 ; -1 ; 3 ; 7 ; 11 ; \dots$

*c)* 0,1 ; 0,101 ; 0,101 001 ; ...

*d)* 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 8 ; 13 ; 21 ; ...

**6** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :
$$u_n = 2 + n(-1)^n.$$
Déterminer les cinq premiers termes de la suite $(u_n)$.

**7** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 8 \\ u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{2}u_n. \end{cases}$$

Déterminer les quatre premiers termes de la suite $(u_n)$.

**8** Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J).
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = 3 + \dfrac{1}{4}u_n. \end{cases}$$

1. Construire les droites $(\mathcal{D})$ et $(\Delta)$ d'équations respectives $y = 3 + \dfrac{1}{4}x$ et $y = x$.
2. Utiliser $(\mathcal{D})$ et $(\Delta)$ pour représenter, sur l'axe (OI), les quatre premiers termes de la suite $(u_n)$.

**9** Le plan est muni du repère (O, I, J).
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_n = \sqrt{n}$.
1. Construire, sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$, la représentation graphique $(\mathscr{C})$ de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$.
2. Utiliser $(\mathscr{C})$ pour représenter, sur l'axe (OJ), les quatre premiers termes de la suite $(u_n)$.

**10** Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J).
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = = -1 \\ u_{n+1} = 1 + (u_n)^2. \end{cases}$$

1. Construire les courbes $(\mathscr{C})$ et $(\Delta)$ d'équations respectives $y = 1 + x^2$ et $y = x$.
2. Utiliser $(\mathscr{C})$ et $(\Delta)$ pour représenter, sur l'axe (OI), les trois premiers termes de la suite $(u_n)$.

**11** Le plan est muni du repère (O, I, J).
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_n = \dfrac{2n+1}{n+1}$.
1. Construire, sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$, la représentation graphique $(\mathscr{C})$ de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x+1}{x+1}$.
2. Utiliser $(\mathscr{C})$ pour représenter, sur l'axe (OJ), les trois premiers termes de la suite $(u_n)$.

### Suites arithmétiques

**12** $(u_n)$ est une suite arithmétique telle que :
$u_8 = -5$ et $u_{15} = 37$.
Déterminer la raison et le premier terme de cette suite.

**13** Déterminer la raison et le premier terme d'une suite arithmétique dont le 3ᵉ terme est 3 et le 9ᵉ terme est 57.

**14** Déterminer le 40ᵉ terme d'une suite arithmétique dont le 35ᵉ terme est 9 et le 45ᵉ terme est 29.

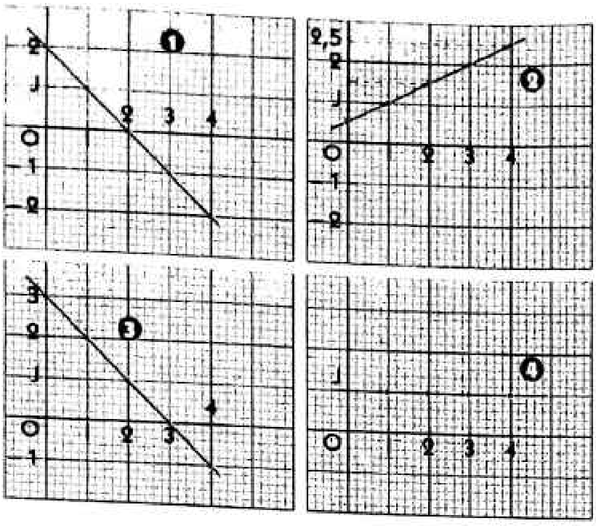
**15** Déterminer la somme des 10 premiers termes d'une suite arithmétique de raison $-1$ dont le 3ᵉ terme est 15.

**16** Déterminer la somme des 10 premiers termes d'une suite arithmétique de raison 2 dont le 3ᵉ terme est $-1$.

**17** Déterminer le 1ᵉʳ terme et le 16ᵉ terme d'une suite arithmétique de raison 5 dont la somme des seize premiers termes est 648.

**18** 1. On considère la somme :
$$A = 10 + 20 + 30 + \dots + 80 + 90.$$
*a)* Les termes de cette somme sont ceux d'une suite arithmétique que l'on précisera.
*b)* Calculer A.
2. Calculer de la même façon les sommes suivantes.
B = 100 + 120 + 140 + ... + 260 + 280
C = 1 000 + 1 500 + 2 000 + ... + 4 500 + 5 000.

**19** On donne ci-après quatre représentations graphiques associées à quatre suites arithmétiques.
Retrouver pour chaque suite le premier terme et la raison.



**20** L'évolution de la population mondiale entre les années 1950 et 1990 est donnée par le tableau suivant.

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Année $a_n$ | 1950 | 1960 | 1970 | 1980 | 1990 |
| Population $p_n$ (en milliards d'habitants) | 2,5 | 3,0 | 3,6 | 4,4 | 5,2 |

**1.** Soit $(u_n)$ la suite arithmétique définie par :

$$u_1 = 2{,}5 \quad \text{et} \quad u_5 = 5{,}2.$$

*a)* Calculer sa raison.
*b)* Calculer $u_2$, $u_3$ et $u_4$.
**2.** On veut représenter, dans le plan muni du repère (O, I, J), l'évolution de la population mondiale par cette suite arithmétique. L'indice $n$ représente la dizaine d'années comme cela est indiqué sur le tableau ci-dessus et $u_n$ est exprimé en milliards d'habitants.
Représenter sur l'axe (OJ) les quatre premiers termes de la suite $(u_n)$.
**3.** Quelle serait la valeur de $u_n$ pour l'an 2010 ?
Exprimer en pourcentage l'augmentation de la population tous les dix ans, à partir de 1960.

**21** Dans chacun des cas suivants, démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique.
Déterminer le premier terme et la raison de cette suite.

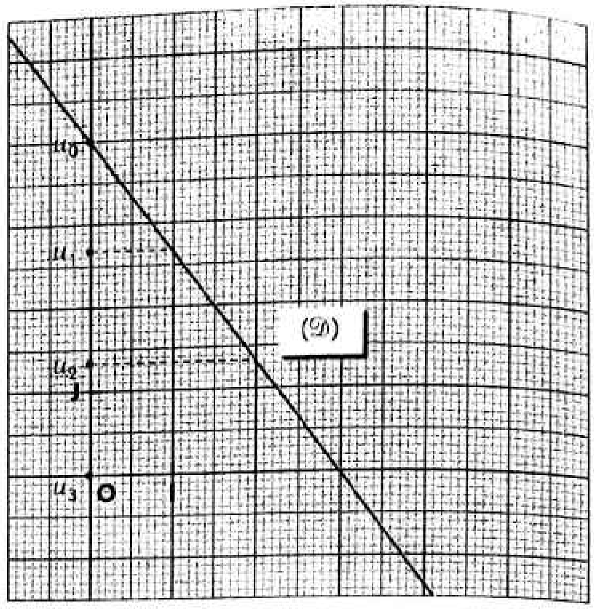
*a)* $u_n = 4 - 3(n-1)$ *b)* $\begin{cases} u_0 = -1 \\ 5u_{n+1} = 5u_n - 2. \end{cases}$

**22** $x$, $y$ et $z$ sont, dans cet ordre, trois termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison $-4$.
Déterminer ces trois nombres, sachant que leur somme est 9.

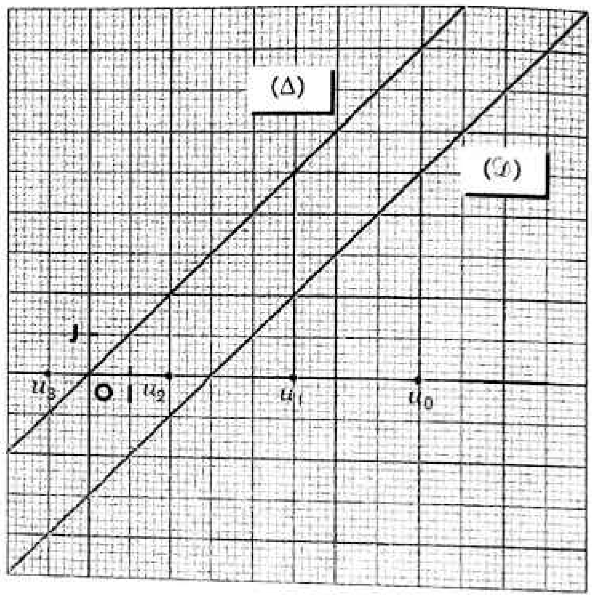
**23** $(u_n)$ est une suite arithmétique de premier terme 3 et de raison 2 telle que : $u_0 + u_1 + \ldots + u_{p-1} = 24$.
**1.** Vérifier que $p$ est solution de l'équation du second degré : $p^2 + 2p - 24 = 0$.
**2.** Déterminer $p$.

**24** Sur chacun des trois graphiques suivants, on a représenté les premiers termes d'une suite.
**1.** Déterminer le terme général de la suite.
**2.** La suite est-elle arithmétique ?
Si oui, préciser le premier terme et la raison.

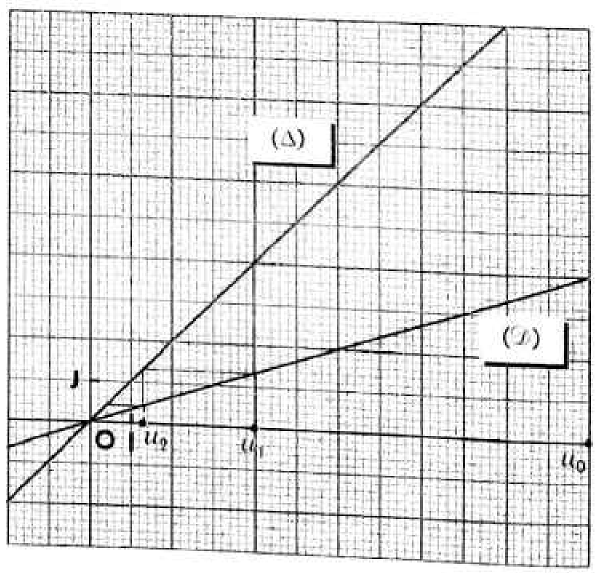
*a)*




*b)*




*c)*



# Suites géométriques

**25** $(u_n)$ est une suite géométrique telle que : $u_3 = -24$ et $u_6 = 192$.
Déterminer la raison et le premier terme de cette suite.

**26** Déterminer la raison et le premier terme d'une suite géométrique dont le 3$^e$ terme est 3 et le 5$^e$ terme est 12.

**27** Déterminer le 25$^e$ terme d'une suite géométrique dont le 20$^e$ terme est 9 et le 21$^e$ terme est 27.

**28** Déterminer la somme des dix premiers termes d'une suite géométrique de raison $-1$ dont le 3$^e$ terme est 15.

**29** Déterminer la somme des dix premiers termes d'une suite géométrique de raison 2 dont le 3$^e$ terme est $-1$.

**30** Dans chacun des cas suivants, démontrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique.
Déterminer le premier terme et la raison de cette suite.

*a)* $u_n = 2^{n+1}$ *b)* $u_n = 4^{n+1}$

*c)* $u_n = \dfrac{3^n}{2}$ *d)* $u_n = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

**31** $x$, $y$ et $z$ sont, dans cet ordre, trois termes consécutifs d'une suite géométrique de raison 4.
Déterminer ces trois nombres, sachant que leur somme est 63.

**32** $x$, $y$ et $z$ sont, dans cet ordre, trois termes consécutifs d'une suite géométrique de raison 2.
Déterminer ces trois nombres, sachant que leur produit est $-27$.

**33** On considère la somme :
$D = 1 + 10 + 10^2 + 10^3 + \ldots + 10^9$.
*a)* Les termes de cette somme sont ceux d'une suite géométrique que l'on précisera.
*b)* Calculer D.

# Résolution de problèmes

**34** Les côtés d'un triangle rectangle de périmètre 24 m sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique. Déterminer les côtés de ce triangle.
*(On pourra les noter $a - r$, $a$, $a + r$).*

**35** Les côtés d'un triangle rectangle sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison 5.
Déterminer les côtés de ce triangle.

**36** En 2001, 4 000 contrôles radar ont été effectués sur une autoroute de Côte d'Ivoire. Il a été prévu d'augmenter le nombre de ces contrôles de 200 tous les ans.
1. Calculer le nombre de contrôles qui seront effectués en 2002, puis en 2003.
2. On désigne par $C_n$ le nombre de contrôles effectués au bout de $n$ années.
*a)* Exprimer $C_n$ en fonction de $n$.
*b)* Quel est le nombre total de contrôles pour l'année 2006 ?
*c)* Au bout de combien d'années le nombre de contrôles atteindra-t-il 6 000 ?
3. Quel est le nombre total de contrôles de l'année 2001 à l'année 2010 ?

**37** Une population de bactéries double toutes les heures.
1. Au bout de combien d'heures sera-t-elle multipliée par 100 ?
2. Par combien sera-t-elle multipliée au bout de huit heures ?

**38** On a injecté 1 cm$^3$ de calmant à un malade. Toutes les demi-heures, son organisme élimine 10 % de ce produit.
1. Quel volume de ce produit calmant a-t-il éliminé au bout de 90 minutes ?
2. Sachant que ce produit n'est plus efficace lorsque le volume restant est inférieur à 500 mm$^3$, au bout de combien de temps le produit sera-t-il inefficace ?

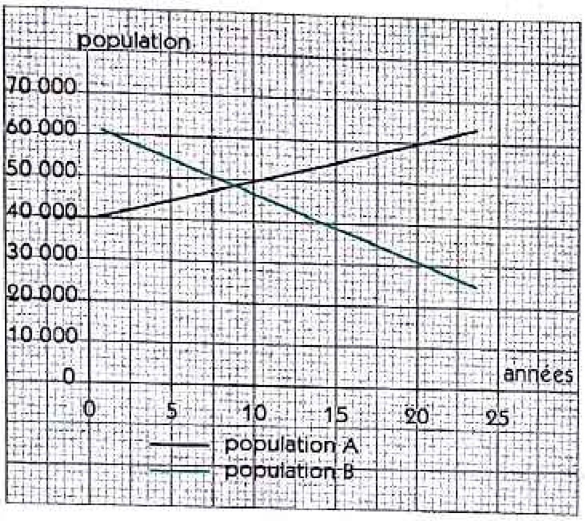
**39** On suppose que la longueur d'un boa augmente de 40 % chaque année, et ceci pendant ses 12 premières années. Sa longueur, à la naissance, est de 10 cm.
Pour tout nombre entier $n$ compris entre 0 et 12, on désigne par $L_n$ sa longueur, en centimètres, au bout de $n$ années.
1. Calculer $L_1$ et $L_2$.
2. Pour tout nombre entier $n$ $(0 \leq n \leq 12)$, exprimer $L_n$ en fonction de $n$.
3. Déterminer la longueur du boa au bout de 12 années.
4. À l'aide d'une calculatrice, déterminer au bout de combien d'années le boa aura dépassé 1 mètre.

**40** On lâche un ballon d'une hauteur de 400 cm au-dessus du sol où il rebondit plusieurs fois.
On suppose que la hauteur de chaque rebond est la moitié de la hauteur du rebond précédent.
On désigne par $u_n$ la hauteur, en cm, du $n^{\text{ième}}$ rebond et on pose : $u_0 = 400$.
1. Calculer $u_1$, $u_2$ et $u_3$.
2. Pour tout nombre entier naturel $n$, exprimer $u_n$ en fonction de $n$.
3. Calculer la hauteur du 6$^e$ rebond.
4. On convient que le ballon est immobile dès que la hauteur du rebond est inférieure à 1 cm.
Déterminer le nombre minimal de rebonds précédant l'immobilisation du ballon.

**41** Un particulier dispose d'un jardin de 1 000 m$^2$ utilisés, moitié en potager, moitié en pelouse.
Constatant que le potager lui prend trop de temps, il décide d'augmenter chaque année la superficie de la pelouse de 10 % par rapport à l'année précédente.
1. Quelle est la superficie de la pelouse au bout d'un an ?
2. Quelle sera la superficie de la pelouse après 4 ans ?
3. Il veut conserver au plus 100 m$^2$ de potager. Au bout de combien d'années parviendra-t-il à ce résultat ?

**42** Dans un pays de 16,5 millions d'habitants, le taux d'accroissement annuel de la population est de 3 %.
Quelle sera la population de ce pays dans 1 an ? dans 2 ans ? dans 10 ans ?

**43** La population d'une ville A augmente régulièrement de 2 % par an, et celle d'une autre ville B diminue de 4 % par an. En 2001, les populations sont respectivement de 40 000 et 60 000 habitants.
1. Calculer les populations des deux villes en 2002, puis en 2003.
2. On désigne respectivement par $p_n$ et $q_n$ les populations des villes A et B au bout de $n$ années.
Exprimer $p_n$ et $q_n$ en fonction de $n$.
3. Utiliser le graphique ci-dessous pour répondre aux questions suivantes, puis vérifier par le calcul.
*a)* En quelle année la population de A aura-t-elle été multipliée par 1,5 ?
*b)* En quelle année la population de B aura-t-elle diminué de moitié ?
*c)* Au bout de combien d'années la population de A sera-t-elle le double de celle de B ?
*d)* Au bout de combien d'années les deux villes auront-elles la même population ?




**44** On place un capital de 500 000 F CFA au taux annuel de 6 %, à intérêts composés.
Calculer la valeur acquise par le capital au bout de 8 ans, au bout de 10 ans.

**45** Quel est le capital qui, placé à intérêts composés au taux annuel de 5 %, devient 4 000 000 F CFA au bout de 7 ans ?

**46** On place un capital de 100 000 F CFA au taux annuel de 6 %, à intérêts simples.
1. Calculer la valeur acquise par le capital au bout de $n$ années.
2. Si le taux annuel double, la valeur acquise par le capital va-t-elle doubler ?

**47** Un propriétaire désire vendre sa maison qui comporte deux étages de 12 marches chacun.
L'acheteur devra payer 10 F CFA pour la 1re marche, 20 F CFA pour la 2e marche, 40 F CFA pour la 3e marche, et ainsi de suite, en doublant chaque fois jusqu'à la dernière marche.
Quel est le prix de vente de cette maison ?

**48** Le loyer mensuel d'une maison est de 100 000 F CFA. Ce loyer augmente chaque année de 5 %.
1. Quel sera le montant du loyer dans 8 ans ?
2. Au bout de combien d'années le loyer aura-t-il doublé ?
3. Calculer le total des loyers payés pendant les 10 premières années.

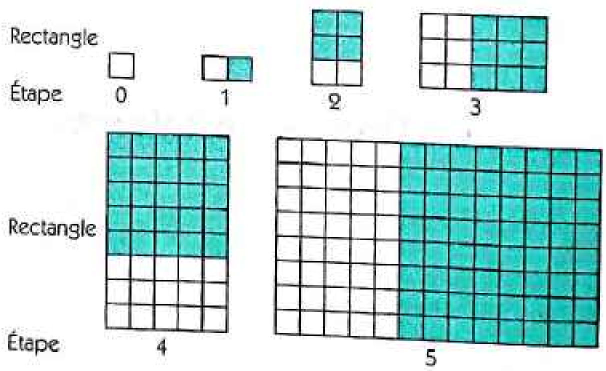
**49** Le prix de vente d'un livre augmente de 8 % chaque fin d'année.
1. Sachant qu'à sa parution son prix de vente $P_1$ était égal à 2 500 F CFA, déterminer le prix de vente $P_2$ la deuxième année.
2. Déterminer le coefficient multiplicateur permettant de calculer directement le prix de vente d'une année à l'autre.
3. Calculer les prix de vente $P_3$, $P_4$ de ce livre la troisième et la quatrième année.
4. Exprimer en fonction $n$ et de $P_1$ le prix de vente $P_n$ du livre la $n^{\text{ième}}$ année. Calculer $P_{10}$.

**50** On suppose que le pourcentage d'augmentation du prix d'un article est constant et égal à 11 % par an. En prenant l'année 2001 comme année de référence, on désigne par $p_0$ le prix de cet article en 2001 et par $p_n$ le prix du même article $n$ années plus tard, c'est-à-dire en l'an $(2001 + n)$.
1. Exprimer $p_n$ en fonction de $p_0$ et de $n$.
2. L'augmentation est-elle de 22 % au bout de deux ans ?
3. L'article considéré coûte 1 000 000 F CFA en 2001.
*a)* Combien coûtera-t-il en 2004 ? en 2006 ?
*b)* Au bout de combien d'années ce prix aura-t-il doublé ?
4. Le nombre d'années pour doubler le prix est-il fonction de ce prix ?

## APPROFONDISSEMENT

**51** $(u_n)$ est une suite arithmétique de premier terme 2 et de raison 3 telle que : $u_0 + u_1 + ... + u_{p-1} = 187$.
1. Vérifier que $p$ est solution de l'équation du second degré : $3p^2 + p - 374 = 0$.
2. Déterminer $p$.

**52** **Des carrés pour obtenir des rectangles**
Observer la construction des rectangles successifs.



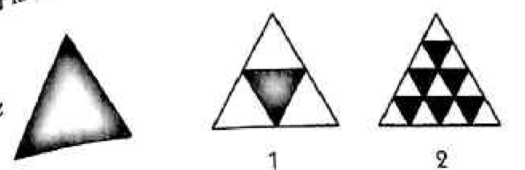

À chaque étape, on ajoute un carré colorié ayant pour côté la longueur du rectangle de l'étape précédente.
1. Recopier et compléter le tableau suivant.

| Étape $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Largeur du rectangle | 1 | 1 | 2 | | | | | | |
| Longueur du rectangle | 1 | 2 | 3 | | | | | | |

… conjecturer la formule de récurrence donnant la suite … largeurs des rectangles.

**53 Des triangles équilatéraux**

… observer la construction des triangles équilatéraux successifs.



Triangle

Étape 0 1 2

1. Recopier et compléter le tableau suivant.

| Étape $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Nombre de triangles $T_n$ | 1 | 4 | | | | | |

2. Conjecturer le nombre de triangles à la $n^{\text{ième}}$ étape.
3. Quelle est la nature de la suite $(T_n)$ ?

**54** On suppose que, dans un procédé de culture, chaque graine semée permet d'en récolter dix. L'année initiale 0, on sème $10^5$ graines ; puis, la récolte effectuée, on consomme 80 % de cette récolte. En l'an 1, on sème les graines restantes.
1. Combien de graines seront-elles semées en l'an 1 ?
2. On procède de la même manière les années suivantes. De combien de graines dispose-t-on au bout de $n$ années ?
3. Sachant que la superficie cultivable ne permet pas de semer plus de $1{,}5 \times 10^6$ graines, au bout de combien de récoltes constate-t-on un excédent de graines pour le semis de l'année suivante ?

**55** Pour préparer le Grand Prix de la Municipalité, un coureur cycliste s'entraîne de la façon suivante : débuter lundi en faisant 80 km par jour et, chaque lundi, augmenter la distance journalière de 25 % par rapport à celle de la semaine précédente.
1. Calculer la distance journalière parcourue la deuxième semaine, puis la troisième semaine.
2. On désigne par $d_n$ la distance journalière parcourue la $n^{\text{ième}}$ semaine et on pose : $d_1 = 80$.
*a)* Exprimer $d_n$ en fonction de $n$.
*b)* Pendant combien de semaines le coureur fera-t-il moins de 300 km par jour ?
*c)* Calculer, à $10^{-2}$ près, la distance totale parcourue la quatrième semaine.

**56** Une personne loue une maison à partir du 1er janvier 2001. Elle a le choix entre deux formules de contrat de bail. Dans les deux cas, le loyer annuel initial est de 3 000 000 F CFA.
1. FORMULE 1 : *une augmentation annuelle de 5 % du loyer de l'année précédente.*
Pour tout entier naturel $n$, on désigne par $u_n$ le loyer payé au cours de la $n^{\text{ième}}$ année.
*a)* Déterminer $u_1$ et $u_2$.
*b)* Exprimer $u_{n+1}$ en fonction de $u_n$.
*c)* Exprimer $u_n$ en fonction de $n$.
2. FORMULE 2 : *une augmentation annuelle forfaitaire de 160 000 F CFA du loyer de l'année précédente.*
Pour tout entier naturel $n$, on désigne par $v_n$ le loyer payé au cours de la $n^{\text{ième}}$ année.
*a)* Déterminer $v_1$ et $v_2$.
*b)* Exprimer $v_{n+1}$ en fonction de $v_n$.
*c)* Exprimer $v_n$ en fonction de $n$.
3. Déterminer le contrat le plus avantageux pour un locataire dans chacun des cas suivants.
*a)* Le locataire s'engage à occuper la maison jusqu'au 31 décembre 2005.
*b)* Le locataire s'engage à occuper la maison jusqu'au 31 décembre 2010.

**57** 1. L'évolution du nombre d'abonnés à une revue mensuelle, les deux premières années, est représentée par une suite arithmétique. Chaque mois, 100 nouveaux lecteurs se sont abonnés.
À son 24e mois de publication, la revue a enregistré 5 300 nouveaux abonnements.
On désigne par $a_n$ le nombre de nouveaux abonnés au $n^{\text{ième}}$ mois de publication.
*a)* Vérifier que : $a_1 = 3\,000$.
*b)* Calculer le nombre de nouveaux abonnés au 12e mois de publication.
En déduire le pourcentage d'augmentation du nombre d'abonnements souscrits au début de la 2e année.
*c)* Douze numéros sont édités par an.
Calculer le nombre total d'exemplaires adressés par voie d'abonnement au cours des deux premières années de publication.
2. En modifiant la politique commerciale de la revue, on obtient 40 % d'abonnements supplémentaires au début de la troisième année.
Calculer le nombre total d'abonnés pendant la troisième année.

**58** L'unité d'intensité du son utilisée dans l'exercice est le décibel, noté dB. Une source sonore émet un son d'intensité 100 dB.
On désigne par $u_n$ l'intensité du son mesurée après la traversée de $n$ plaques d'isolation phonique et on pose $u_0 = 100$. Chaque plaque absorbe 10 % de l'intensité du son qui lui parvient.
1. Calculer $u_1$, $u_2$ et $u_3$.
2. Exprimer $u_n$ en fonction de $n$ et de $u_0$.
3. À l'aide d'une calculatrice, déterminer à partir de quelle valeur de $n$ l'intensité du son devient inférieure à 1dB.

***D'après sujet de Bac.***

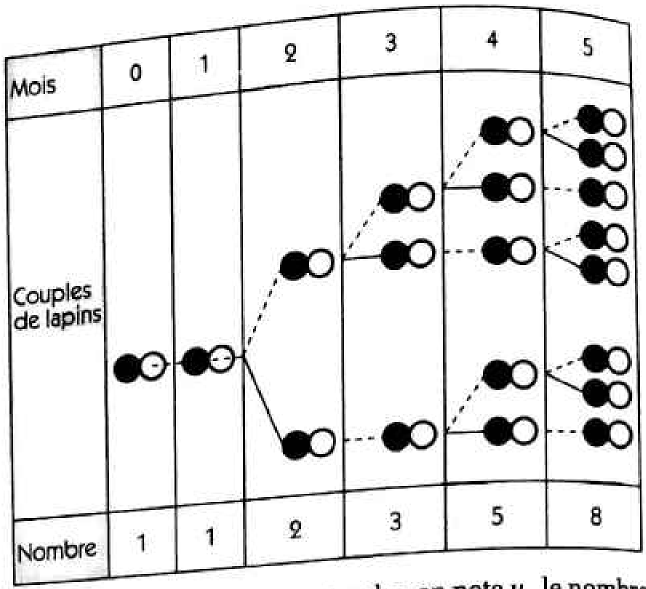
**59** Pour répondre à une nouvelle norme antipollution, un industriel doit ramener progressivement sa quantité de rejets, qui est de 50 000 tonnes par an en 2000, à une valeur inférieure ou égale à 30 000 tonnes, en 10 ans au plus, soit une réduction de 40 %.
Il pense qu'il pourrait réduire chaque année sa quantité de rejets de 4 %, c'est-à-dire de $\frac{1}{10}$ de ce qu'il doit réduire en 10 ans.
Il s'engage à réduire effectivement sa production de rejets de 4 % par an.
1. S'il rejette 48 000 tonnes en 2001, respecte-t-il son engagement ?
2. Soit $n$ un entier positif. On note $r_n$ la quantité de rejets pour l'année 2000 + $n$.
*a)* Calculer $r_1$, $r_2$ et $r_3$.
*b)* Exprimer $r_{n+1}$ en fonction de $r_n$.
Quelle est la nature de la suite $(r_n)$ ?

*c)* Exprimer $r_n$ en fonction de $n$.
**3.** Calculer, à la tonne près, la quantité de rejets prévus pour l'année 2010.
L'industriel a-t-il respecté les conditions fixées ?
**4.** Un taux annuel de 5 % permettrait-il de respecter les conditions fixées ?

**60** Des élections opposent $n$ candidats au premier tour. Chacun d'eux réunit exactement deux fois plus de voix que son suivant immédiat.
Pour tout entier naturel $k$ tel que $k \in [1 ; n]$, on désigne par $v_k$ le nombre de voix obtenues par le candidat placé au $k^{\text{ième}}$ rang.
**1.** Démontrer que $(v_k)$ est une suite géométrique et exprimer $v_k$ en fonction de $k$ et de $v_1$.
**2.** *a)* Calculer, en fonction de $n$ et de $v_1$, le nombre total de voix réunies par les $n$ candidats.
*b)* On suppose que, pour être élu au premier tour, un candidat doit obtenir plus de la moitié des suffrages exprimés. Un second tour est-il nécessaire ?
**3.** Déterminer le nombre de candidats à cette élection, sachant qu'il y a 945 votants et que le candidat élu obtient 480 voix.

**61 Un paradoxe de Zénon**
Zénon d'Élée, philosophe grec (v$^{\text{e}}$ siècle av. J.-C.), imagina le paradoxe suivant mettant en scène Achille et une tortue :
« Achille veut rattraper une tortue qui est 100 m devant lui en courant 10 fois plus vite que n'avance la tortue.
Lorsqu'Achille a parcouru 100 m, la tortue en a parcouru 10 ; lorsqu'Achille a parcouru ces 10 m, la tortue en a parcouru 1, ...
Achille arrivera-t-il à rattraper la tortue ? Si oui, quelle distance aura-t-il alors parcouru ? »

**62 Suites de Fibonacci**
Leonardo Fibonacci, dit Léonard de Pise (1180-1250), en 1202 pose dans son livre « Liber abacci » le problème suivant :
« Combien de couples de lapins peut engendrer un seul couple pendant une année, sachant que la nature des lapins est telle que dès l'âge de deux mois un couple en engendre tous les mois un autre ? »
**1.** On note ●○ tout couple de lapins.
Recopier et compléter l'arbre de choix ci-après jusqu'au huitième mois.
*(On suppose qu'il n'y a aucune mort pendant cette période.)*




**2.** Pour tout nombre entier naturel $n$, on note $u_n$ le nombre de couples de lapins correspondant au $n^{\text{ième}}$ mois.
*a)* Déterminer $u_0$, $u_1$, ..., $u_9$.
*b)* Exprimer $u_2$ en fonction de $u_1$ et de $u_0$, puis $u_3$ en fonction de $u_2$ et de $u_1$.
*c)* Conjecturer une expression de $u_{n+1}$ en fonction de $u_n$ et de $u_{n-1}$.

**63** Une municipalité envisage l'aménagement d'un lac artificiel. Dans le projet, le lac devra contenir 30 000 m$^3$ d'eau le matin de la date de la livraison à l'autorité municipale.
On estime qu'en période de saison sèche, les pertes d'eau dues à l'évaporation sont de 2 % par jour. Cependant, on prévoit un apport d'eau de 500 m$^3$ chaque nuit durant la saison sèche.
L'ouvrage a été livré aux autorités municipales lors d'une saison sèche qui a duré 61 jours.
**1.** On note $v_n$ le volume d'eau, en m$^3$, contenu dans le lac, au matin du $n^{\text{ième}}$ jour après la date de livraison.
*a)* Calculer $v_1$, $v_2$ et $v_3$.
*b)* Justifier l'égalité : $v_{n+1} = v_n \times 0{,}98 + 500$.
**2.** On pose : $u_n = v_n - 25\,000$.
*a)* Démontrer que $(u_n)$ est une suite géométrique.
*b)* Exprimer $u_n$, puis $v_n$ en fonction de $n$.
*c)* Après combien de jours le volume d'eau sera-t-il inférieur à 27 000 cm$^3$ ?
*d)* Déterminer le volume d'eau restant dans le lac le matin du dernier jour de la saison sèche.