Collège Mgr. F.X. VOGT		ANNÉE SCOLAIRE 2020-2021
DÉPARTEMENT DE MATHEMATIQUES	CONTRÔLE	31 octobre 2020
Niveau : Tle C	EPREUVE DE MATHÉMATIQUES Durée : **4 h**	Coefficient : 7

EXERCICE 1 : 4 points

1) Etablir en utilisant les congruences que pour tout entier naturel n :

a) $3^{2n+1}+2^{n+2}$ est multiple de 7. 0,5 pt

b) $3\times 5^{2n+1}+2^{3n+1}$ est divisible par 17. 0,5 pt

2) En remarquant que l'on a $10^3-1=9\times 111$ et $10^3+1=7\times 11\times 13$,
Démontrer en utilisant les congruences que :

a) pour tout entier naturel n, $A_n=10^{6n+2}+10^{3n+1}+1$ est divisible par 111 0,75 pt

b) si n est impair, le nombre $A_n=10^{6n+2}+10^{3n+1}+1$ est divisible par 7 et par 13 0,75 pt

3) L'entier naturel p étant fixé, on pose pour $n\geq 1$, $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)\times\ldots\times(k+p)}$.

a) Montrer que $\frac{n!}{(n+p)!}=\frac{1}{(n+1)\times\ldots\times(n+p)}$ 0,25 pt

b) Démontrer en raisonnant par récurrence sur n que pour tout entier naturel non nul n,

$$S_n=\frac{1}{p}\left[\frac{1}{p!}-\frac{n!}{(n+p)!}\right].$$ 1 pt

c) En déduire la limite de S_n quand n augmente indéfiniment. 0,25 pt

EXERCICE 2 : 5 points

I- Quel est le reste de la division par 11 du nombre $(7077)^{377}$? 0,75 pt

II-1) Donner, suivant les valeurs de l'entier n, le reste de la division euclidienne de 4^n par 7. 1 pt

2) Un entier A s'écrit $\overline{13321}$ dans le système de numération de base quatre. Quel est le reste de la division de A par 7 ? 0,75 pt

III- Soit n l'entier naturel représenté, en base b par $n=\overline{342x}$

1) Déterminer le chiffre x pour que ce nombre soit divisible par 3, quand $b=7$ 0,75 pt

2) Déterminer le chiffre x pour que ce nombre soit divisible par 12, quand $b=17$ 0,75 pt

IV- Pour quelles valeurs de l'entier naturel n le nombre $5^{6n}+5^n+2$ est-il divisible par 7 ? 1 pt

EXERCICE 3 : 3 points

1.a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $2^{3n}-1$ est un multiple de 7 (on pourra utiliser un raisonnement par récurrence). 0,5 pt

b) En déduire que $2^{3n+1}-2$ est un multiple de 7 et que $2^{3n+2}-4$ est un multiple de 7. 0,5 pt

2. Déterminer les restes de la division euclidienne par 7 des puissances de 2. 0,75 pt

3. Le nombre p étant un entier naturel, on considère le nombre entier : $A_p=2^p+2^{2p}+2^{3p}$.

a) Si $p=3n$, quel est le reste de la division de A_p par 7 ? 0,25 pt

b) Démontrer que si $p=3n+1$, alors de A_p est divisible par 7. 0,25 pt

c) Etudier le cas où $p=3n+2$ 0,25 pt

4. On considère les nombres entiers a et b écrits dans le système binaire :

$a = \overline{1001001000}$ et $b = \overline{1000100010000}$.

Utiliser les questions précédentes pour répondre à la question suivante : Ces deux nombres sont-ils divisibles par 7 ? 0,5 pt

EXERCICE 4 : 5 points

1. On rappelle qu'un entier naturel a est non premier si et seulement si il existe un entier naturel non nul n tel que n divise a et $2 \leq n < a$.

On se propose de montrer que tout entier naturel non nul a et distinct de 1 admet au moins un diviseur premier.

Pour cela on considère l'ensemble $A = \{d \in D(a), d \geq 2\}$ où $D(a)$ est l'ensemble des diviseurs de a.

a) Montrer que A admet un plus petit élément p. 0,5 pt

b) Montrer que p est premier. 0,5 pt

c) Conclure. 0,25 pt

2. Soit a un entier naturel non nul a et distinct de 1. On se propose de montrer que si a est non premier alors a possède au moins un diviseur premier positif dont le carré est inférieur ou égal à a.

Pour cela on considère l'ensemble $H = \{n \in D(a), 2 \leq n < a\}$, n entier naturel.

a) Montrer que H est non vide 0,25 pt

b) En déduire que H admet un plus petit élément d. 0,5 pt

c) Montrer que d est premier. 0,5 pt

d) Montrer que $d^2 \leq a$. 0,5 pt

3. Les nombres 1999 et $(2^{11} - 1)$ sont-ils des nombres premiers ? Justifier la réponse. 1 pt

4. Déterminer les diviseurs positifs du nombre 525. 0,5 pt

5.Montrer que l'ensemble des nombres premiers est infini. On pourra utiliser le raisonnement par l'absurde. 0,5 pt

EXERCICE 5 : 3 points

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel non nul n par :

$$u_n = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{n}{n^2+k} = \frac{n}{n^2} + \frac{n}{n^2+1} + \ldots + \frac{n}{n^2+2n} + \frac{n}{n^2+2n+1}$$

1. Calculer u_1 et u_2. 0,5 pt

2. Donner le nombre de termes de u_n. 0,25 pt

3. Montrer que pour tous entiers naturels n et k tels que $0 \leq k \leq 2n+1$, on a :

$$\frac{n}{n^2+2n+1} \leq \frac{n}{n^2+k} \leq \frac{n}{n^2}$$ 1 pt

4. En déduire que pour tout entier naturel non nul n, $\frac{2n}{n+1} \leq u_n \leq \frac{2(n+1)}{n}$ 0,75 pt

5. En déduire que la suite (u_n) est bornée. 0,5 pt