Collège Mgr. F.X. VOGT		ANNÉE SCOLAIRE 2020-2021
DÉPARTEMENT DE MATHEMATIQUES	CONTRÔLE	17 octobre 2020
Niveau : T^le C	EPREUVE DE MATHÉMATIQUES Durée : **4 h**	Coefficient : **7**

EXERCICE 1 : 5 points

1) Démontrer par récurrence que :

a) Pour tout entier naturel non nul n, $2^{6n-5} + 3^{2n}$ est divisible par 11. 0,75 pt

b) Pour tout entier naturel n, $5^n \geq 1+4n$ 0,75 pt

c) Pour tout entier naturel n, $A_n = 10^{6n+2} + 10^{3n+1} + 1$ est divisible par 111 0,75 pt

d) Pour tout entier naturel non nul n, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$. 0,75 pt

2) Soit (u_n) la suite réelle à termes positifs définie par : $u_0 = 0$ et $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$

Démontrer par récurrence que $\forall\ n \in \mathbb{N}, u_n \leq 3$. 0,5 pt

3) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul n, on a : $n! \geq 2^{n-1}$ 0,75 pt

4) Ici a et b sont deux nombres réels ; n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Démontrer par récurrence que : $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + ... + ab^{n-2} + b^{n-1})$. 0,75 pt

EXERCICE 2 : 4 points

1) Les nombres x, y et z étant des entiers naturels non nuls, $x > 3$, on suppose que :

l'écriture en base x de y est 121 ;

l'écriture en base x de z est 110.

a) Montrer que l'on peut, sans connaître x, exprimer dans le système de base x le produit xyz.

b) Sachant que de plus la somme $x + y + z$ est égale, dans le système décimal, au nombre 49, déterminer dans le système décimal x et le produit xyz. 1,5 pt

2) Un nombre s'écrit $xyzx$ en base 11 et $yyxz$ en base 7. Déterminer ce nombre et donner son écriture dans le système de numération décimale. 1 pt

3) Dans un système de numération de base inconnue, deux nombres s'écrivent 302 et 402. Dans le système à base 9, le produit de ces deux nombres s'écrit 75583. Quelle est la base du premier système ? 1,5 pt

EXERCICE 3 : 3,5 points

Soit b un entier naturel supérieur ou égal à 2. Soit a et n deux entiers naturels non nuls. On suppose que l'écriture de a en base b comporte $(n + 1)$ chiffres c'est-à-dire $a = \overline{x_n x_{n-1} \dots x_1 x_0}^{b}$.

1.a) Etablir que : $\sum_{i=0}^{n} (b-1)b^i = b^{n+1} - 1$. 0,5 pt

b) En déduire que $a < b^{n+1}$ 1 pt

c) Démontrer que : $b^n \leq a < b^{n+1}$. 0,5 pt

2. Montrer que $a - x_0$ est un multiple de b. 0,25 pt

3. Ici on suppose que b est supérieur ou égal à 6.

Le nombre 24477 en base dix s'écrit : $\overline{131235}$ en base b.

a) Justifier que 24472 est divisible par b. 0,25 pt

b) Donner un encadrement de 24477 par des puissances de b et déterminer b. 1 pt

EXERCICE 4 : 3 points

1. En n'utilisant pas un raisonnement par récurrence, montrer que $n(2n+1)(7n+1)$ est divisible par 3. (On précisera le type de raisonnement) 1 pt

2. Donner la valeur de vérité de la proposition suivante :
«Pour tout entier naturel n, il existe au moins un entier naturel k, tel que $n = 3k$ ou $n = 3k + 1$».
Justifier la réponse. 0,5 pt

3. Démontrer que pour tout entier naturel n, (n^2 est pair) implique (n est pair) 0,5 pt

4. Soient (D) et (D') des droites parallèles du plan. Montrer que si (Δ) est une droite sécante à (D), alors (Δ) est sécante à (D'). 0,5 pt

5. On sait qu'il est déjà établi que : Etant donnés un point A du plan et un vecteur $\vec{u}$, il existe un point M unique tel que : $\overrightarrow{AM} = \vec{u}$.
Démontrer alors le résultat suivant : soient A et B deux points du plan, a et b deux réels.
Si $a + b \neq 0$, alors il existe un seul point G tel que $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \vec{0}$. 0,5 pt

EXERCICE 5 : 4,5 points

1. Soit a un entier naturel. On pose $N = \overline{1335}^{\,a}$. (c'est-à-dire N s'écrit 1335 en base a)

a) Donner l'écriture de N en base $a + 1$. 0,5 pt

b) Sachant que $N < 500$, déterminer N. 0,5 pt

2.a) Déterminer les entiers m, p et q tels que :
$$8x^4 + 6x^2 + 2 = (2x^2 + x + 1)(mx^2 + px + q)$$ 0,5 pt

b) En déduire que dans le système de numération de base 9, le nombre $\overline{80602}^{\,9}$ est divisible par $\overline{211}^{\,9}$. 0,5 pt

3. On pose pour $n \geq 1$, $S_n = \sum_{k=1}^{n}(2k-1)^3$.

a) Calculer S_1 ; S_2 et S_3. 0,5 pt

b) Démontrer qu'on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = 2n^4 - n^2$ 0,75 pt

c) Pour quelles valeurs de n a-t-on $S_n = 29161$? 0,75 pt

d) Calculer la somme $23^3 + 25^3 + 27^3 + \cdots 99^3$. 0,5 pt