TEL 697972248/676821509

Ministère des Enseignements Secondaires

Année scolaire 2021/ 2022

LE GRAND CREREX

ECOLE DE MATHS FACILES

Classe Tle C

PAR FOTSO JULES

TRAVAUX DIRIGES DE MATHEMATIQUE CONGES DE NOEL

EXERCICE 1

I) Soit a, b et c trois relatifs non nuls.

1) En utilisant le théorème de BEZOUT, démontrer que si a divise bc et PGCD(a ; b)=1 alors a divise c.

2) Démontrer que si b divise a et c divise a et PGCD(b ; c)=1 alors bc divise a.

II) 1) On considère l'équation $(1)\colon 11x+8y=79$.

a) Montrer que si $(x;y)$ est solution de (1) alors $y\equiv 3[11]$.

b) Résoudre alors dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (1) .

2) Le prix total de 41 pièces détachées en trois lots est de 4800Fcfa.Le prix d'une pièce du premier lot est de 480Fcfa, le prix d'une pièce du deuxième lot est de 360Fcfa, et le prix d'une pièce du troisième lot est de 40Fcfa.

Déterminer le nombre de pièce de chaque lot. On pourra utiliser la question 1)

EXERCICE 2.

I) Démontrer que pour tout x et y strictement positifs.

$$\left[x+(x^3y)^{\frac{1}{4}}\right]^{\frac{1}{3}}+\left[y+(y^3x)^{\frac{1}{4}}\right]^{\frac{1}{3}}=\left(x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{4}{3}}.$$

II)1. Démontrer que pour tout $\epsilon\, IR$ $8x^4+6x^2+2=(2x^2+x+1)(4x^2-2x+2)$.

2a. En déduire que dans le système de numération de base x , $x\geq 9,\overline{80602}^x$ est divisible par $\overline{211}^x$.

b. Ecrire le quotient de la division euclidienne de $\overline{80602}^x$ par $\overline{211}^x$ en base x.

III) Soit a,b et d trois entiers relatifs non nuls.

Démontrer que d est un diviseur commun de a et b si et seulement si d est diviseur commun de $13a+8b$ et $5a+3b$.

IV) 1.a Soit n un entier naturel, déterminer suivant les valeurs de n le reste de la division euclidienne de 3^n par 7.

b. En déduire le reste de la division euclidienne de 506390^{128} par 7.

2. Dans le système décimal de numération, quel(s) doit (doivent) être le(les) chiffres des unités du nombre $\overline{651x}$ pour que le nombre $506390^{128}+\overline{651x}$ soit divisible par 7.

EXERCICE 3.

1-Etudier les variations de chacune des fonctions u,v et w ci-dessous et en déduire que chacune d'elle est positive ou nulle sur $[0\,;+\infty[$.

$$\boldsymbol{U(x)=x-\sin x\,,V(x)=-1+\frac{x^2}{2}+\cos x\quad,W(x)=-x+\frac{x^3}{6}+\sin x.}$$

2-On considère les deux suites de nombres réels (U_n) et (V_n) pour tout n appartenant a IN par : $U_n=\sin\frac{1}{n^2}+\sin\frac{2}{n^2}+\cdots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.+\sin\frac{n}{n^2}$.et $V_n=\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\frac{n}{n^2}$.

a- Montrer que la suite (V_n) converge vers $\frac{1}{2}$.

b- Justifier que pour tout entier naturel $n \geq 1, 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. + n^3 \leq n^4$.

c-Déduire de u l'inégalité $\forall\, n \,\epsilon IN^*\ V_n - \frac{1}{6n^2} \leq U_n \leq V_n$.

d-Démontrer que (U_n) est convergente et préciser sa limite.

EXERCICE 4.

On considère la suite (U_n) définie sur IN par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ \forall\, n \,\epsilon IN\ U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n + n - 2 \end{cases}$.

1a) Calculer $U_1; U_2\ et\ U_3$.

b) Démontrer par récurrence que $\forall\, n \,\epsilon IN, n \geq 4\ ;\ U_n \geq 0$.

c) Démontrer par récurrence que $\forall\, n \,\epsilon IN, n \geq 5\ ;\ U_n \geq n - 3$.

d) La suite est-elle convergente ?

2) On considère la suite (V_n) défie par $\forall\, n \,\epsilon IN, V_n = -2U_n + 3n - \frac{21}{2}$.

a- Démontrer que la suite (V_n) est géométrique.

b- En déduire que $\forall\, n \,\epsilon IN, U_n = \frac{25}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4}$.

C- Calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n} U_k$ en fonction de n.

EXERCICE 5

Soit $p(z) = z^n - 1$.

1. Résoudre dans C $P(z) = 0$.
2. On pose $P(z) = (z-1)Q(z)$.

a- Déterminer $Q(z)$.

b- Montrer que $Q(z) = \prod_{k=1}^{n-1}(z - z_k)$.

c- Calculer $Q(1)$.

d- En déduire que $n = \prod_{k=1}^{n-1}\left(1 - e^{\frac{i2k\pi}{n}}\right)$.

3. On suppose que $n = \prod_{k=1}^{n-1}\left(1 - e^{\frac{-i2k\pi}{n}}\right)$.

a- Montrer que $n^2 = 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\left(1 - cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\right)$.

b- En déduire que $\sin\frac{\pi}{n}.\sin\frac{2\pi}{n}.\sin\frac{3\pi}{n}\ldots\ldots\ldots\ldots\sin\left[\frac{(n-1)\pi}{n}\right] = \frac{n}{2^{n-1}}$.

EXERCICE 6.

1- Soit $z_1\,, z_2\ et\ z_2$ les sommets d'un triangle équilatéral.

Démontrer que ${z_1}^2 + {z_2}^2 + {z_3}^2 = z_1z_2 + z_2z_3 + z_1z_3$.

2- Déterminer le module et un argument du nombre complexe.

$Z = \frac{|-1+\cos\theta| - isin\,\theta}{1 - icos\,\theta + |\cos\theta|}\ ;\ \theta\ \epsilon\left[\frac{\pi}{2}\ ;\ \pi\right]$.

3- Déterminer le lieu géométrique des points $M(z)$ tel que :

a) $\frac{z-1}{z^2}\ \epsilon\ IR\quad b)\ |\overline{z} - 2 + i| = 4\quad c)\ \arg(z^2 - 4) \equiv \arg(z+2)\ [2\pi]\quad d)\ \left|\frac{z-4-2i}{z+2+i}\right| = \frac{1}{3}$

$d)\ \frac{3}{z+3}\ est\ un\ imaginaire\ pur$.

EXERCICE 7.

A) 1-Soit a et b ϵ IN et $P = PGCD(\,a + b\,; ab)\,; p\ premier$.

a) Démontrer que p divise a² et en déduire que p divise a.

b) En déduire que $PGCD(\,a;\ b\,) = p$.

2-Résoudre dans IN² le système $\begin{cases} PGCD(\,a+b\,;ab) = 5 \\ PPCM(a\,;b) = 170. \\ a \leq b. \end{cases}$

B) On considère l'application f du plan dans lui-même qui a tout points $M(x;y)$ associe le point $M'(x';y')$ tel que $\begin{cases} x' = \frac{1}{4}x + \frac{\sqrt{3}}{4}y - \frac{\sqrt{3}}{4} \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{4}x + \frac{3}{4}y + \frac{1}{4} \end{cases}$.

1-Déterminer fof.

2-a Montrer que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est colinéaire a un vecteur $\vec{u}$ dont on donnera les coordonnées dans la base $(\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$.

b-Déterminer l'ensemble des points invariants par f.

c- En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f.

EXERCICE 8.

1) On considère dans $\mathbb{C}$ les équations $(E):\ \overline{Z} = jZ^2\ \ et\ \ \left(\frac{\overline{z}-1}{\overline{z}+1}\right) = j\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2$ avec $j = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

a) Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $\overline{z} = jz^2$; déterminer $|z|$.

b) Montrer que $\overline{z} = jz^2 \Leftrightarrow\ z^3 = \overline{j}$.

c) Résoudre alors l'équation (E) dans $\mathbb{C}$.

d) On note z_0 ; $z_1\ \ et\ z_2$ les solutions de (E). Calculer leurs sommes et leurs produits.

2) On suppose que $\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = e^{i\theta}$, $\theta \in$ IR . Ecrire z sous la forme algébrique

3) Déduire de ce qui précède , les solutions de l'équation (E') .

EXERCICE 9

A 1. Soit n et m deux entiers naturels non nuls. Et Z un nombre complexe vérifiant $Z^n = 1\ \ et\ Z^m = 1$. Montrer que $Z^d = 1\ ou\ d = PGCD(n\,m)$.

2. Soit P un entier naturel tel que : $\begin{cases} 17085 \equiv 12[P] \\ 5399 \equiv 2[P] \end{cases}$. $Déterminer\ P.$

B. On considère l'équation (E) : $x^2 - 5y^2 = 1\ ou$ les inconnues x et y sont des entiers strictement positifs.

1. Dans cette question, on suppose que $(x_0;\ y_0)$ est une solution de (E).

a) Démontrer que $x_0\ et\ y_0$ sont premiers entre-eux.

b) Prouver que $x_0\ et\ y_0$ n'ont pas la même parité.

C) Démontrer qu'il existe un entier k tel que $x_0 = 5k+1\ \ ou\ x_0 = 5k-1$.

2. Calculer $1 + 5y^2\ pour\ 1 \leq y \leq 4$.En déduire un couple$(x_0;\ y_0)$ solution de (E).

3.a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul n il existe deux entiers naturels $a_n\ et\ b_n$ tels que $(9+4\sqrt{5})^n = a_n + b_n\sqrt{5}$.

b) Donner $a_1\ et\ b_1$.Exprimer $a_{n+1}\ et\ b_{n+1}$ en fonction de $a_n\ et\ b_n$.

c) A l'aide d'une récurrence sur n ;$n \geq 1$, Montrer que les couples$(a_n;\ b_n)$ sont solutions de (E).(Il s'en suit donc que les solutions $a_n\ et\ b_n$ sont premiers entre-eux)

d) En calculant $\frac{1}{9+4\sqrt{5}}\ \ et\ \ \frac{1}{a_n+b_n\sqrt{5}}$; $montrer\ que\ (9-4\sqrt{5})^n = a_n - b_n\sqrt{5}$. En déduire l'expression de $a_n\ et\ b_n$ en fonction de n.

EXERCICE 10

I) On considère la fonction définie par $f(x) = x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 1$.

1-Dresser le tableau de variation de f.

2-Déterminer les images par f de chacun des intervalles suivants : $\left]-\frac{1}{2};2\right[\ \ et\ [-1;0]$.

3- Démontrer que l'équation $f(x) = -2$ admet une solution sur IR.

4-a) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions a et b de signes contraires.

b) En déduire le signe de f sur IR.

II) $(o, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé direct de l'espace (ε). On considère les points $A(1; 2; 1)$; $B(2; 1; 1)$; $C(0; 1; -1) et\ D(2; 4; 1)$.

1-Vérifier que les points A ;B ;C et D ne sont pas coplanaires.

2-Calculer la distance :

a) Du point C a la droite (AB) .

b) Du point D au plan (ABC).

3-Calculer l'aire du triangle ABC et le volume du tétraèdre ABCD.

EXERCICE 11.

I-soient a et b deux entiers naturels dont la somme et le produit ont pour PGCD le carré d'un nombre premier p.

1.a Montrer que $p^2\ divise\ a^2$

b. En déduire que p divise a.

2. Montrer que p divise b.

3. Démontrer que le PGCD de a et b est soit p soit p^2 .

EXERCICE 12

I) Soit n un entier naturel non nul. On considère les nombres $a = n^2 - 2n + 3\ et\ b = n + 1$

1- Démontrer que $PGCD(a; b) = PGCD(b; 6)$.

2- Déterminer suivants les valeurs de n le $PGCD(a; b)$.

II) Soit n un entier naturel non nul. On considère les nombres $x = 2n + 3\ \ et\ \ y = 5n - 2$.

1-a) Montrer que tout diviseurs de $x\ et\ y$ est un diviseur de 19.

b) En déduire les valeurs possibles de $PGCD(x; y)$.

2 En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer les entiers naturels n pour les quelles $PGCD(x; y) = 19$.

EXERCICE 13

I) Soit n un entier naturel non nul.

1. Monter que tout diviseur commun a $5n - 3\ \ et\ \ n + 1\ divise\ 8$.
2. En déduire que $5n - 3\ \ et\ \ n + 1$ sont premiers entre eux si n est pair.
3. Déterminer l'entier naturel n tel que $pgcd(\,5n - 3\,; n + 1) = 8$.

II) Soit n un entier relatif.

a) Vérifier que $2n^3 + n^2 + 2n - 5 = (n^2 + 1)(2n + 1) - 6$.

b) En déduire l'ensemble des valeurs de n pour lesquelles $\frac{2n^3+n^2+2n-5}{2n+1}$ est un entier relatif.

III) Soit $b \in IN$ tel que $b \geq 3$.

Ecrire en base b le nombre $X = 3b^3 - b^2 + b - 2$.

EXERCICE 14

On considère la fonction f:$[0;\frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ qui à x $\mapsto \frac{1}{\cos x}$.

1) Démontrer que f réalise une bijection de $[0;\frac{\pi}{2}[$ vers un intervalle à préciser.

2) Résoudre dans $[0;\frac{\pi}{2}[$ l'équation $f(x) = \sqrt{2}$.

3) Déterminer l'ensemble de dérivabilité de la fonction f^{-1} et calculer $(f^{-1})'(x)$

4) Donner une équation de la tangente au point d'abscisse $\sqrt{2}$

5) Montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{x}$ admet une unique solution $\alpha \in \left]0;\ \frac{\pi}{4}\right[$.

6) Donner une valeur approchée de α à 10^{-2}près.

7)Montrer que pour tout $x \in \left]0;\ \frac{\pi}{4}\right[$; $\left|\frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\alpha}\right| \leq \sqrt{2}|x-\alpha|$.

LE TRAVAIL ET UNIQUEMENT LE TRAVAIL

EXERCICE 15

1-Comment faut-il choisir l'entier relatif n pour que $(\sqrt{3}+i)^n$soit réel? Soit imaginaire pur?

2-soit n un entier naturel. On pose: $\boldsymbol{A = \sum_{k=0}^{n-1} \cos kx}$ et $\boldsymbol{B = \sum_{k=0}^{n-1} \sin kx}$

a) Calculer et écrire sous forme exponentielle A + iB.

b) En déduire les expressions plus simples de A et B.

EXERCICE 16

On considère l'espace E rapporté à un repère orthonormé direct $(o;\ \vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,;\vec{k})$Soient les points A (3;−2;2); B (6;1;5); C(6;−2;−1) et D(0;4;−1)

1. Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. a) Montrer que le triangle ABC est rectangle en A

b) Ecrire une équation cartésienne du plan (P1) orthogonal à la droite (AC), passant par A.

c) Vérifier que le plan (P2) d'équation $\boldsymbol{x+y+z-3=0}$ est orthogonal à la droite (AB) et passe par A.

4. Ecrire une équation cartésienne de la sphère (S) de centre B et de rayon $r = 5\sqrt{3}$.

5. a) Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$ et. $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}$ .En déduire que la droite (AD) est orthogonale au plan (ABC)

b) Calculer le volume v du tétraèdre ABCD

EXERCICE 17

LE TRAVAIL ET UNIQUEMENT LE TRAVAIL

Dans l'espace orienté, muni d'un repère orthonormé direct$(o;\ \vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,;\vec{k})$,

On donne: A(10;5;−10); B(−1;−15;17) ; C(2;20;21) et D(−10;5;5).

1. Justifier que ABC définit un plan, et donner l'équation de (ABC).

2. Calculer les coordonnées du point G isobarycentre des points A , B ,C et montrer que G est le projété orthogonal de D sur (ABC).

3.a) Déterminer l'ensemble (E) des points M de l'espace tel que: $(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}).\overrightarrow{MB}$=0. Donner une équation cartésienne de (E).

b) Déterminer l'ensemble(F) des points M de l'espace tels que: $(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC})\wedge\overrightarrow{MD}=\vec{0}$ Donner une représentation paramétrique de (F) .

4.a) Détermine le milieu L du segment [GB] et calculer la distance de L à (F).En déduire la position relative de (E) et (F).

5. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $\|\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MB}\|$ =12

EXERCICE 18

Partie A:

Soit u l'application de $[\pi/2;\ 3\pi/4]$ vers $[1/2\ ;1]$ définie par: $u(x) = sin^2(x)$.

On admet que u est bijective, on note u^{-1}sa bijection réciproque.

Déterminer l'ensemble D sur lequel u^{-1}est dérivable et déterminer pour tout x de D,$(u^{-1})'(x)$.

Partie B:

Soit v la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par: $v(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$.

1) Démontrer que, pour tour x de $\mathbb{R}$, $v(x) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

2) En déduire que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par: $\tan\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (On pourra remarquer que la fonction $x \longmapsto \tan(x)$ est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Partie C:

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$-{−1;1} par: $f(x) = \frac{x^3+x^2+1}{x^2-1}$ et (Cf)sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère ortho normal$(o;\ \vec{\imath}\ ;\vec{\jmath}\ )$ (unité graphique: 2cm).

I. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par:$g(x) = x^3 - 3x + 4$.

1. Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation.
2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$, montrer que $2 < a < 3$ puis déterminer une valeur approchée de a à 10^{-1} près par défaut.
3. Etudier pour tout x de $\mathbb{R}$, le signe de $g(x)$.

II.1) Déterminer les limites de la fonction f aux bornes du Df ensemble de définition.

2) Montrer que, pour tour de $\mathbb{R}$−{−1;1}, $f(x) = x + 1 + \frac{x+1}{x^2-1}$. En déduire le tableau des variations

3)a) Montrer que, pour tour x de $\mathbb{R}$−{−1;1},$f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2-1)^2}$.

b) En déduire que la courbe (Cf) admet une asymptote oblique (D) en −∞ et en +∞.

c) Etudier la position de (Cf)par rapport à (D).