COLLÈGE F-X. VOGT		Année scolaire 2020-2021
Département de Mathématiques	**SESSION INTENSIVE**	**Situation Scolaire N°2** Date : 25 Novembre 2020

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Niveau : **Tle D et Tle TI** Durée : **04 heures** Coef: 4

PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES — 15,5 POINTS

Exercice 1 : 04,25 Points

On donne les nombres complexes suivants : $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$; $z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $z_3 = z_1.z_2$.

1- Déterminer le module de chacun des nombres z_1 ; z_2 et z_3. *1,5pt*

2- Déterminer les racines carrées de z_1. *0,75pt*

3- Donner la forme algébrique de z_3. *0,5pt*

4- On admet que $z_3 = 2\left[cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + isin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right]$ et que pour un réel θ quelconque, on a : $(cos\theta + isin\theta)^{12} = cos(12\theta) + isin(12\theta)$.

a) Calculer ${z_3}^{12}$. *0,5pt*

b) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , ${z_3}^{12n}$ est réel. *1pt*

Exercice 2 : 0 5,25 Points

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_1 = 4 \\ u_{n+1} = \frac{5u_n+3}{u_n+3} \end{cases}$ et f la fonction définie par $f(x) = \frac{5x+3}{x+3}$.

1- Etudier le sens de variation de f. *0,75pt*

2- Montrer par récurrence que la suite (u_n) est décroissante. *0,75pt*

3- Montrer par récurrence que la suite (u_n) est minorée par 3. *0,75pt*

4- En déduire que la suite (u_n) est convergente. *0,5pt*

5- Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $|u_{n+1} - 3| \leq \frac{1}{3}|u_n - 3|$. *1pt*

6- En déduire que pour tout entier naturel n, $|u_n - 3| \leq \frac{1}{3^n}$. *1pt*

7- Déterminer la limite de la suite (u_n). *0,5pt*

Exercice 3 : 06 Points

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes le polynôme P tel que : $P(z) = z^3 - 4z^2 + 6z - 4$.

1- a) Montrer que $P(\bar{z}) = \overline{P(z)}$. *0,5pt*

b) En déduire que si z est racine de P, alors $\bar{z}$ l'est aussi. *0,5pt*

2- Vérifier que $1 + i$ est une racine de P ; Puis déterminer une deuxième racine de P. *1pt*

3- Déterminer les nombres a et b tels que : $P(z) = (z^2 - 2z + 2)(az + b)$. *1pt*

4- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $P(z) = 0$. *1pt*

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 2 cm sur les axes. On considère les points A, B et E d'affixes respectives $z_A = 1 - i$; $z_B = 1 + i$ et $z_E = \frac{1-i}{2}$. F est le point tel que AEBF soit un parallélogramme. A tout point M du plan d'affixe $z \neq -1 - i$, on associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \frac{z-1-i}{z+1+i}$.

5- a) Déterminer l'affixe z_F du point F. (On pourra remarquer que $[AB]$ et $[EF]$ ont le même milieu)
   b) Placer dans le repère les points A, B, E et F.

6- Déterminer l'affixe du point G isobarycentre des points A, E, B et F.

7- On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$
   a) Montrer que l'on a : $x' = \frac{x^2+y^2-2}{(x+1)^2+(y+1)^2}$ et $y' = \frac{-2x+2y}{(x+1)^2+(y+1)^2}$. **1pt**
   b) Déterminer l'ensemble (C) des points $M(x;y)$ du plan tels que z'soit imaginaire pur . **1pt**

PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES 04,5 POINTS

Situation :

Pour sa grande cour monsieur Elimbi envisage d'aménager ***un espace repos***, carré de 10 mètres de côté à décorer avec une peinture grise ; ***une piscine cylindrique*** de 2,5 mètres de hauteur qu'on devra carreler (le fond et les bords intérieurs) avec des carreaux coutant 10000 francs le mètre carré et ***un espace pour jeu des fléchettes***.

Pour l'espace repos, M. Elimbi signale au technicien que la peinture grise qu'il a en sa possession ne dépasse pas 70 m^2 et il lui donne la consigne suivante:

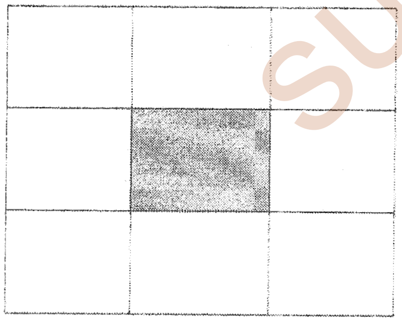
Etape 1 : Partage le carré en 9 carrés de mêmes dimensions et peindre en gris le carré central.

Etape 2 : Partage en 9 chacun des 8 carrés blancs restant et peindre en gris le petit carré central.

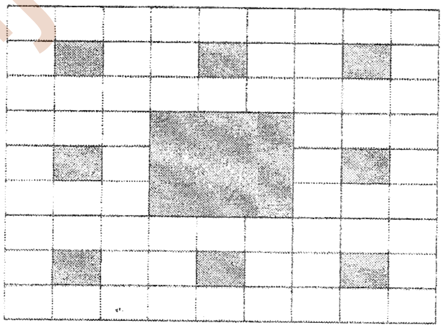
Etc ....

Dans la piscine, une personne placée au bord pourra être repérée par ses coordonnées $(x;y)$ tels que $x + iy = \frac{1}{i+(1-i)t}$ avec x, y, t des nombres réels et i le complexe tel que $i^2 = -1$.

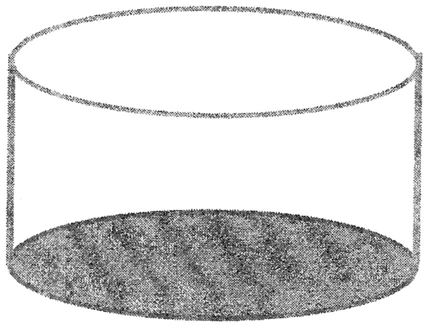
Au niveau de l'espace jeu, on peut lire l'énigme suivante sur un des panneaux : si on lance une fléchette qui doit d'abord parcourir la moitié de la distance qui la sépare du but, puis la moitié de la distance restante, et ainsi de suite... Cette fléchette pourra-t-elle atteindre son but ?



Etape 1



Etape 2



Piscine de hauteur 2,5 m et de rayon de base r. Son aire totale est : $\mathcal{A} = \pi r(2h + r)$.

Tâches

1- Déterminer le nombre d'étapes maximales que le technicien pourra faire. **1,5pt**

2- Déterminer la dépense de M. Elimbi pour l'achat des carreaux. **1,5pt**
   On pourra commencer par comparer les nombres : $x^2 + y^2$ et $x - y$.

3- Répondre en justifiant, à la question posée dans l'énigme. **1,5pt**