COLLEGE
3ème
MATHEMATIQUES

CÔTE D'IVOIRE – ÉCOLE NUMÉRIQUE

Code :

THEME: CALCULS ALGEBRIQUES

LEÇON 3 : RACINES CARREES Durée : 6 heures

A- SITUATION D'APPRENTISSAGE

La ferme d'un agriculteur dans le village de Foula est de forme carrée et d'aire égale à 500 m^2. Il veut savoir la longueur de grillage nécessaire pour clôturer sa ferme. Le grillage devra couvrir le portail. Il se confie au téléphone à son neveu qui est en classe de troisième au Collège Moderne de BOUNDIALI. Ce dernier collabore avec ses camarades de classe pour calculer la longueur du côté de la ferme et son périmètre.

B- CONTENU DE LA LEÇON

I- RACINES CARREES

1. Définition

a désigne un nombre positif.

La racine carrée de ***a*** est le nombre positif, noté $\sqrt{a}$, dont le carré est égal à a.

Le symbole '' $\sqrt{}$ '' est appelé radical.

Exemples

$5^2 = 25$, d'où $\sqrt{25} = 5$.

$\sqrt{25}$ se lit racine carrée de 25 ou radical de 25.

Conséquences

Lorsque a et b sont deux nombres positifs, on a :

$\sqrt{a} \geq 0$ et $(\sqrt{a})^2 = a$

$\sqrt{a} = b$ équivaut à $a = b^2$

Exemple

$\sqrt{3} \geq 0$; $\sqrt{0} = 0$; $\sqrt{1} = 1$; $(\sqrt{7})^2 = 7$.

$\sqrt{36} = 6$ équivaut à $36 = 6^2$.

2. Ensemble des nombres réels

Définitions

- Les nombres qui ne sont pas rationnels sont appelés nombres irrationnels.
- L'ensemble formé de tous les nombres rationnels et irrationnels est appelé ensemble des nombres réels, noté $\mathbb{R}$.

Exemples

$\frac{2}{7}$; -5 ; 12 ; $\sqrt{2}$; $-\sqrt{11}$; $2 + \sqrt{5}$; π sont des nombres réels.

3. Valeur absolue d'un nombre réel

Définition

a désigne un nombre réel. On appelle valeur absolue de a, la distance à zéro du nombre a.

On la note : $| a |$

Exemples

| 21| = 21 ; |-5| = 5 ; | $-\sqrt{7}$| = $\sqrt{7}$; | 0 | = 0.

Conséquences

- Pour tout nombre réel a positif, | a | = a .
- Pour tout nombre réel a négatif, | a | = $-a$.

Propriété

La racine carrée du carré d'un nombre est égale à la valeur absolue de ce nombre.

Pour tout nombre réel a, $\sqrt{a^2} = |a|$.

Exercice de fixation

Donne une écriture sans radical de chacun des nombres ci-dessous :

a) $\sqrt{(-2{,}3)^2}$ b) $\sqrt{(6{,}1)^2}$ c) $\sqrt{(-\pi)^2}$

Corrigé

a) $\sqrt{(-2{,}3)^2} = |-2{,}3| = 2{,}3$ b) $\sqrt{(6{,}1)^2} = |6{,}1| = 6{,}1$ c) $\sqrt{(-\pi)^2} = |-\pi| = \pi$

II- OPERATIONS ET RACINES CARREES

1. Produit et racines carrées

Propriété

a et b désignent des nombres positifs. On a : $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$.

Exercice de fixation

Ecris chaque nombre ci-dessous sans le symbole √.

a) $\sqrt{49 \times 100}$ b) $\sqrt{25 \times 16}$ c) $\sqrt{8} \times \sqrt{2}$ d) $\sqrt{12} \times \sqrt{3}$

Corrigé

a) $\sqrt{49 \times 100} = \sqrt{49} \times \sqrt{100} = 7 \times 10 = 70$.
b) $\sqrt{25 \times 16} = \sqrt{25} \times \sqrt{16} = 5 \times 4 = 20$.
c) $\sqrt{8} \times \sqrt{2} = \sqrt{8 \times 2} = \sqrt{16} = 4$.
d) $\sqrt{12} \times \sqrt{3} = \sqrt{12 \times 3} = \sqrt{36} = 6$.

2. Quotient et racines carrées

Propriété

a et b désignent des nombres positifs et b non nul. On a : $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Exercice de fixation

Ecris chaque nombre ci-dessous sans le symbole √.

a) $\sqrt{\frac{25}{9}}$ b) $\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}}$

Corrigé

a) $\sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{9}} = \frac{5}{3}$ b) $\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{75}{3}} = \sqrt{25} = 5$

Remarques

En général, pour des réels positifs a et b, $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

De plus si $a > b, \sqrt{a-b} \neq \sqrt{a} - \sqrt{b}$.

3. Puissances et racines carrées

Propriété

a désigne un nombre réel strictement positif et n un nombre entier relatif.

On a : $\sqrt{a^{2n}} = a^n$ et $\sqrt{a^{2n+1}} = a^n\sqrt{a}$.

Exercice de fixation

Complète les pointillés par les nombres qui conviennent.

$\sqrt{3^8} = \sqrt{3^{2\times\ldots}} = 3^{\cdots}$; $\sqrt{7^{11}} = \sqrt{7^{2\times\ldots+1}} = 7^{\cdots}\sqrt{7}$.

Corrigé

$\sqrt{3^8} = \sqrt{3^{2\times 4}} = 3^4$; $\sqrt{7^{11}} = \sqrt{7^{2\times 5+1}} = 7^5\sqrt{7}$.

4. Méthodes d'écriture d'un quotient sans radical au dénominateur

- Pour écrire un quotient de la forme $\frac{a}{\sqrt{b}}$ sans radical au dénominateur, on multiplie le numérateur et le dénominateur par $\sqrt{b}$.

Exemple

Ecrivons $\frac{4}{\sqrt{15}}$ sans radical au dénominateur.

$\frac{4}{\sqrt{15}} = \frac{4\times\sqrt{15}}{\sqrt{15}\times\sqrt{15}} = \frac{4\sqrt{15}}{15}$.

- Pour écrire un quotient de la forme $\frac{a}{b+c\sqrt{d}}$ sans radical au dénominateur, on multiplie le numérateur et le dénominateur par $b - c\sqrt{d}$. On dit que $b - c\sqrt{d}$ est **l'expression conjuguée** de $b + c\sqrt{d}$.

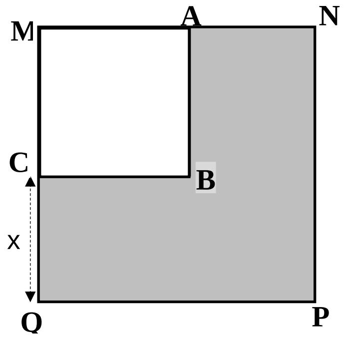
Exemple

Ecrivons $\frac{3}{3+\sqrt{5}}$ sans radical au dénominateur.

$\frac{3}{3+\sqrt{5}} = \frac{3\times(3-\sqrt{5})}{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})} = \frac{9-3\sqrt{5}}{9-5} = \frac{9-3\sqrt{5}}{4}$.

C- SITUATION D'EVALUATION

L'unité de longueur est le mètre.



Monsieur **TIENE** a un champ de forme carrée, de côté $30\sqrt{5}$ m, représenté par MNPQ comme l'indique la figure ci-contre.
Il a fait nettoyer une partie de forme carrée représentée par ABCM.
Il dispose de 32000 F CFA pour le nettoyage du reste du champ ***(partie coloriée sur la figure).***
Un manœuvre lui propose de nettoyer toute la partie restante à 10 F CFA le mètre carré.
Monsieur **TIENE** se demande si la somme dont il dispose sera suffisante pour le nettoyage du reste de son champ.

1) Justifie que MC = $(30\sqrt{5} - x)$
2) Démontre que l'aire en m^2 de la partie restante à nettoyer est : $A_r = \left(60\sqrt{5}x - x^2\right)$ m^2.
3) Sachant que $x = 30$ m et $2{,}23 < \sqrt{5} < 2{,}24$.
   Justifie qu'un encadrement de l'aire de la partie restante est :
   $3114^2 < A_r < 3132$ m^2.
4) En argumentant, réponds à la préoccupation de monsieur TIENE.

Corrigé

1) MC= MQ – MC = $(30\sqrt{5} - x)$m
2) Soit A l'aire de la partie nettoyée. A = $MC^2 = (30\sqrt{5} - x)^2 m^2 = [(30\sqrt{5})^2 - 60\sqrt{5}\,x + x^2]m^2$
   $A = \left(4500 - 60\sqrt{5}x + x^2\right)m^2$.
   On a : A_r = aire(MNPQ) – A
   $= MN^2 - \left(4500 - 60\sqrt{5}x + x^2\right)$
   $= (30\sqrt{5})^2 - \left(4500 - 60\sqrt{5}x + x^2\right)$.

$= 4500 - \left(4500 - 60\sqrt{5}x + x^2\right)$

$A_r = \left(60\sqrt{5}x - x^2\right) m^2$

3) $x = 30m$, donc $A_r = 1800\sqrt{5} - 900 \ m^2$.

On a $2,23 < \sqrt{5} < 2,24$

$1800 \times 2,23 < 1800\sqrt{5} < 1800 \times 2,24$

$4014 - 900 < 1800\sqrt{5} - 900 < 4032 - 900$

$3114 < 1800\sqrt{5} - 900 < 3132$

D'où : $3114 \ m^2 < A_r < 3132 \ m^2$.

4) Un encadrement du montant qu'il faut pour nettoyer la partie restante est.

31140F < Montant < 31320F

M.TIENE dispose de 32000F qui est supérieur à 31320F. Donc il pourra nettoyer toute la partie restante.

D- EXERCICES

D-1. Exercices de fixation

Exercice 1

Ecris les nombres réels ci-dessous sous la forme $a\sqrt{b}$, où a et b sont des entiers naturels avec b le plus petit possible.

1) $\sqrt{125}$
2) $\sqrt{80}$
3) $\sqrt{164}$
4) $\sqrt{75} + \sqrt{48}$
5) $3\sqrt{8} - 5\sqrt{18}$
6) $3\sqrt{27} \times 2\sqrt{15}$

Corrigé

1) $\sqrt{125} = \sqrt{25 \times 5} = 5\sqrt{5}$
2) $\sqrt{80} = \sqrt{16 \times 5} = 4\sqrt{5}$
3) $\sqrt{164} = \sqrt{4 \times 41} = 2\sqrt{41}$
4) $\sqrt{75} + \sqrt{48} = 5\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$
5) $3\sqrt{8} - 5\sqrt{18} = 6\sqrt{2} - 15\sqrt{2} = -9\sqrt{2}$.
6) $3\sqrt{27} \times 2\sqrt{15} = 9\sqrt{3} \times 2\sqrt{3} \times \sqrt{5} = 9 \times 3 \times 2\sqrt{5} = 54\sqrt{5}$.

Exercice 2

Ecris plus simplement :

a. $\sqrt{4 \times 64}$
b. $\sqrt{9 \times 16}$
c. $\sqrt{2} \times \sqrt{32}$
d. $\sqrt{3} \times \sqrt{27}$
e. $2\sqrt{7} \times 5\sqrt{28}$

Corrigé

a. $\sqrt{4 \times 64} = \sqrt{4} \times \sqrt{64} = 2 \times 8 = 16$
b. $\sqrt{9 \times 16} = \sqrt{9} \times \sqrt{16} = 3 \times 4 = 12$.
c. $\sqrt{2} \times \sqrt{32} = \sqrt{64} = 8$
d. $\sqrt{3} \times \sqrt{27} = \sqrt{81} = 9$.

e. $2\sqrt{7} \times 5\sqrt{28} = 10\sqrt{196} = 10 \times 14 = 140.$

Exercice 3

Ecris plus simplement :

a. $\sqrt{\frac{16}{25}}$

b. $\sqrt{\frac{49}{81}}$

c. $\sqrt{5} \times \sqrt{\frac{5}{49}}$

d. $\sqrt{\frac{3}{4}} \times \sqrt{\frac{100}{147}}$

e. $\sqrt{\frac{49\times16}{25}}$

Corrigé

a. $\sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}} = \frac{4}{5}$

b. $\sqrt{\frac{49}{81}} = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{81}} = \frac{7}{9}$

c. $\sqrt{5} \times \sqrt{\frac{5}{49}} = \frac{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}{\sqrt{49}} = \frac{\sqrt{25}}{7} = \frac{5}{7}$

d. $\sqrt{\frac{3}{4}} \times \sqrt{\frac{100}{147}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} \times \frac{\sqrt{100}}{\sqrt{147}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{10}{7\sqrt{3}} = \frac{5}{7}.$

e. $\sqrt{\frac{49\times16}{25}} = \frac{\sqrt{49}\times\sqrt{16}}{\sqrt{25}} = \frac{7\times4}{5} = \frac{28}{5}$

D-2. Exercices de renforcement

Exercice 4

Développe, puis écris simplement :

$a = \sqrt{3}(4 + 2\sqrt{3})$

$b = (2\sqrt{7} - 4)^2$

$c = (3\sqrt{2} -\sqrt{3}) (3\sqrt{2} + \sqrt{3})$

Corrigé

$a = \sqrt{3}(4 + 2\sqrt{3}) = 4\sqrt{3} + 2\sqrt{9} = 4\sqrt{3} + 6.$

$b = (2\sqrt{7} - 4)^2 = (2\sqrt{7})^2 - 2 \times 2\sqrt{7} \times 4 + 4^2 = 28 - 16\sqrt{7} + 16 = 44 - 16\sqrt{7}.$

$c = (3\sqrt{2} -\sqrt{3}) (3\sqrt{2} + \sqrt{3}) = (3\sqrt{2})^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2 = 18 - 3 = 15.$

Exercice 5

Factorise les expressions littérales ci-dessous :

a) $x^2 - 25$

b) $x^2 - 11$

c) $x^2 - \frac{4}{9}$

d) $4x^2 - 4\sqrt{3}x + 3$

e) $4x^2 + 4\sqrt{5}x + 5$

f) $(x + 2)^2 - 4$

g) $(x - 2)^2 - 5$

Corrigé

a) $x^2 - 25 = x^2 - 5^2 = (x-5)(x+5)$.

b) $x^2 - 11 = x^2 - \sqrt{11}^2 = (x - \sqrt{11})(x + \sqrt{11})$.

c) $x^2 - \frac{4}{9} = x^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = (x - \frac{2}{3})(x + \frac{2}{3})$.

d) $4x^2 - 4\sqrt{3}x + 3 = (2x)^2 - 2 \times 2x \times \sqrt{3} + \left(\sqrt{3}\right)^2 = (2x - \sqrt{3})^2$

e) $4x^2 + 4\sqrt{5}x + 5 = (2x)^2 + 2 \times 2x \times \sqrt{5} + \left(\sqrt{5}\right)^2 = (2x + \sqrt{5})^2$.

f) $(x+2)^2 - 4 = (x+2)^2 - 2^2 = (x+2-2)(x+2+2) = x(x+4)$.

g) $(x-2)^2 - 5 = (x-2)^2 - \left(\sqrt{5}\right)^2 = (x - 2 - \sqrt{5})(x - 2 + \sqrt{5})$.

D.3- <u>Exercices d'approfondissement</u>

<u>Exercice 6</u>

L'unité de longueur est le cm.

ABC est un triangle tel que : AB =3+2$\sqrt{3}$; AC = 3$\sqrt{3}$ - 2 et BC = 2$\sqrt{13}$.

Démontre que le triangle ABC est rectangle.

<u>Corrigé</u>

On a : $AB^2 = (3 + 2\sqrt{3})^2 = 3^2 + 2x3x2\sqrt{3} + (2\sqrt{3})^2 = 9 + 12\sqrt{3} + 2^2x3 = 21 + 12\sqrt{3}$;

$AC^2 = (3\sqrt{3} - 2)^2 = (3\sqrt{3})^2 - 2x3\sqrt{3}x2 + 2^2 = 3^2x3 - 12\sqrt{3} + 4 = 31 - 12\sqrt{3}$;

$BC^2 = (2\sqrt{13})^2 = 2^2x13 = 52$

$AB^2 + AC^2 = 21 + 12\sqrt{3} + 31 - 12\sqrt{3} = 52$

On a : $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

D'après la réciproque de la propriété de Pythagore le triangle ABC est rectangle en A.

<u>Exercice 7</u>

Ecris les nombres réels ci-dessous sans le symbole √ au dénominateur :

$\frac{2}{3-\sqrt{5}}$ *et* $\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2}$

<u>Corrigé</u>

$$\frac{2}{3-\sqrt{5}} = \frac{2(3+\sqrt{5})}{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})} = \frac{6+2\sqrt{5}}{3^2-(\sqrt{5})^2} = \frac{6+2\sqrt{5}}{9-5} = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} .$$

$$\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2} = \frac{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}-2)}{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)} = \frac{(\sqrt{5})^2 - 2x\sqrt{5}x2 + 2^2}{(\sqrt{5})^2 - 2^2} = \frac{5-4\sqrt{5}+4}{5-4} = \frac{9-4\sqrt{5}}{1} = 9 - 4\sqrt{5} .$$

<u>Exercice 8</u>

L'unité de longueur est le centimètre.

Un rectangle a pour longueur $2\sqrt{3} + 2$ et pour largeur $2\sqrt{3} - 2$.

a) Calcule le périmètre de ce rectangle.

b) Calcule son aire.

<u>Corrigé</u>

a) Le périmètre P de ce rectangle est :

$P = 2\left(2\sqrt{3} + 2 + 2\sqrt{3} - 2\right) = 8\sqrt{3}$.

Donc le périmètre est $8\sqrt{3}$ cm .

b) Calculons l'aire A de ce rectangle

$A = \left(2\sqrt{3} + 2\right)\left(2\sqrt{3} - 2\right) = (2\sqrt{3})^2 - 2^2 = 12 - 4 = 8$.

Donc l'aire de ce rectangles est 8 cm^2.