COLLEGE F.X.VOGT
Département de Mathématiques

Année scolaire 2020-2021
CLASSE : TD - TTI

ORA ET LABORA

FICHE DE TRAVAUX DIRIGES N°4 DE MATHEMATIQUES

CLASSE DE TD et TTI

Exercice 1:

On considère les nombres complexes $z_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = 18 - 26i$.

1- a) Donner la forme trigonométrique z_1 .

b) En déduire la forme algébrique de ${z_1}^{2018}$.

2- a) Déterminer les racines cubiques de l'unité sous forme algébrique.

b) Calculer $(3-i)^3$.

c) En déduire les racines cubiques de z_2.

3- Linéariser cos^5x et $cos^3x.sin^3x$.

4- Exprimer $cos5x$ et $sin5x$en fonction de $sinx$ et $cosx$.

Exercice 2:

A- On considère dans l'ensemble C des nombres complexes, le polynôme P défini par :

$$P(z) = z^3 + z^2 - z(1-i) + 2 + 2i$$

1- Montrer que P admet une racine réelle z_0 que l'on déterminera.

2- Déterminer les réels a et b tels que : $P(z) = (z - z_0)(z^2 + az + b)$.

3- Résoudre alors l'équation, $P(z) = 0$.

B- On considère dans le plan complexe les points A, B et C tel que : $z_A = -2;\ z_B = i\ et\ z_C = 1 - i$

1- Déterminer le module et un argument du complexe $p = \frac{z_B - z_A}{z_B - z_C}$.

2- Quelle est la nature du triangle ABC ?

3- Déterminer l'affixe du point D pour que ABCD soit un parallélogramme.

Exercice 3:

On considère la famille de suite (z_n) définie par $\begin{cases} z_0 = 1 + i \\ z_{n+1} = -2z_n \end{cases}$. On pose $r_n = |z_n|$ et $\theta_n = arg(z_n)$.

1- Déterminer z_1 ; r_0 et θ_0.

2- Montrer que (r_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

3- Montrer que (θ_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison.

4- Exprimer z_n en fonction de n.

Exercice 4:

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = 1 - i; z_B = 1 + i$. Soit F le point du plan d'affixe $z_F = (1 + i\sqrt{3})z_A^3$. Soit Z le nombre complexe définit pour tout $z \neq 1 - i$, par $Z = \frac{z-1-i}{z-1+i}$.

1- a) Donner la forme algébrique de z_F.

b) Donner la forme trigonométrique de z_F.

c) En déduire les valeurs exactes de $cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right)$ et $sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right)$.

2- Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que :

a) Z soit réel b) Z soit imaginaire pur c) Z soit réel négatif d) $|Z| = 1$.

Exercice 5:

On considère le nombre complexe $z = cos\frac{2\pi}{7} + isin\frac{2\pi}{7}$. On pose $a = z + z^2 + z^4$ et $b = z^3 + z^5 + z^6$.

1- Montrer que les nombres complexes a et b sont conjugués.

2- Montrer que la partie imaginaire de a est positive.

3- Montrer que : $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 = 0$.

4- Calculer $a + b$ et ab.

5- En déduire a et b.

Exercice 6 :

A- Soit le polynôme complexe P te que $P(z) = z^4 - 3z^3 + \frac{9}{2}z^2 - 3z + 1$.

1- Montrer que si z_0 est racine de P alors il en est de meme de $\overline{z_0}$ et de $\frac{1}{z_0}$.

2- Calculer $P(1+i)$ et en déduire toutes les racines de P.

B- On considère les trois nombres complexes suivants : $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$, $z_2 = 1 - i$ et $z = \frac{z_1}{z_2}$.

1- Déterminer la forme algébrique de z.

2- Déterminer le module et un argument de chacun des complexes z_1, z_2 et z.

3- Donner la forme trigonométrique et la forme exponentielle de z.

4- Déduire de tout ce qui précède, les valeurs exactes de $cos\frac{7\pi}{12}$ et $sin\frac{7\pi}{12}$.

Exercice 7 :

Soient les expressions : $S_1 = 1 + cos\,\theta + cos\,2\theta + \cdots + cos\,n\theta$ et $S_2 = \sin\theta + \sin 2\theta + \cdots + \sin n\theta$, où $\theta \neq 2k\pi$ avec $k \in Z$

1- Que valent S_1 et S_2 lorsque $\theta = 2k\pi$ avec $k \in Z$?

2- On pose $A = S_1 + iS_2$.

a) Montrer que $A = 1 + e^{i\theta} + e^{i2\theta} + \cdots + e^{in\theta}$.

b) Justifier que l'on a: $A = \frac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}}$.

c) Montrer que $1 - e^{i\theta} = -2isin\frac{\theta}{2}\, e^{i\frac{\theta}{2}}$.

d) En déduire le module et un argument de l'expression de $1 - e^{i(n+1)\theta}$.

3- A l'aide de la question de 2, donner la forme trigonométrique de A.

4- En déduire alors les valeurs de S_1 et S_2 .

Exercice 8

L'unité étant de 10 m ; la cour de la maison de Pierre vérifie l'ensemble $(\mathcal{H}1)$ des points $M(z)$ du plan tel que $z^3 = 8$. Pierre décide de mettre du gazon sur toute sa cour. 10 m^2 de gazon coûte 15 000 francs. Celle de Jacques vérifie l'ensemble $(\mathcal{H}2)$ des points $M(z)$ du plan tel que $|4z + 4 - 4i\sqrt{3}| = |2 - 2i|$. Il décide de verser du gravier sur sa cour et un camion de gravier peut recouvrir 314 m^2. Jacques achète le camion de gravier à 70 000 francs. Christophe quant à lui veut entourer sa concession avec du fil barbelé en faisant trois tours autour de sa concession. Sa concession vérifie l'ensemble $(\mathcal{H}3)$ des points $M(z)$ du plan tel que $[z^2 + (1+6i)z - 10 + 6i][z^2 + (1-6i)z - 10 - 6i] = 0$. Cinq mètres de fil barbelé coûtent 6000 francs.

1- Combien Christophe dépensera-t-il ?

2- Combien Jacques dépensera-t-il ?

3- Combien Pierre dépensera-t-il ?