Collège Mgr. F.X. VOGT		ANNÉE SCOLAIRE 2020-2021
DÉPARTEMENT DE MATHEMATIQUES	SESSION INTENSIVE	25 novembre 2020
	EPREUVE DE MATHÉMATIQUES	
Niveau : **T^le^ C**	Durée : **4 h**	Coefficient : **7**

EXERCICE 1 : 5 points I et II sont indépendants

I- On considère la fonction f de la variable complexe définie par :

$$p(z) = z^3 - (3+2i)z^2 + (3+3i)z - 4i \; .$$

1. Démontrer que l'équation $f(z)=0$ admet une solution imaginaire pure z_0. 0,75 pt
2. Déterminer les nombres complexes a et b tels que pour tout nombre complexe z,
$p(z) = (z-i)(z^2+az+b)$ 0,5 pt
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $p(z)=0$ 1,5 pt

II- On considère la fonction f de la variable complexe définie par :

$$f(z) = z^4 + 2\sqrt{3}z^3 + 8z^2 + 8\sqrt{3}z + 16 \quad \text{et l'équation (E) : } f(z)=0 .$$

1. Montrer que si Z_0 est solution de l'équation (E), alors $\overline{Z_0}$ est aussi solution de l'équation (E). 0,5 pt
2. Déterminer les solutions imaginaires pures de l'équation (E). 0,5 pt
3. Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z)=0$. 1,25 pt

EXERCICE 2 : 4,5 points

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O;\, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = -1+i$, $z_B = \frac{1}{2}i$ et $z_C = \frac{-1}{4} + \frac{5}{4}i$.

Pour $z \neq z_A$, on pose $Z' = \frac{2Z-i}{Z+1-i}$ et $z = x+iy$ où x, y sont des nombres réels.

1. Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de Z' en fonction de x et y. 0,75 pt
2. Déterminer l'ensemble (Σ) des points M d'affixe z telles que Z' soit réel. 0,5 pt
3. Déterminer l'ensemble (Γ) des points M d'affixe z tel que Z' soit imaginaire pur. 0,5 pt
4. Déterminer l'ensemble (Δ) des points M d'affixe z tel que $|Z'| = 2$. 0,75 pt
5. Le point B appartient-il à (Σ) et à (Γ) ? Justifier la réponse. 0,5 pt
6. Soit M' le point d'affixe Z'.

a) Montrer que $OM = \frac{\sqrt{2}\,DM'}{EM'}$ où D est le point d'affixe $\frac{1-i}{2}$ et E un point dont on déterminera l'affixe. 0,75 pt

b) En déduire et construire l'ensemble (H) des points M' d'affixe Z' tel que $|z| = \sqrt{2}$. 0,75 pt

EXERCICE 3 : 2 points

α étant un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0;\pi]$ et z un nombre complexe, on pose :
$P(z) = z^3 - (1-2\sin\alpha)z^2 + (1-2\sin\alpha)z - 1$.

1. Calculer $P(1)$. 0,25 pt
2. Déterminer les nombres réels a, b et c tels que pour tout nombre complexe z,
$P(z) = (z-1)(az^2+bz+c)$. 0,75 pt
3. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation $P(z)=0$. 1 pt

EXERCICE 4 : 5,5 points I et II sont indépendants

I-1) Soient x et y deux entiers naturels non nuls, premiers entre eux.
Etablir que $x + y$ et $x.y$ sont, l'un pair, l'autre impair. 0,5 pt

2) Déterminer dans $\mathbb{N}^*$ les diviseurs de 84. 0,75 pt

3) Déterminer l'ensemble des couples $(a; b)$ d'entiers naturels non nuls tels que :

$\begin{cases} a + b = 84 \\ \mu = \delta^2 \end{cases}$ où $\mu = PPCM(a, b)$ et $\delta = PGCD(a, b)$. 1,25 pt

II- 1.a. Déterminer un couple $(x_0; y_0)$ d'entiers relatifs solution de l'équation : 48x + 35y = 1.
(On pourra utiliser l'algorithme d'Euclide) 0,5 pt

b. En déduire tous les couples d'entiers relatifs (x, y) solutions de cette équation. 0,75 pt

2. L'espace étant rapporté à un repère orthonormé, on donne le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées (48, 35, 24) et et le point A(-11, 35, -13)

a. Préciser la nature et donner une équation cartésienne de l'ensemble (Π) des points M de l'espace, de coordonnées (x, y, z) tels que : $\vec{u}.\overrightarrow{AM} = 0$. 0,75 pt

b. Soit (D) la droite d'intersection de (Π) avec le plan d'équation : z = 16.
Déterminer tous les points de (D) dont les coordonnées sont entières et appartiennent à l'intervalle [-100 ; 100]. En déduire les coordonnées du point de (D), à coordonnées entières, situé le plus près de l'origine. 1 pt

EXERCICE 5 : 3 points

On considère dans $\mathbb{Z}$ le système (s) : $\begin{cases} n \equiv 13[19] \\ n \equiv 6[12] \end{cases}$

1. Démontrer qu'il existe un couple (u, v) d'entiers relatifs tels que : $19u + 12v = 1$. Puis, vérifier que, pour un tel couple, le nombre $N = 6 \times 19u + 13 \times 12v$ est une solution de (s) 0,75 pt

2.a) Soit N_0 une solution de (s). Vérifier que le système (s) équivaut à (s') : $\begin{cases} n \equiv N_0[19] \\ n \equiv N_0[12] \end{cases}$ 0,25 pt

b) Démontrer que le système (s') équivaut à $n \equiv N_0[228]$. 0,5 pt

3. Trouver un couple (u, v) solution de l'équation $19u + 12v = 1$ et calculer la valeur de N correspondante. 0,5 pt

4. Déduire des questions précédentes l'ensemble des solutions de (s). 0,5 pt

5. Un entier m est tel que lorsqu'on le divise par 12, le reste est 6 et lorsqu'on le divise par 19, le reste est 13.
Quel est le reste r de la division euclidienne de cet entier m par 228. 0,5 pt

sujetexa.com