Collège Mgr. F.X. VOGT		ANNÉE SCOLAIRE 2020-2021
DÉPARTEMENT DE MATHEMATIQUES	CONTRÔLE	11 novembre 2020
Niveau : T^{le} C	EPREUVE DE MATHÉMATIQUES Durée : 4 h	Coefficient : 7

EXERCICE 1 : 4 points

1) Soit n et a deux entiers naturels non nuls.

a) On suppose que a divise $42n + 37$ et que a divise $7n + 4$. Montrer que a divise 13. 0,5 pt

b) En déduire les valeurs possibles de a. 0,5 pt

2) Soit n un entier relatif.

Déterminer les valeurs de n pour lesquelles $\frac{n^3-n}{n+2}$ est un entier relatif. 1 pt

3) On divise 524 par un entier naturel non nul b : le quotient est 15 et le reste r.

Déterminer les valeurs possibles de b et r. 1 pt

4) Pour quelles valeurs de l'entier naturel n le nombre $5^{6n} + 5^n + 2$ est -il divisible par 7 1 pt

EXERCICE 2 : 4,5 points

I- Trouver tous les couples d'entiers naturels non nuls a et b tels que :

$$ab = 1734 \text{ et } PGCD(a;b) = 17.$$ 1 pt

II- Soit n un entier naturel. Déterminer $PGCD(n+1; 2n+1)$. 0,5 pt

III- 1) En utilisant l'algorithme d'Euclide,

a) Montrer que 1981 et 1815 sont premiers entre eux. 0,5 pt

b) Déterminer deux entiers relatifs u_0 et v_0 tels que : $1981u_0 + 1815v_0 = 1$ 0,75 pt

2) Résoudre alors dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, l'équation $1981x + 1815y = 3$ 0,75 pt

IV- Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$, l'équation $39x - 45y = 6$ 1 pt

EXERCICE 3 : 3,5 points

I- Soit E l'ensemble des éléments x de $\mathbb{Z}$ tels que simultanément : $\begin{cases} x \equiv 2[5] \\ x \equiv 2[7] \\ x \equiv 2[9] \end{cases}$

1) Indiquer la forme générale des éléments x de E. 0,75 pt

2) Déterminer les éléments de E qui sont compris entre -1000 et -500. 0,5 pt

3) Déterminer le $PGCD$ de deux éléments consécutifs de E. 0,75 pt

II-1) Etudier le reste de la division euclidienne par 7 de 10^n lorsque l'entier n appartient à l'ensemble $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. 0,5 pt

2) Déterminer les chiffres x et y pour que le nombre qui s'écrit $\overline{2xyyx2}$ dans le système décimal, soit divisible par 21. (on donnera tous les nombres cherchés). 1 pt

EXERCICE 4 : 4,5 points

(x_n) et (y_n) sont les suites définies par : $\begin{cases} x_0 = 3,\ y_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = \frac{6}{5}x_n + \frac{2}{5}y_n + 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, y_{n+1} = \frac{2}{5}x_n + \frac{9}{5}y_n + 2 \end{cases}$

1. Démontrer par récurrence que les points M_n de coordonnées $(x_n; y_n)$ sont sur la droite (D) d'équation : $2x - y - 5 = 0$. 1 pt
2. En déduire x_{n+1} en fonction de x_n. 0,5 pt

3. Démontrer que (x_n) et (y_n) sont des suites d'entiers relatifs. 0,75 pt

4. Soit n un entier naturel.

Démontrer que x_n est divisible par 5 si et seulement si y_n est divisible par 5. 0,75 pt

5.a) Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, x_n = 2^{n+1} + 1$. 0,75 pt

b) Soit n un entier naturel.

Démontrer que 5 divise x_n si et seulement si 5 divise x_{n+4}. 0,75 pt

EXERCICE 5 : 3,5 points

1. Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, l'équation $7x + 4y = 200$ 1 pt

2. A l'occasion de la fête des lauréats d'une classe de terminale C au Collège F. X. VOGT, le parent Délégué dispose de 10000 francs pour l'achat de bières en bouteilles coûtant 350 francs chacune et de jus en bouteilles coûtant 200 francs chacun. Il doit dépenser la totalité de cette somme d'argent pour l'achat de ces deux types de boisson. Avec la présence du titulaire de la classe qui ne boit que la bière, il faut acheter au moins une bière. Chaque participant a droit à une seule bouteille.

a) Déterminer les nombres possibles de bouteilles de bières et de jus qu'il peut acheter. 1,5 pt

b) En déduire le nombre de bouteilles de bières et de bouteilles de jus qu'il faut pour satisfaire le plus grand nombre de personnes 1 pt