

**L'ABAQUE**

# **Mécanique Appliquée**

**Terminales F, MEM, MEB, EF, IB, MA, MF & CM**

Année scolaire 2010/2011

Edition DucYopa

**Par NGNINKEU YOPA DUCLAIRE**

(Constructeur Mécanique)

COLLECTION

L'ABAQUE

# MECANIQUE APPLIQUEE Tles

- Maître en droit des Affaires de l'université de Doula

Toute reproduction, même partielle de cet ouvrage,  
par quelque procédé que ce soit, faite sans l'autorisation préalable de l'auteur est interdite et  
exposerait le contrevenant à des poursuites judiciaires conformément à l'article 327 du code pénal  
Camerounais.

**Edition Duc Yopa :** Tels : 99 63 05 77/ 74 42 54 50 ; Courriel : [ducyopa@yahoo.fr](mailto:ducyopa@yahoo.fr)

# TABLE DES MATIERES

*N.B : Ce programme est précédé par celui de la classe de première.*

Thème N°1 : Massicot ou coupe papier.....	5
Thème N°2 : Mécanisme de bouchage des bouteilles.....	7
Thème N°3 : Grue de chargement.....	10

Chapitre 1 : Rappels sur la RDM.....	33
Chapitre 2 : Centre d'inertie, Moment statique, Moment quadratique.....	35
Chapitre 3 : Flexion simple.....	42
Chapitre 4 : Torsion simple.....	51

Chapitre 5 : Principe Fondamental de la Dynamique.....	57
Chapitre 6 : Travail, Puissance et Energie.....	60

Thème d'examen.....	63
Corrigé du thème d'examen.....	73

## PROBLÈMES GÉNÉRAUX DE STATIQUE ET CINÉMATIQUE

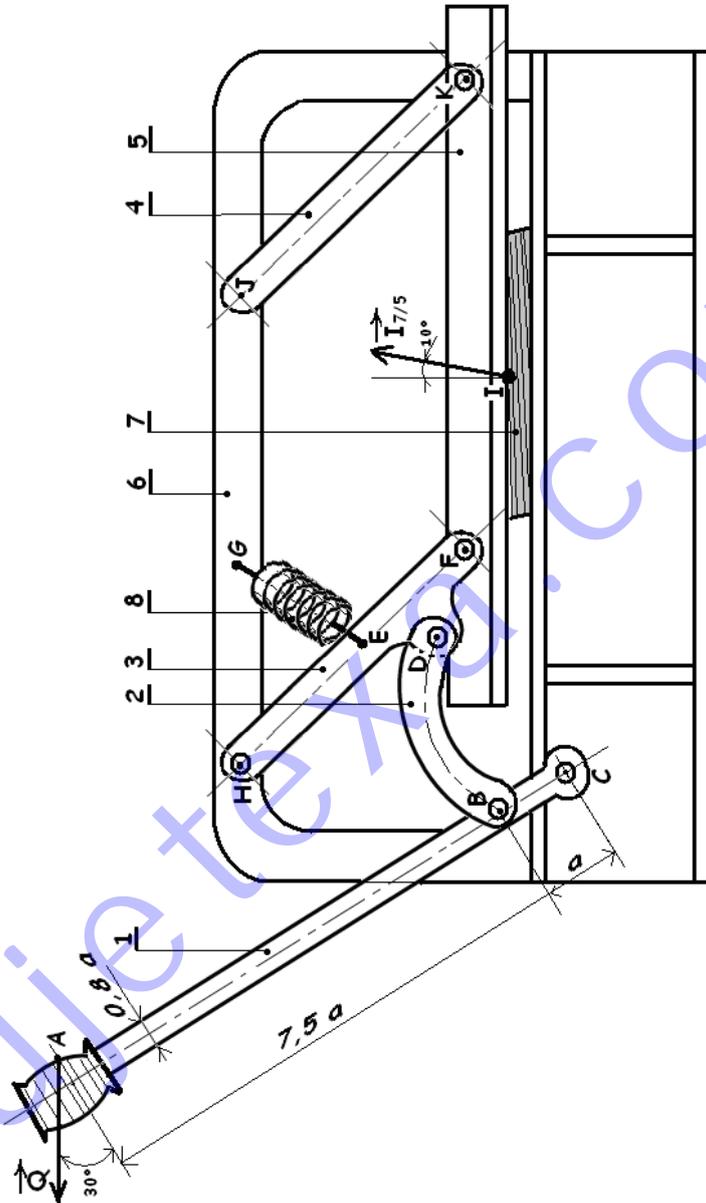


La difficulté traditionnelle du certificat de Mécanique Appliquée réside non pas seulement dans l'assimilation du cours mais et surtout dans sa présentation à l'apprenant. C'est pourquoi il nous a paru indispensable comme synthèse, de proposer quelques sujets types d'examens « cousus à la mesure » du physicien pour une récolte facile.

Thème N°1 : Massicot ou coupe papier.....	5
Thème N°2 : Mécanisme de bouchage des bouteilles.....	7
Thème N°3 : Grue de chargement.....	10



Thème N° 1 : **MASSICOT OU COUPE PAPIER.**



**Figure 1**

**1. PRESENTATION :**

Le mécanisme représenté ci-dessus est un massicot utilisé pour couper des liasses de papiers 7. Pour cela il faut appliquer en A une force  $\vec{Q}$ . Le ressort 8 permet un rappel rapide de la lame 5.

**2- TRAVAIL A FAIRE :**

**-A- STATIQUE :**

La résistance de la liasse de papier sur la lame est  $\|\vec{I}_{7/5}\| = 3200\text{N}$ . On se propose de déterminer l'effort minimal  $\vec{Q}$  qu'il faut exercer sur le levier 1 en A, pour sectionner la liasse de papier.

On prendra, Echelle des forces :  $1\text{cm} \leftrightarrow 800\text{N}$ .

-A.1- Proposer un ordre d'isolément des pièces du mécanisme

-A.2- **Equilibre du levier 4 :**

Le levier 4 étant isolé, y appliquer le principe Fondamental de la Statique et déduire le support des actions mécaniques qui le sollicitent. Représenter ces forces.

-A.3- **Equilibre du couteau 5 :**

-A.3.1- Le couteau 5 étant isolé, énoncer le théorème d'un solide en équilibre sous l'action de trois forces.

-A.3.2- Déterminer graphiquement  $\vec{K}_{4/5}$  et  $\vec{F}_{3/5}$ .

-A.4- **Equilibre du levier 3 :**

-A.4.1- Le levier 3 étant isolé, faire le bilan des forces extérieures qui s'y appliquent.

-A.4.2- Appliquer la méthode de Culman pour déterminer  $\vec{H}_{6/3}$ ;  $\vec{E}_{8/3}$  et  $\vec{D}_{2/3}$ .

On prendra :  $\|\vec{F}_{5/3}\| = 2800\text{N}$

-A.4.3- **Equilibre de la pièce 2 :** En isolant la pièce 2, on trouve que  $\vec{D}_{2/3} = \vec{B}_{1/2}$

Enoncer le principe qui justifie cette égalité.

-A.5- **Equilibre du levier 1 :**

-A.5.1- Le levier 1 étant isolé, faire le bilan des forces extérieures qui s'y appliquent.

-A.5.2- Calculer analytiquement les intensités des forces  $\vec{Q}$  et  $\vec{C}_{6/1}$ .

-A.6- Calculer la force de frottement du papier sur le couteau.

-B- **CINEMATIQUE :**

L'étude cinématique est faite au début de l'opération de coupe et à cette phase, le levier occupe la position indiquée sur la figure 2. On se propose de déterminer la vitesse de coupe à cet instant.

-B.1- Comparer en justifiant les vecteurs vitesses suivants :

a)  $\vec{V}_{B1/6}$  et  $\vec{V}_{B2/6}$     b)  $\vec{V}_{D2/6}$  et  $\vec{V}_{D3/6}$     c)  $\vec{V}_{F3/6}$  et  $\vec{V}_{F5/6}$ .

-B.2- Quelle est la nature du mouvement de 1 par rapport à 6 ?

-B.3- On prendra comme échelle des vitesses :  $1\text{cm} \leftrightarrow 2\text{ cm/s}$ .

-B.3.1- Sachant que  $\|\vec{V}_{A1/6}\| = 15\text{cm/s}$ , Déterminer graphiquement  $\|\vec{V}_{B1/6}\|$ .

-B.3.2- Vérifier analytiquement le calcul de  $\|\vec{V}_{B1/6}\|$ .

-B.4- Quelle est la nature du mouvement de 3 par rapport à 6 et de celui de 2 par rapport à 6 ?

-B.5- Déterminer sur la figure 2 le CIR  $I_{2/6}$ .

-B.6- On donne les distances :  $BI_{2/6}=252\text{ mm}$  et  $DI_{2/6}=255\text{ mm}$ . Calculer le module du vecteur vitesse  $\vec{V}_{D2/6}$ .

-B.7- On suppose que  $\|\vec{V}_{D3/6}\| = 2\text{cm/s}$ . Déterminer graphiquement la vitesse  $\vec{V}_{F3/6}$

et en déduire  $\vec{V}_{I5/6}$ .



## Thème N° 2 : MECANISME DE BOUCHAGE DES BOUTEILLES

### I- PRESENTATION DU MECANISME:

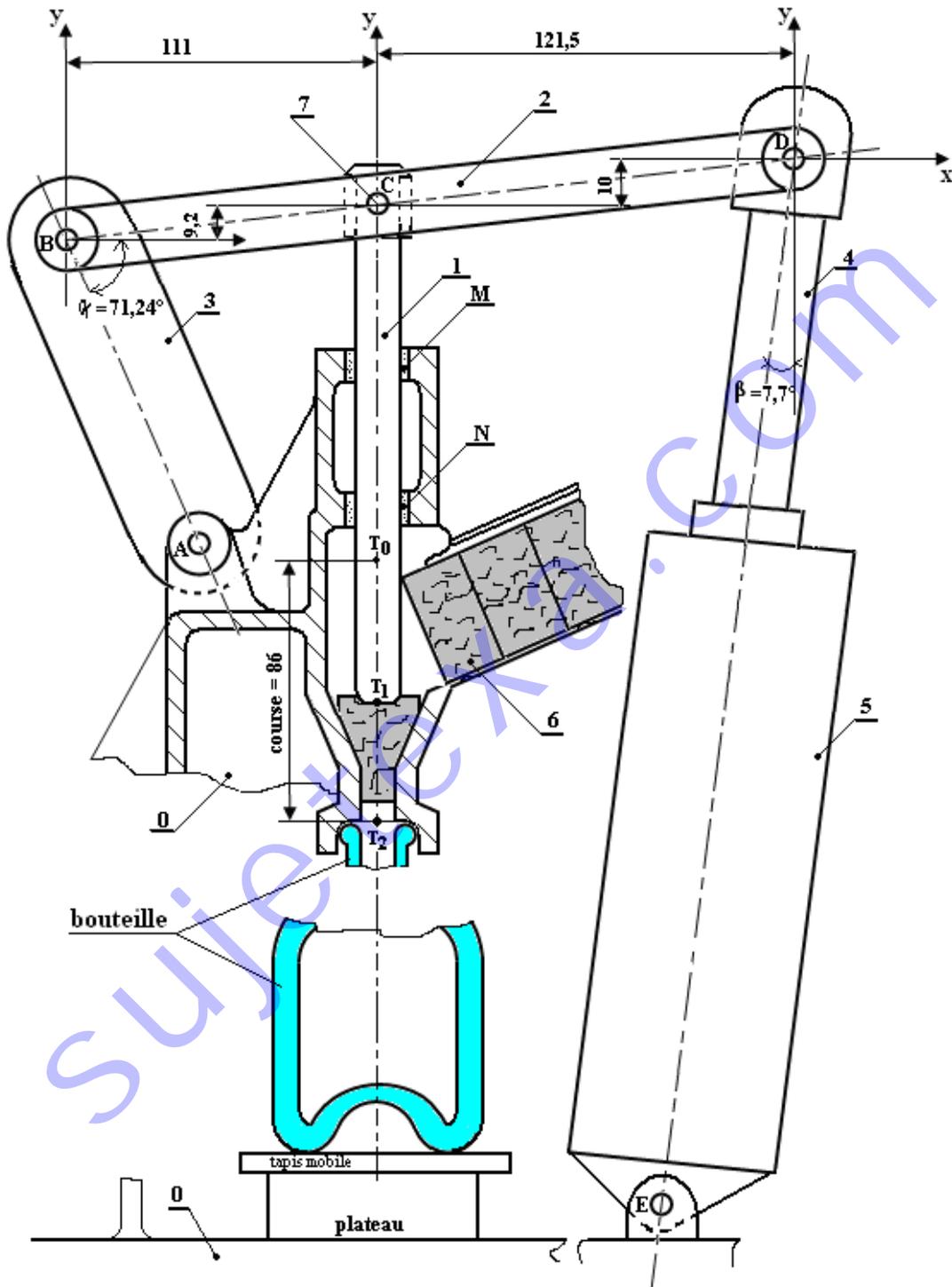


figure1 :

**I- MISE EN SITUATION ET DESCRIPTION :**

Le dessin de la figure 1 ci-dessus représente un mécanisme de bouchage des bouteilles entièrement automatisé. Les bouteilles à boucher parviennent sous le mécanisme par un tapis roulant. Le cycle de bouchage est le suivant :

- 1- Arrivée d'une bouteille sous le mécanisme.
- 2- Montée du plateau mobile porteur d'une bouteille.
- 3- Descente du levier 1 commandé par le vérin 4+5.
- 4- Remontée du levier 1.
- 5- Descente du plateau mobile.
- 6- Avance de la bouteille bouchée et arrivée d'une autre bouteille.

**II- TRAVAIL A FAIRE :****A- STATIQUE :**

**But :** Déterminer l'effort de bouchage  $\vec{T}_{1b/1}$ .

**Hypothèses et données :**

- Tous les contacts sont sans frottement sauf dans les paliers M et N où le coefficient de frottement est  $f=0,25$ .
- Le mécanisme admet un plan de symétrie qui est celui de la figure. Tous les efforts considérés sont dans ce plan.
- L'action du vérin 4 sur le levier 2 est  $\|\vec{D}_{4/2}\| = 4000N$ .

**A.1- Etude de l'équilibre de 4+5 :**

4+5 étant isolés, appliquer le principe fondamental de la statique à son équilibre et en déduire les droites d'action et les sens des efforts  $\vec{D}_{2/4}$  et  $\vec{E}_{0/5}$ .

**A.2- Etude de l'équilibre de 3 :**

3 étant isolé, appliquer le principe fondamental de la statique à son équilibre et en déduire les droites d'action et les sens des efforts  $\vec{B}_{2/3}$  et  $\vec{A}_{0/3}$ .

**A.3- Etude de l'équilibre de 2 :**

**A.3.1-** 2 étant isolé, compléter le tableau du bilan des forces extérieures qui lui sont appliquées.

**A.3.2-** Déterminer analytiquement les actions mécaniques  $\vec{B}_{3/2}$  et  $\vec{C}_{1/2}$ .

**A.4- Etude de l'équilibre de 1 :**

**A.4.1-** 1 étant isolé, compléter le tableau du bilan des forces extérieures qui lui sont appliquées.

**A.4.2-** Après avoir justifié les constructions, déterminer graphiquement par la méthode de CULMAN les modules des efforts  $\vec{M}_{0/1}$ ,  $\vec{N}_{0/1}$  et  $\vec{T}_{1b/1}$ .

Prendre :  $\|\vec{C}_{2/1}\| = 8100N$  et son support est indiqué; Echelle :  $1cm \equiv 800N$ .

**B- CINEMATIQUE :**

**But :** Déterminer la vitesse de sortie  $\vec{V}_{D4/5}$  de la tige 4 du vérin, afin d'évaluer la pression nécessaire à l'intérieur du cylindre 5.

**Hypothèses et données :**

- Dans la position de la figure 2, la vitesse de descente de la tige 1 (vitesse de bouchage d'une bouteille) est  $V=9.10^{-2}$  m/s.
- Echelle des vitesses :  $1\text{mm} \rightarrow 2\text{mm/s}$

**B.1- Etude du mouvement de 1 par rapport à 0.**

**B.1.1-** Quelle est la nature du mouvement de la pièce 1 par rapport à 0 ?

**B.1.2-** Déterminer graphiquement les positions extrêmes  $C_0$  et  $C_2$  du point C.

**B.1.3-** Tracer le vecteur vitesse  $\vec{V}_{C1/0}$  sur la figure 2.

**B.1.4-** Comparer les vecteurs vitesses  $\vec{V}_{C1/0}$  et  $\vec{V}_{C2/0}$ . Justifier votre réponse.

**B.2- Etude du mouvement de 3 par rapport à 0.**

**B.2.1-** Quelle est la nature du mouvement de 3 par rapport à 0 ?

**B.2.2-** En déduire et tracer la direction de la vitesse  $\vec{V}_{B3/0}$ .

**B.2.3-** Comparer en justifiant  $\vec{V}_{B3/0}$  et  $\vec{V}_{B2/0}$ .

**B.3- Etude du mouvement de 2 par rapport à 0.**

**B.3.1-** Quelle est la nature du mouvement de 2 par rapport à 0 ?

**B.3.2-** Déterminer la position du centre instantané de rotation  $I_{2/0}$  de 2 dans son mouvement par rapport à 0 et le tracer.

**B.3.3-** En déduire graphiquement le module de  $\vec{V}_{D2/0}$ .

**B.3.4-** Montrer que  $\vec{V}_{D2/0} = \vec{V}_{D4/0}$ .

**B.4- Etude du mouvement du vérin 4+5 par rapport à 0.**

**B.4.1-** Quelle est la nature du mouvement de 4 par rapport à 5 ? En déduire le tracé du vecteur vitesse  $\vec{V}_{D4/0}$ .

**B.4.2-** Quelle est la nature du mouvement du corps de vérin 5 par rapport à 0 ? En déduire le tracé du vecteur vitesse  $\vec{V}_{D5/0}$ .

**B.4.3-** Ecrire la relation de composition de vitesse en D entre 5, 4, et 2 et en déduire graphiquement la direction et le module de  $\vec{V}_{D4/5}$ .



## Thème N° 3 : GRUE DE CHARGEMENT

### I- MISE EN SITUATION ET DESCRIPTION

Le véhicule proposé à la figure 1 à l'échelle réduite est destiné au déchargement des matériaux, et des marchandises.

L'engin se compose d'une tourelle pivotante 1 articulée sur le châssis 0 (pivot d'axe vertical), d'un bras de manœuvre 2 articulée en N sur la tourelle et d'une flèche télescopique 3+4 articulée en M sur le bras 2.

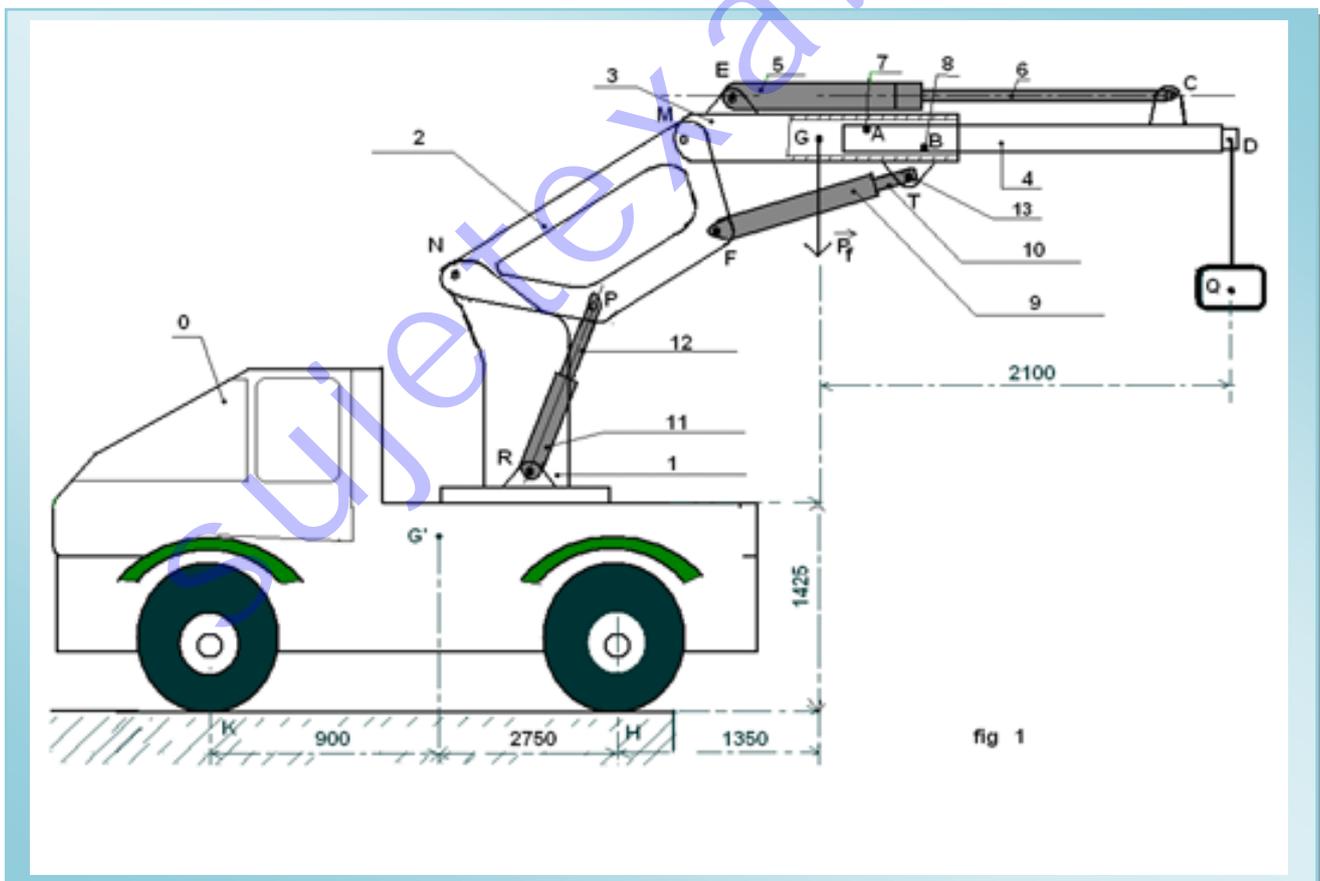
La flèche télescopique est composée de deux tubes carrés emboîtés l'un dans l'autre. Le mouvement de télescopage est réalisé par le vérin hydraulique 5+6 (5= corps, 6= tige).

Le vérin est articulé en E sur 3 et en C sur 4. Le mouvement est facilité par deux galets de roulements 7+8. Les galets 7 et 8 sont articulés respectivement sur 4 et 3.

Le mouvement de levage de l'ensemble de la flèche est fourni par le vérin hydraulique 9+10. Le vérin est articulé en F sur 2 et en T sur 3.

La manœuvre sur le bras 2 est réalisée par le vérin 11+12. Le vérin est articulé en P sur 2 et en R sur 1.

L'étude est effectuée dans le plan de symétrie de l'appareil.  $\vec{Q}$  Schématise le poids de la charge à soulever,  $\vec{P}_f$  le poids de l'ensemble de la flèche. Les poids des vérins sont négligés.



**But :** Déterminer la pression nécessaire dans le vérin 9+10 pendant l'élévation la charge. Pour cela, il faut déterminer les actions mécaniques en A, B et C.

**Hypothèse et données :**

- L'ensemble admet un plan de symétrie qui est celui de la figure 1
- Les liaisons en A ,B ,C ,D ,E ,F ,M,N ,P ,R ,et,T sont des liaisons pivots dont les centres portent le même nom
- Toutes les liaisons sont parfaites
- Le vérin travaille en traction
- On suppose que la charge soulevée a un poids de module  $Q= 1500 \text{ daN}$
- Echelle des forces :  $1 \text{ cm} \leftrightarrow 1000 \text{ daN}$ .

**A.2.1-** Isoler les vérins 5+6 et 9+10, énoncer le principe fondamental de la statique et en déduire le support des actions en E et T.

**A-2.2-** Isoler l'ensemble de la flèche (3+4+5+6+7+8)

**A-2.2.1-** Remplir le tableau bilan des forces extérieures qui le sollicitent.

**A-2.2.2-** Déterminer la position de  $\vec{R}$  résultante de  $\vec{Q}$  et  $\vec{P}_f$  par rapport au point G.

On notera I le point de la direction de cette résultante.

**A-2.2.3-** Déterminer graphiquement les actions mécaniques en M et T

**A-2.3-** Isoler l'ensemble 4+7 en position relevée,

**A-2.3.1-** Remplir le tableau bilan des forces extérieures qui le sollicitent.

**A-2.3.2-** En appliquant la méthode de Culman, déterminer les actions mécaniques en B et C

**B- ETUDE CINEMATIQUE**

**But :** Déterminer la vitesse du point D appartenant à la flèche 3+4 dans son mouvement par rapport à la tourelle pivotante 1.

**Hypothèse et données :**

- Le dispositif occupe la position de la figure 2
- La tige 12 sort dans le corps 11 à la vitesse uniforme de  $20 \text{ cm / s}$
- Le vérin 9+10 ne travaille pas dans cette phase
- Echelle des vitesses :  $1 \text{ cm} \leftrightarrow 10 \text{ cm/s}$

**B-1-** Donner la nature du mouvement de 12 par rapport à 11. Déterminer et tracer le vecteur vitesse  $\vec{V}_{P_{12}/11}$

**B-2-a)** Quelle est la nature des mouvements de 2 et 11 par rapport à 1 ?

En déduire et tracer les directions des vitesses  $\vec{V}_{P_{2}/1}$  et  $\vec{V}_{P_{11}/1}$

**B-2-b)** Justifier l'égalité suivante :  $\vec{V}_{P_{2}/1} = \vec{V}_{P_{12}/1}$

**B-3-** Ecrire la relation de composition des vitesses au point P entre 12,1 et 11. On exprimera  $\vec{V}_{P_{12}/1}$  en fonction des autres vitesses.

**B-4-** Déterminer graphiquement les vitesses  $\vec{V}_{P_{11}/1}$  et  $\vec{V}_{P_{12}/1}$

**B-5-** Déterminer graphiquement  $\vec{V}_{M_{2}/1}$ . Prendre  $\vec{V}_{P_{2}/1} = 22 \text{ cm/s}$

**B-6-** Donner la nature du mouvement de la flèche 3+4 par rapport à 1. En déduire la position du CIR  $(_{3+4})$ .

**B-7-** Déterminer graphiquement  $\vec{V}_{D_{4}/1}$ .

**CORRECTION DES PROBLÈMES  
GÉNÉRAUX DE STATIQUE ET  
CINÉMATIQUE**



Correction du thème N°1.....	13
Correction du thème N°2.....	20
Correction du thème N°3.....	26

## CORRECTION DU PROBLÈME N°1

**-A- STATIQUE :**

On prendra, Echelle des forces : 1cm ↔ 800N.

**-A.1- Proposons un ordre d'isolément des pièces du mécanisme :**

**4 - 8 - 5 - 3 - 2 - 1**

**-A.2- Equilibre du levier 4 :**

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}; \sum \vec{M}_J(\vec{F}_{ext}) = \vec{0}$$

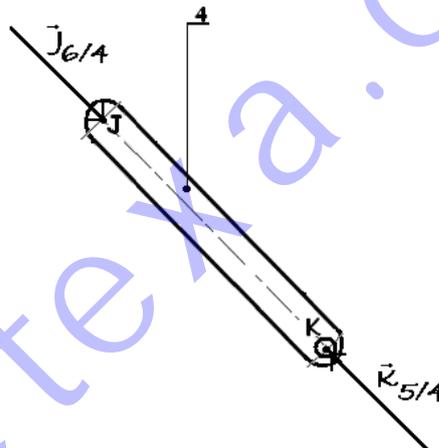
$$\Rightarrow \vec{J}_{6/4} + \vec{R}_{5/4} = \vec{0}$$

PFS :

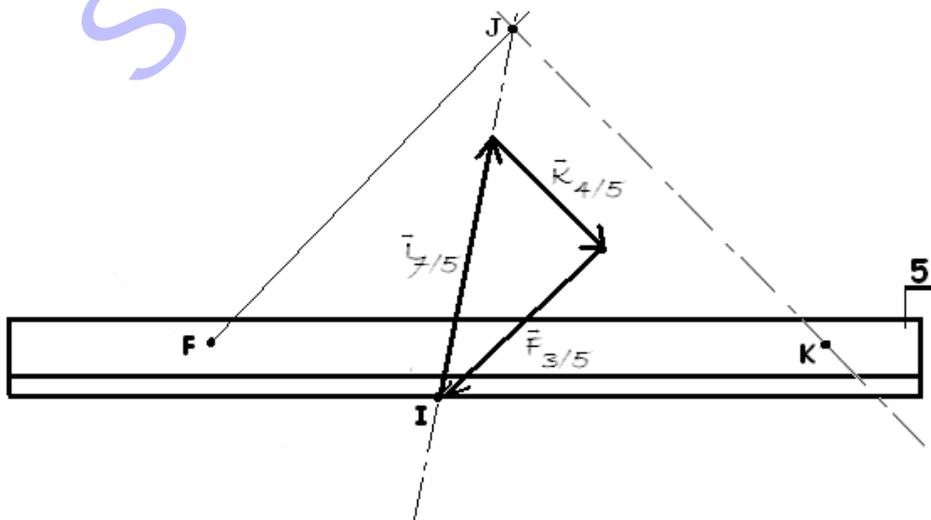
$$\Rightarrow \vec{J}_{6/4} = -\vec{R}_{5/4}$$

$$\Rightarrow \|\vec{J}_{6/4}\| = \|\vec{R}_{5/4}\|$$

D'où  $\vec{R}_{5/4}$  et  $\vec{J}_{6/4}$  ont même support, la droite (JK) mais de sens opposés.



**-A.3- Equilibre du couteau 5 :**



- A.3.1- Théorème d'un solide en équilibre sous l'action de trois forces :  
*Pour un solide soumis à l'action de 3 forces, soit les trois forces ont des directions parallèles, soit les directions des trois forces concourent vers un même point.*

- A.3.2- Déterminons graphiquement  $\vec{R}_{4/5}$  et  $\vec{F}_{3/5}$  :

$$\vec{F}_{3/5} \rightarrow 3,4\text{cm} \Rightarrow \|\vec{F}_{3/5}\| = 2720\text{N}$$

$$\vec{R}_{4/5} \rightarrow 2,2\text{cm} \Rightarrow \|\vec{R}_{4/5}\| = 1760\text{N}$$

- A.4- Equilibre du levier 3 :

- A.4.1- Bilan des forces extérieures:

Forces	Pt. d'Appl.	Direction	Sens	Module
$\vec{H}_{6/3}$	H	$\angle$	$\nearrow$	?
$\vec{E}_{8/3}$	E	$\angle$	$\searrow$	?
$\vec{D}_{2/3}$	D	$\angle$	$\swarrow$	?
$\vec{F}_{5/3}$	F	$\angle$	$\nearrow$	2800N

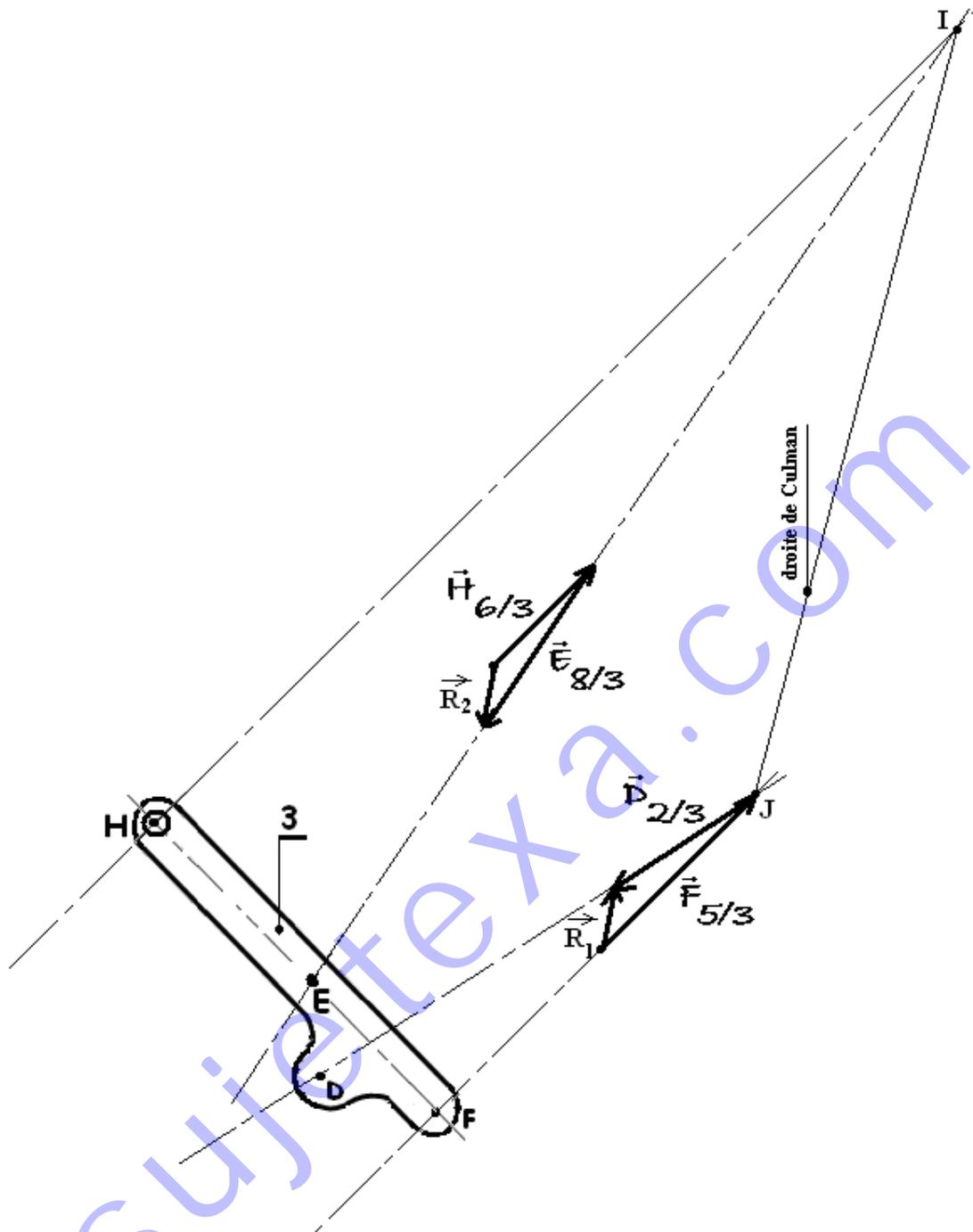
- A.4.2- Appliquons la méthode de Culman pour déterminer  $\vec{H}_{6/3}$ ;  $\vec{E}_{8/3}$  et  $\vec{D}_{2/3}$ .

On prendra :  $\|\vec{F}_{5/3}\| = 2800\text{N}$

$$\vec{H}_{6/3} \rightarrow 2\text{cm} \Rightarrow \|\vec{H}_{6/3}\| = 1600\text{N}$$

$$\vec{E}_{8/3} \rightarrow 2,8\text{cm} \Rightarrow \|\vec{E}_{8/3}\| = 2240\text{N}$$

$$\vec{D}_{2/3} \rightarrow 2,5\text{cm} \Rightarrow \|\vec{D}_{2/3}\| = 2000\text{N}$$



-A.4.3- Equilibre de la pièce 2 :

$\vec{D}_{2/3} = \vec{B}_{1/2}$  : Enonçons le principe qui justifie cette égalité :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{D}_{3/2} + \vec{B}_{1/2} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{D}_{3/2} = -\vec{B}_{1/2}$$

$$\text{Or } -\vec{D}_{3/2} = \vec{D}_{2/3}$$

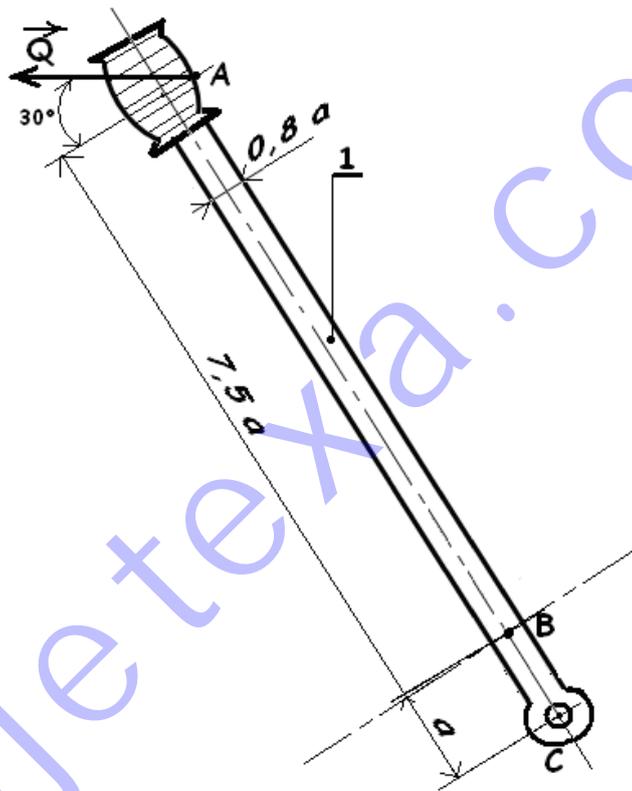
Donc :  $\vec{D}_{2/3} = \vec{B}_{1/2}$

-A.5- Equilibre du levier 1 :

-A.5.1- Bilan des forces extérieures:

Forces	Pt. d'Appl.	Direction	Sens	Module
$\vec{Q}$	A			?
$\vec{B}_{2/1}$	B			2000N
$\vec{C}_{6/1}$	C	?	?	?

-A.5.2- Calculons analytiquement les intensités de  $\vec{Q}$  et  $\vec{C}_{6/1}$  :



•  $\sum \vec{M}_{(C)} \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0}$

$$Q \cdot 7,5a \cdot \cos 30^\circ - B_{2/1} \cdot a = 0$$

$$\Rightarrow 6,495 \cdot Q \cdot a - B_{2/1} \cdot a = 0$$

$$\Rightarrow Q = \frac{B_{2/1}}{6,495} = \frac{2000}{6,495}$$

$$\Rightarrow Q = 307,92\text{N}$$

•  $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0}$

$$\begin{pmatrix} -Q \sin 30^\circ \\ -Q \cos 30^\circ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ B_{2/1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_x \\ C_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow C_x = -Q \sin 30^\circ \text{ et } C_y = Q \cos 30^\circ - B_{2/1}$$

$$\Rightarrow C_x = -Q \sin 30^\circ = 307,92 \sin 30^\circ = 153,96 \text{ N}$$

$$C_y = Q \cos 30^\circ - B_{2/1} = 307,92 \cos 30^\circ - 2000 = -1733,32 \text{ N}$$

$$\text{D'où: } \|\vec{C}_{6/1}\| = \sqrt{(153,96)^2 + (-1733,32)^2}$$

$$\text{Donc: } \|\vec{C}_{6/1}\| = 1740,144 \text{ N}$$

-A.6- Force de frottement du papier sur le couteau :

$$\sin 10^\circ = \frac{f}{l_{7/5}} \Rightarrow f = l_{7/5} \cdot \sin 10^\circ$$

$$\text{Donc: } f = 555,648 \text{ N}$$

-B- CINEMATIQUE :

-B.1- Comparons en justifiant les vecteurs vitesses suivants :

$$\text{a) } \vec{V}_{B1/6} \text{ et } \vec{V}_{B2/6} : \vec{V}_{F3/6} = \vec{V}_{F5/6}$$

$$\text{Donc: } \vec{V}_{B1/6} = \vec{V}_{B2/6}$$

$$\text{b) } \vec{V}_{D2/6} \text{ et } \vec{V}_{D3/6} : \vec{V}_{D3/6} = \vec{V}_{D3/2} + \vec{V}_{D2/6}; \text{ or } \vec{V}_{D3/2} = \vec{0}$$

$$\text{Donc: } \vec{V}_{D2/6} = \vec{V}_{D3/6}$$

$$\text{c) } \vec{V}_{F3/6} \text{ et } \vec{V}_{F5/6} : \vec{V}_{F3/6} = \vec{V}_{F3/5} + \vec{V}_{F5/6}; \text{ or } \vec{V}_{F3/5} = \vec{0}$$

$$\text{Donc: } \vec{V}_{F3/6} = \vec{V}_{F5/6}$$

-B.2- Nature du mouvement de 1 par rapport à 6 :

*Rotation de centre C*

-B.3- On prendra comme échelle des vitesses : 1cm ↔ 2 cm/s.

-B.3.1- Sachant que  $\|\vec{V}_{A1/6}\| = 15 \text{ cm/s}$ ,

Déterminons graphiquement  $\|\vec{V}_{B1/6}\|$  :

$$\vec{V}_{B1/6} \rightarrow 1 \text{ cm}; \text{ Donc: } \|\vec{V}_{B1/6}\| = 2 \text{ cm/s}$$

-B.3.2- Vérifions analytiquement le calcul de  $\|\vec{V}_{B1/6}\|$  :

$$\frac{\|\vec{V}_{A1/6}\|}{AC} = \frac{\|\vec{V}_{B1/6}\|}{BC} \Rightarrow \|\vec{V}_{B1/6}\| = \frac{BC}{AC} \|\vec{V}_{A1/6}\| = \frac{a}{7,5a} \cdot 15$$

$$\text{Donc: } \|\vec{V}_{B1/6}\| = 2 \text{ cm/s}$$

- B.4- Nature du mouvement de 3 par rapport à 6 :  
**Mouvement de rotation de centre H**  
 Nature du mouvement de 2 par rapport à 6 :  
**Mouvement plan général**
- B.5- CIR  $I_{2/6}$  : **Point de concours entre (BC) et (HD)**
- B.6- On donne les distances :  $BI_{2/6}=252$  mm et  $DI_{2/6}=255$  mm. Calculons le module du vecteur vitesse  $\vec{V}_{D2/6}$  :

$$\frac{\|\vec{V}_{B2/6}\|}{BI_{2/6}} = \frac{\|\vec{V}_{D2/6}\|}{DI_{2/6}} \Rightarrow \|\vec{V}_{D2/6}\| = \frac{DI_{2/6}}{BI_{2/6}} \|\vec{V}_{B2/6}\|$$

$$\|\vec{V}_{D2/6}\| = \frac{255}{252} \cdot 2 \quad \text{Donc : } \|\vec{V}_{D2/6}\| = 2,023 \text{ cm/s}$$

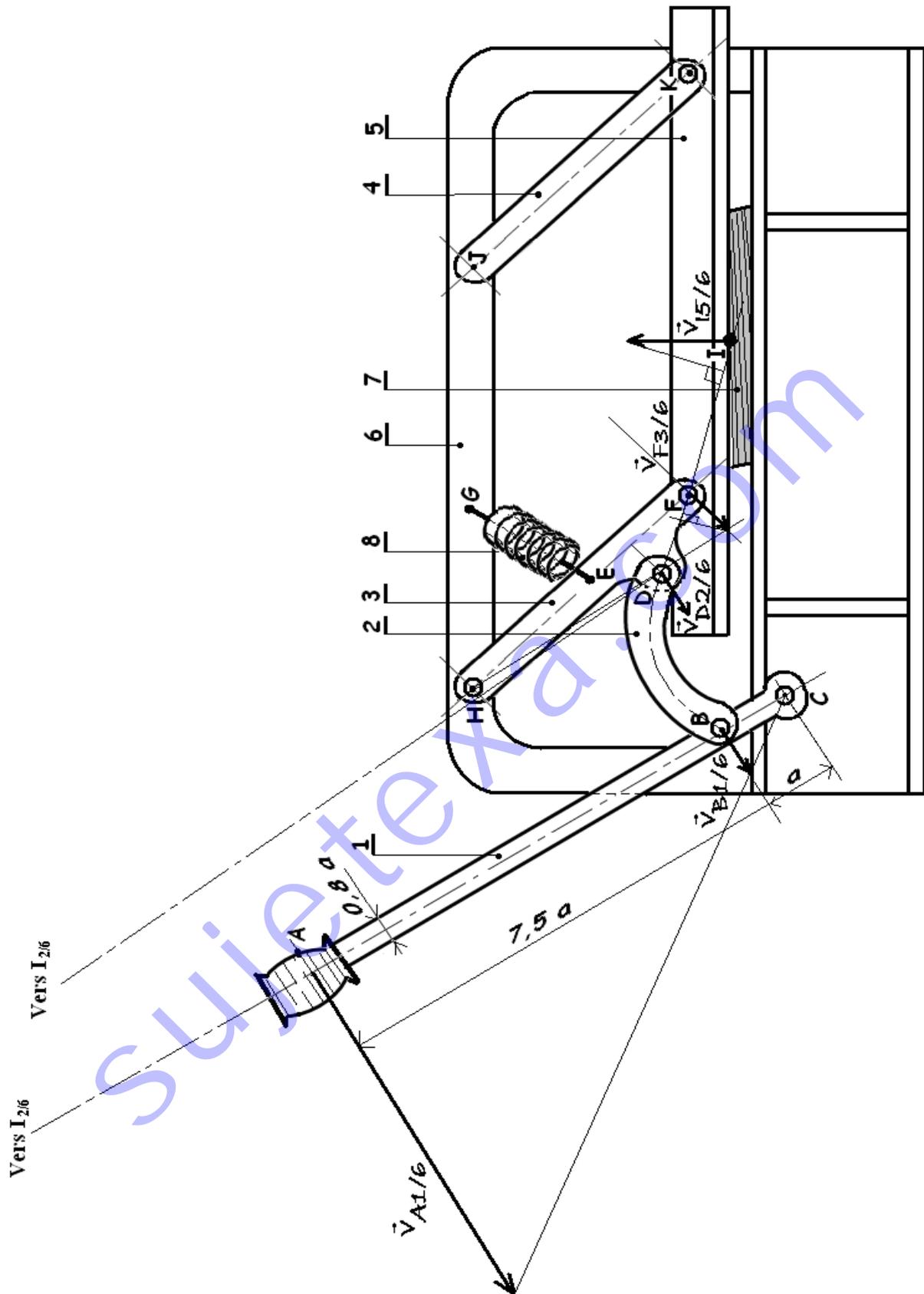
- B.7- On suppose que  $\|\vec{V}_{D3/6}\| = 2 \text{ cm/s}$ .

Déterminons graphiquement la vitesse  $\vec{V}_{F3/6}$  :

$$\vec{V}_{F3/6} \rightarrow 1,3 \text{ cm} \quad \text{Donc : } \|\vec{V}_{F3/6}\| = 2,6 \text{ cm/s}$$

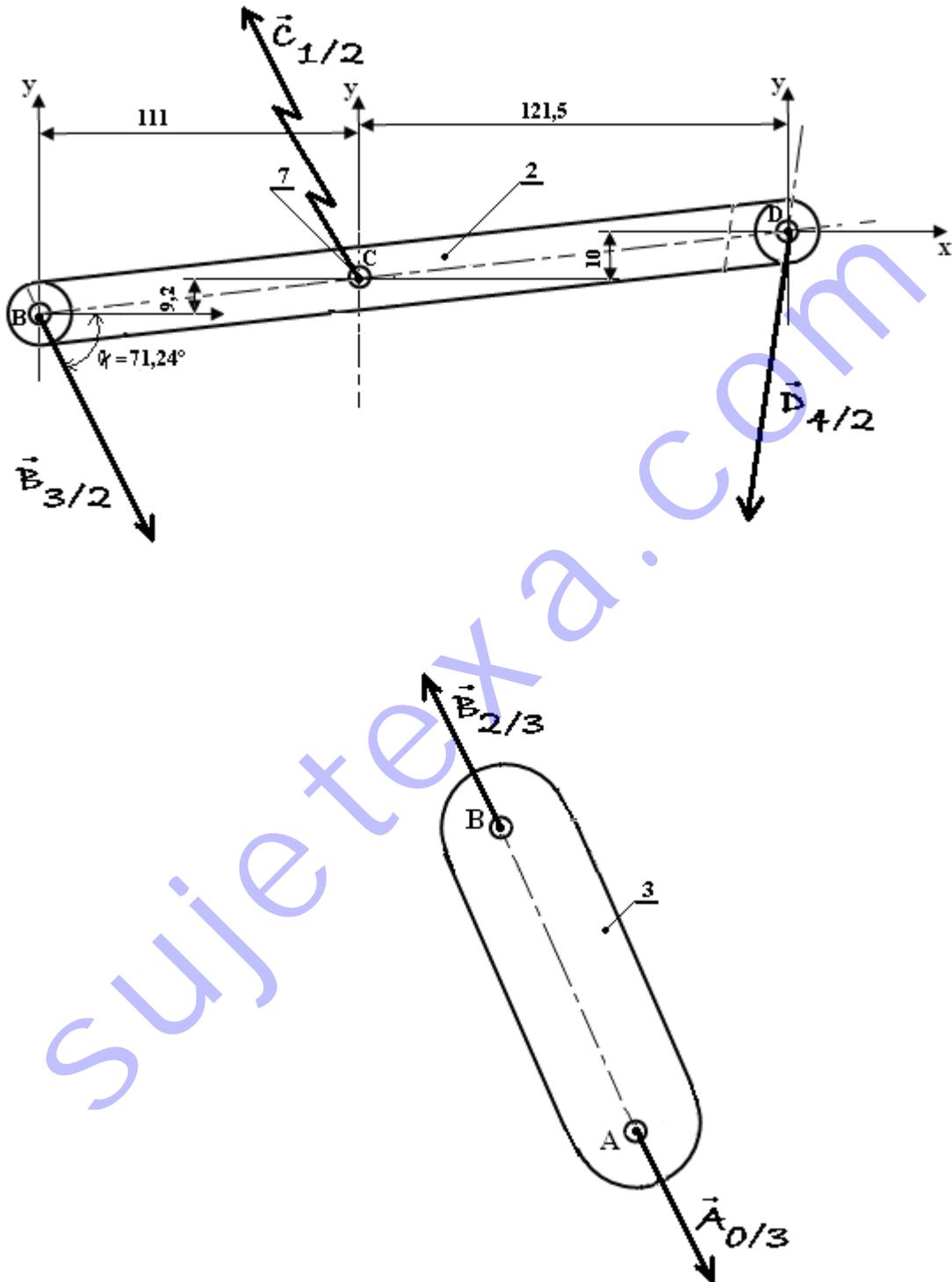
Déduisons  $\vec{V}_{15/6}$  :

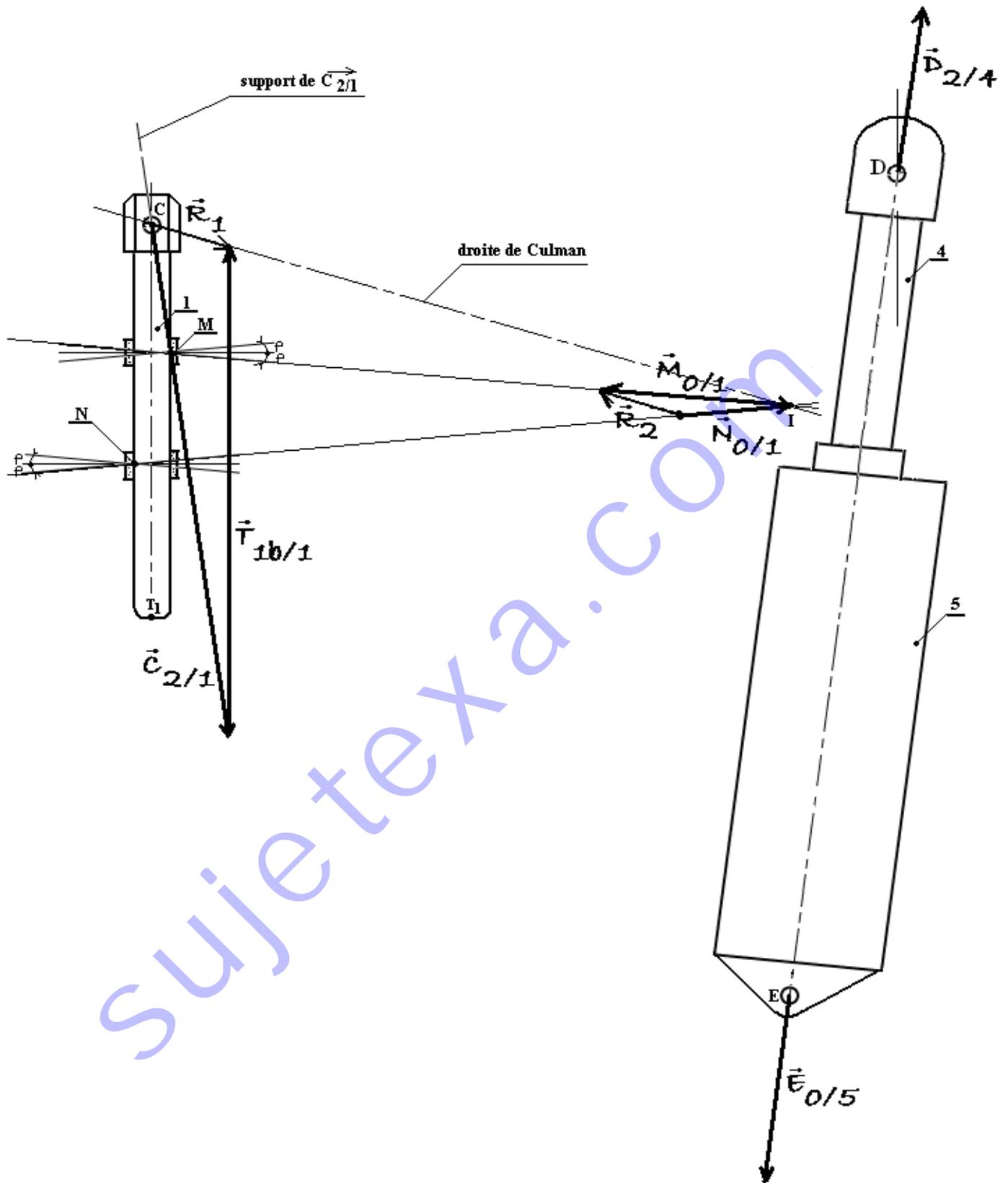
$$\text{Par équiprojectivité, } \vec{V}_{15/6} \rightarrow 2,5 \text{ cm} \quad \text{Donc : } \|\vec{V}_{15/6}\| = 5 \text{ cm/s}$$



## CORRECTION DU PROBLÈME N°2

A- Statique :





**A- Statique :****A.1- Etude de l'équilibre de 4+5 :**

4+5 étant isolés, appliquons le principe fondamental de la statique à son équilibre et en déduisons les droites d'action et les sens des efforts  $\vec{D}_{2/4}$  et  $\vec{E}_{0/5}$  :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \Rightarrow \vec{D}_{2/4} + \vec{E}_{0/5} = \vec{0}$$

P.F.S :

$$\Rightarrow \vec{D}_{2/4} = -\vec{E}_{0/5} \text{ et } \|\vec{D}_{2/4}\| = \|\vec{E}_{0/5}\|$$

Donc : Ces forces ont même support, la droite (DE).

**A.2- Etude de l'équilibre de 3 :**

3 étant isolé, appliquons le principe fondamental de la statique à son équilibre et déduisons les droites d'action et les sens des efforts  $\vec{B}_{2/3}$  et  $\vec{A}_{0/3}$ .

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \Rightarrow \vec{B}_{2/3} + \vec{A}_{0/3} = \vec{0}$$

P.F.S :

$$\Rightarrow \vec{B}_{2/3} = -\vec{A}_{0/3} \text{ et } \|\vec{B}_{2/3}\| = \|\vec{A}_{0/3}\|$$

Donc : Ces forces ont même support, la droite (AB).

**A.3- Etude de l'équilibre de 2 :**

**A.3.1-** 2 étant isolé, complétons le tableau du bilan des forces extérieures qui lui sont appliquées.

Forces	Pt. d'Appl.	Direction	Sens	Module
$\vec{D}_{4/2}$	D	$\beta$ ↑	↓ <sub><math>\beta</math></sub>	4000N
$\vec{C}_{1/2}$	C	?	?	?
$\vec{B}_{3/2}$	B	$\alpha$ ↘	↘ <sub><math>\alpha</math></sub>	?

**A.3.2-** Déterminons analytiquement les actions mécaniques  $\vec{B}_{3/2}$  et  $\vec{C}_{1/2}$  :

$$\vec{B}_{3/2} \begin{pmatrix} B_{3/2} \cdot \cos \alpha \\ -B_{3/2} \cdot \sin \alpha \end{pmatrix}; \vec{C}_{1/2} \begin{pmatrix} C_x \\ C_y \end{pmatrix}; \vec{D} \begin{pmatrix} -D_{4/2} \cdot \sin \beta \\ -D_{4/2} \cdot \cos \beta \end{pmatrix}$$

- $\sum M_{(C)} \vec{F}_{ext} = \vec{0}$

$$\begin{aligned}\vec{M}_{(C)} \vec{B}_{3/2} &= \vec{CB} \wedge \vec{B}_{3/2} = \begin{pmatrix} -111 \\ -9.2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} B_{3/2} \cdot \cos \alpha \\ -B_{3/2} \cdot \sin \alpha \end{pmatrix} \\ &= (105,103 \cdot B_{3/2} + 2,958 \cdot B_{3/2}) \vec{k} \\ &= (108,061 \cdot B_{3/2}) \vec{k}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{M}_{(C)} \vec{D}_{4/2} &= \vec{CD} \wedge \vec{D}_{4/2} = \begin{pmatrix} 121,5 \\ 10 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -535,944 \\ -3963,932 \end{pmatrix} \\ &= (-481617,738 + 5359,44) \vec{k} \\ &= (-476258,298) \vec{k}\end{aligned}$$

D'où :  $\vec{B}_{3/2} = \frac{476258,298}{108,061}$  donc :  $\|\vec{B}_{3/2}\| = 4407,30\text{N}$

•  $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0}$

$$\begin{pmatrix} B_{3/2} \cdot \cos \alpha \\ -B_{3/2} \cdot \sin \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_x \\ C_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -D_{4/2} \cdot \sin \beta \\ -D_{4/2} \cdot \cos \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow C_x = 535,944 - 1417,4 = -881,456\text{N}$$

$$\text{et : } C_y = 3963,932 + 4173,15 = 8137,082\text{N}$$

or :  $\vec{C}_{1/2} = \sqrt{C_x^2 + C_y^2}$  ; donc :  $\|\vec{C}_{1/2}\| = 8184,68\text{N}$

#### A.4- Etude de l'équilibre de 1 :

##### A.4.1- Tableau du bilan des forces extérieures qui lui sont appliquées.

Forces	Pt. d'Appl.	Direction	Sens	Module
$\vec{C}_{2/1}$	C			8100N
$\vec{M}_{0/1}$	M			?
$\vec{N}_{0/1}$	N			?
$\vec{T}_{10/1}$	T <sub>1</sub>			?

A.4.2- Méthode de CULMAN : Echelle :  $1\text{cm} \equiv 800\text{N}$ .

A partir de la droite de Culman passant par les deux points de concours des 4 forces et à partir des résultantes  $\vec{R}_1 = -\vec{R}_2$  (voir figure), par simple mesure on trouve les modules de ces 3 forces.

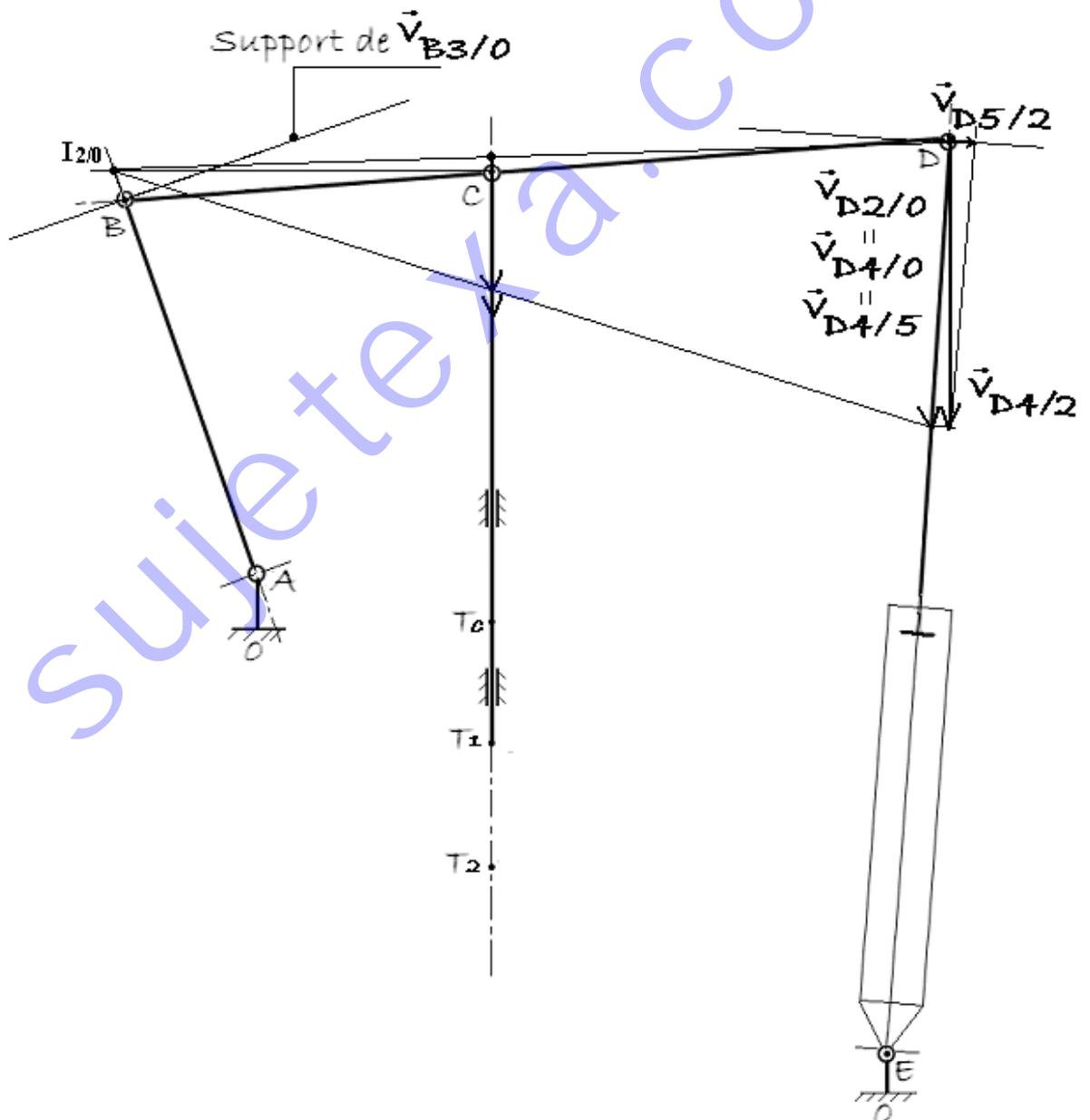
$$\vec{T}_{10/1} \rightarrow 10\text{cm}$$

$$\vec{M}_{0/1} \rightarrow 3\text{cm}$$

$$\vec{N}_{0/1} \rightarrow 1,8\text{cm}$$

Donc :  $\|\vec{T}_{10/1}\| = 8000\text{N}$     $\|\vec{M}_{0/1}\| = 2400\text{N}$     $\|\vec{N}_{0/1}\| = 1440\text{N}$

B- CINEMATIQUE : Figure 2



**B.1- Etude du mouvement de 1 par rapport à 0 :**

B.1.1- Nature du mouvement de la pièce 1 par rapport à 0 :

**Mouvement de Translation verticale**B.1.2- Positions extrêmes  $C_0$  et  $C_2$  du point C.

$$C_0C_2 = \text{course. Donc : } C_0C_2 = 8,6 \text{ cm}$$

B.1.3- Traçons le vecteur vitesse  $\vec{V}_{C1/0}$  sur la figure 2 :

$$\vec{V}_{C1/0} \rightarrow 2,25 \text{ cm. (voir figure 2)}$$

B.1.4- Comparons en justifiant les vecteurs vitesses  $\vec{V}_{C1/0}$  et  $\vec{V}_{C2/0}$  :

$$\vec{V}_{C1/0} = \vec{V}_{C1/2} + \vec{V}_{C2/0} \quad \text{or } \vec{V}_{C1/2} = \vec{0}$$

$$\text{Donc : } \vec{V}_{C1/0} = \vec{V}_{C2/0}$$

**B.2- Etude du mouvement de 3 par rapport à 0.**

B.2.1- Nature du mouvement de 3 par rapport à 0 :

**Rotation de centre A**B.2.2- Traçons la direction de la vitesse  $\vec{V}_{B3/0}$  :**Perpendiculaire à (AB). Voir figure 2.**B.2.3- Comparons en justifiant  $\vec{V}_{B3/0}$  et  $\vec{V}_{B2/0}$  :

$$\vec{V}_{B3/0} = \vec{V}_{B3/2} + \vec{V}_{B2/0} \quad \text{or } \vec{V}_{B3/2} = \vec{0}$$

$$\text{Donc : } \vec{V}_{B3/0} = \vec{V}_{B2/0}$$

**B.3- Etude du mouvement de 2 par rapport à 0.**B.3.1- Nature du mouvement de 2 par rapport à 0 : **Mouvement plan général**B.3.2- Position du centre instantané de rotation  $I_{2/0}$  : **Voir figure 2**B.3.3- Déduisons graphiquement le module de  $\vec{V}_{D2/0}$  :  $\|\vec{V}_{D2/0}\| = 85 \text{ mm/s}$ B.3.4- Montrons que  $\vec{V}_{D2/0} = \vec{V}_{D4/0}$  :

$$\vec{V}_{D2/0} = \vec{V}_{D2/4} + \vec{V}_{D4/0} \quad \text{or } \vec{V}_{D2/4} = \vec{0}$$

$$\text{Donc : } \vec{V}_{D2/0} = \vec{V}_{D4/0}$$

**B.4- Etude du mouvement du vérin 4+5 par rapport à 0.**

B.4.1- Nature du mouvement de 4 par rapport à 5 :

**Translation de direction DE. Voir figure pour tracé de  $\vec{V}_{D4/0}$** 

B.4.2- Nature du mouvement du corps de vérin 5 par rapport à 0 :

**Rotation de centre E. Voir figure pour tracé de  $\vec{V}_{D5/0}$** 

B.4.3- Relation de composition de vitesse en D entre 5, 4, et 2 :

$$\vec{V}_{D4/2} = \vec{V}_{D4/5} + \vec{V}_{D5/2}$$

Déduisons graphiquement la direction et le module de  $\vec{V}_{D4/5}$  :

$$\|\vec{V}_{D4/5}\| = 85 \text{ mm/s}$$

## CORRECTION DU PROBLÈME N°3

## A- ETUDE STATIQUE

• 1<sup>ère</sup> partie

A-1.1- condition de non basculement du véhicule :

$$\vec{P}_f + \vec{Q}_{\max i} \leq \vec{P}'$$

Soit :  $P_f + Q_{\max i} \leq P'$

A-1.2- poids maximal  $\|\vec{Q}_{\max i}\|$  de la charge à soulever :

on a :  $P_f + Q_{\max i} \leq P'$  et  $Q_{\max i} = P' - P_f$

$$\Rightarrow Q_{\max i} = 3000 - 1000$$

Donc :  $\|\vec{Q}_{\max i}\| = 2000 \text{ daN}$

A.1.3- Réactions du sol en H et K :

$$\vec{P}' \begin{pmatrix} 0 \\ -3000 \end{pmatrix}; \vec{P}_f \begin{pmatrix} 0 \\ -1000 \end{pmatrix}; \vec{Q} \begin{pmatrix} 0 \\ -1500 \end{pmatrix}; \vec{R} \begin{pmatrix} 0 \\ K \end{pmatrix}; \vec{H} \begin{pmatrix} 0 \\ H \end{pmatrix}$$

$$\sum M_{(H)} \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0}$$

$$3650K - 8250000 + 1350000 + 5175000 = 0$$

$$\Rightarrow K = \frac{8250000 - 1350000 - 5175000}{3650}$$

Donc :  $K = 472,60 \text{ daN}$

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -3000 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1000 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1500 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ K \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

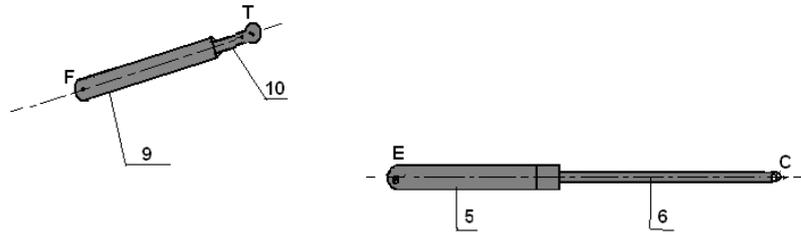
$$\Rightarrow K + H = 5500$$

$$\Rightarrow H = 5500 - K$$

Donc :  $H = 5027,397 \text{ daN}$

• 2<sup>ème</sup> partie

A-2.1- Isolons les vérins 5+6 et 9+10



PFS :

$$\vec{F}_{2/9} + \vec{T}_{3/10} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \|\vec{F}_{2/9}\| = \|\vec{T}_{3/10}\|$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{2/9} = -\vec{T}_{3/10}$$

$$\vec{E}_{3/5} + \vec{C}_{4/6} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \|\vec{E}_{3/5}\| = \|\vec{C}_{4/6}\|$$

$$\Rightarrow \vec{E}_{3/5} = -\vec{C}_{4/6}$$

Support de l'action mécanique en E : **Droite (EC)**

Support de l'action mécanique en T : **Droite (ET)**

A-2.2- Isolons l'ensemble de la flèche (3+4+5+6+7+8)

A-2.2.1- Tableau bilan des forces extérieures

Forces	Pt. d'Appl	Direction	Sens	Module
$\vec{M}_{2/3}$	M	?	?	?
$\vec{T}_{10/3}$	T			?
$\vec{P}_f$	G			1000daN
$\vec{Q}$	D			2000daN

A-2.2.2- Position de  $\vec{R}$  résultante de  $\vec{Q}$  et  $\vec{P}_f$  par rapport au point G :

$$P_f \cdot G_I - Q \cdot D_I = 0; \text{or, } D_I = DG - G_I$$

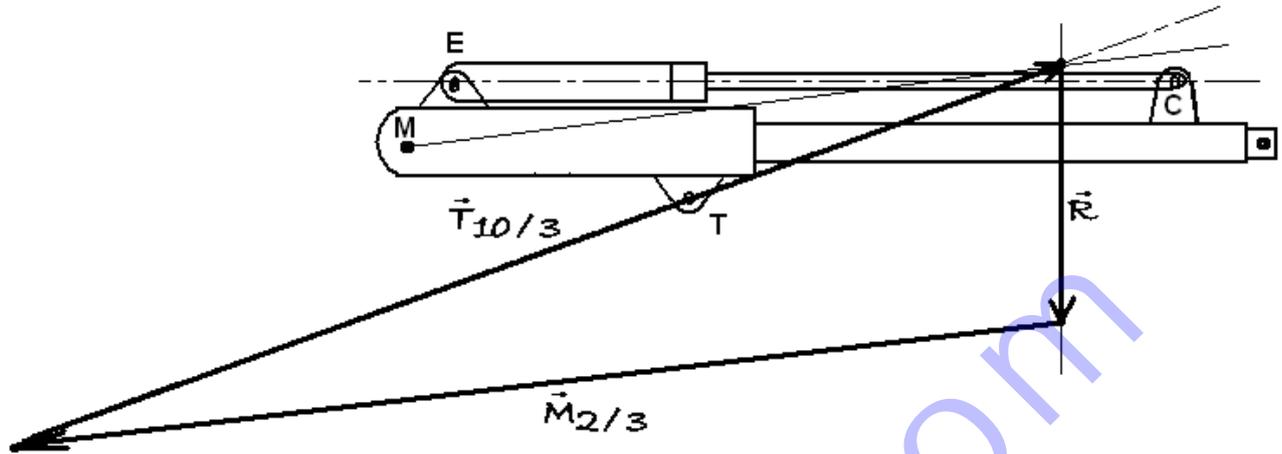
$$\Rightarrow P_f \cdot G_I - Q \cdot DG + Q \cdot G_I = 0$$

$$\Rightarrow G_I (P_f + Q) = Q \cdot DG$$

$$\Rightarrow G_I = \frac{Q \cdot DG}{P_f + Q}$$

$$\Rightarrow G_I = \frac{2000 \cdot 2100}{3000} \quad \text{Donc : } G_I = 1400\text{mm}$$

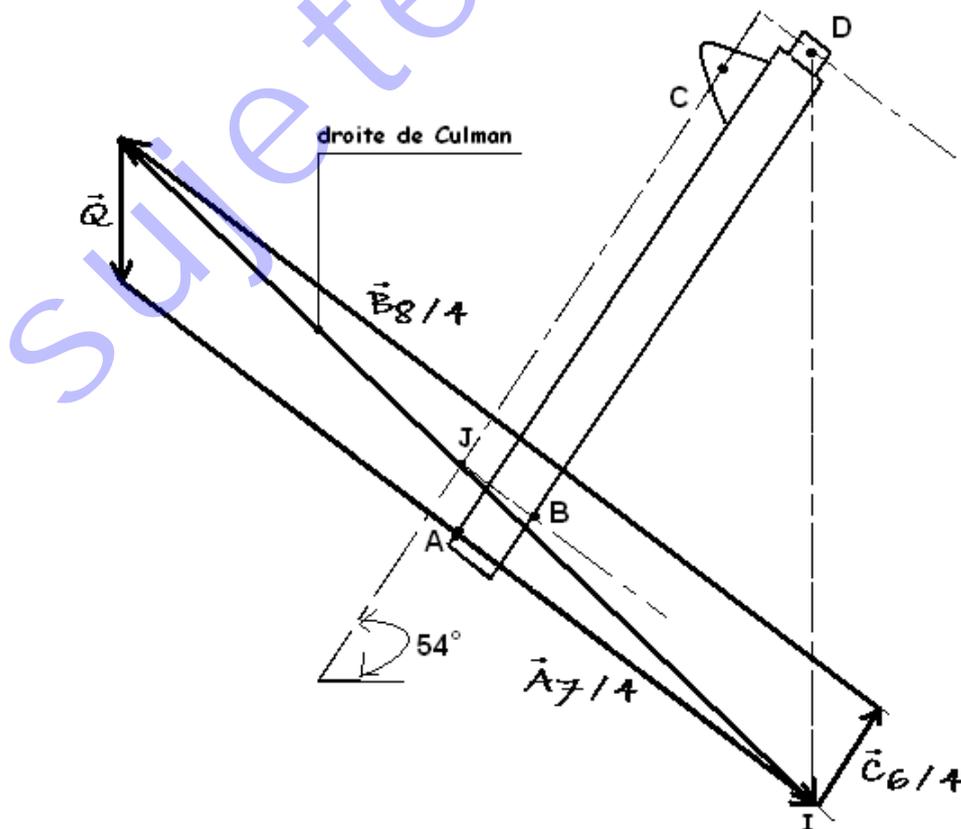
A-2.2.3- Détermination graphique des actions mécaniques en M et T :



$\vec{T}_{10/3} \rightarrow 14\text{cm}$ ; Donc  $\|\vec{T}_{10/3}\| = 14000\text{daN}$

$\vec{M}_{2/3} \rightarrow 13,25\text{cm}$ ; Donc  $\|\vec{M}_{2/3}\| = 13250\text{daN}$

A-2.3- Isolons l'ensemble 4+7 en position relevée



## A-2.3.1- Tableau bilan des forces extérieures:

Forces	Pt. d'Appl.	Direction	Sens	Module
$\vec{A}_{7/4}$	A			?
$\vec{B}_{8/4}$	B			?
$\vec{C}_{6/4}$	C			?
$\vec{Q}$	D			2000daN

A-2.3.2- En appliquant la méthode de Culman, déterminons les actions mécaniques en A ; B et C

$$\vec{B}_{8/4} \rightarrow 12,7\text{cm}$$

$$\vec{C}_{6/4} \rightarrow 1,8\text{cm}$$

$$\vec{A}_{7/4} \rightarrow 11,5\text{cm}$$

$$\|\vec{B}_{8/4}\| = 12700\text{daN} \quad \|\vec{C}_{6/4}\| = 1800\text{daN}$$

$$\|\vec{A}_{7/4}\| = 11500\text{daN}$$

- **ETUDE CINEMATIQUE**

B-1- Nature du mouvement de 12 par rapport à 11 :

Translation rectiligne d'axe PR.

Déterminons et traçons le vecteur vitesse  $\vec{V}_{P_{12}/11}$  :

$$\|\vec{V}_{P_{12}/11}\| = 20\text{cm/s} \text{ (voir figure 4)}$$

B-2-

a) Nature du mouvement de 2 par rapport à 1 :

Rotation de centre N

Nature du mouvement de 12 par rapport à 1 :

Rotation de centre R

Support de  $\vec{V}_{P_{2/1}}$  : (voir figure 4)

Support de  $\vec{V}_{P_{12/1}}$  : (voir figure 4)

b) Justifions l'égalité suivante :  $\vec{V}_{P2/1} = \vec{V}_{P12/1}$  :

$$\vec{V}_{P2/1} = \vec{V}_{P2/12} + \vec{V}_{P12/1} \text{ or } \vec{V}_{P2/12} = \vec{0} \text{ car P est le point}$$

coïncidant de 2 et 12. Donc :  $\vec{V}_{P2/1} = \vec{V}_{P12/1}$

**B-3-** Relation de composition des vitesses au point P :

$$\vec{V}_{P12/1} = \vec{V}_{P12/11} + \vec{V}_{P11/1}$$

Avec :  $\vec{V}_{P12/1} = \vec{V}_{P2/1}$  et  $\vec{V}_{P11/1} = \vec{V}_{P12/1}$

**B-4-** Détermination graphique des vitesses  $\vec{V}_{P11/1}$  et  $\vec{V}_{P12/1}$  :

$$\|\vec{V}_{P11/1}\| = 7 \text{ cm/s} \quad \|\vec{V}_{P12/1}\| = 21 \text{ cm/s}$$

**B-5-** Détermination graphique de  $\vec{V}_{M2/1}$ .

Prendre  $\vec{V}_{P2/1} = 22 \text{ cm/s}$

$$\|\vec{V}_{M2/1}\| = 34 \text{ cm/s}$$

**B-6-** Nature du mouvement de la flèche 3+4 par rapport à 1 :

Rotation de centre N

Position du CIR(3+4): N

**B-7-** Détermination graphique de  $\vec{V}_{D4/1}$ .

$$\|\vec{V}_{D4/1}\| = 90 \text{ cm/s}$$

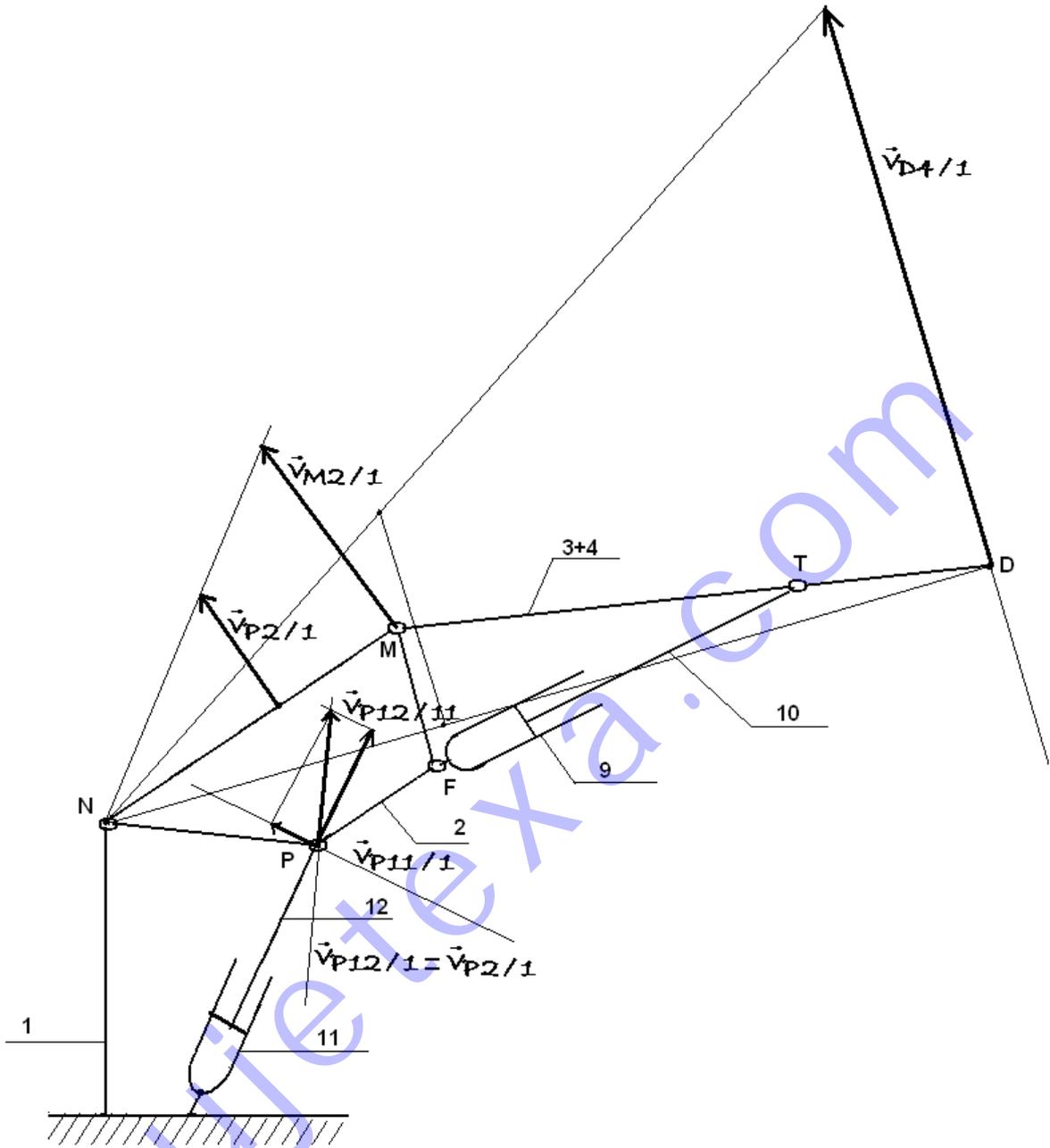
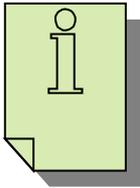
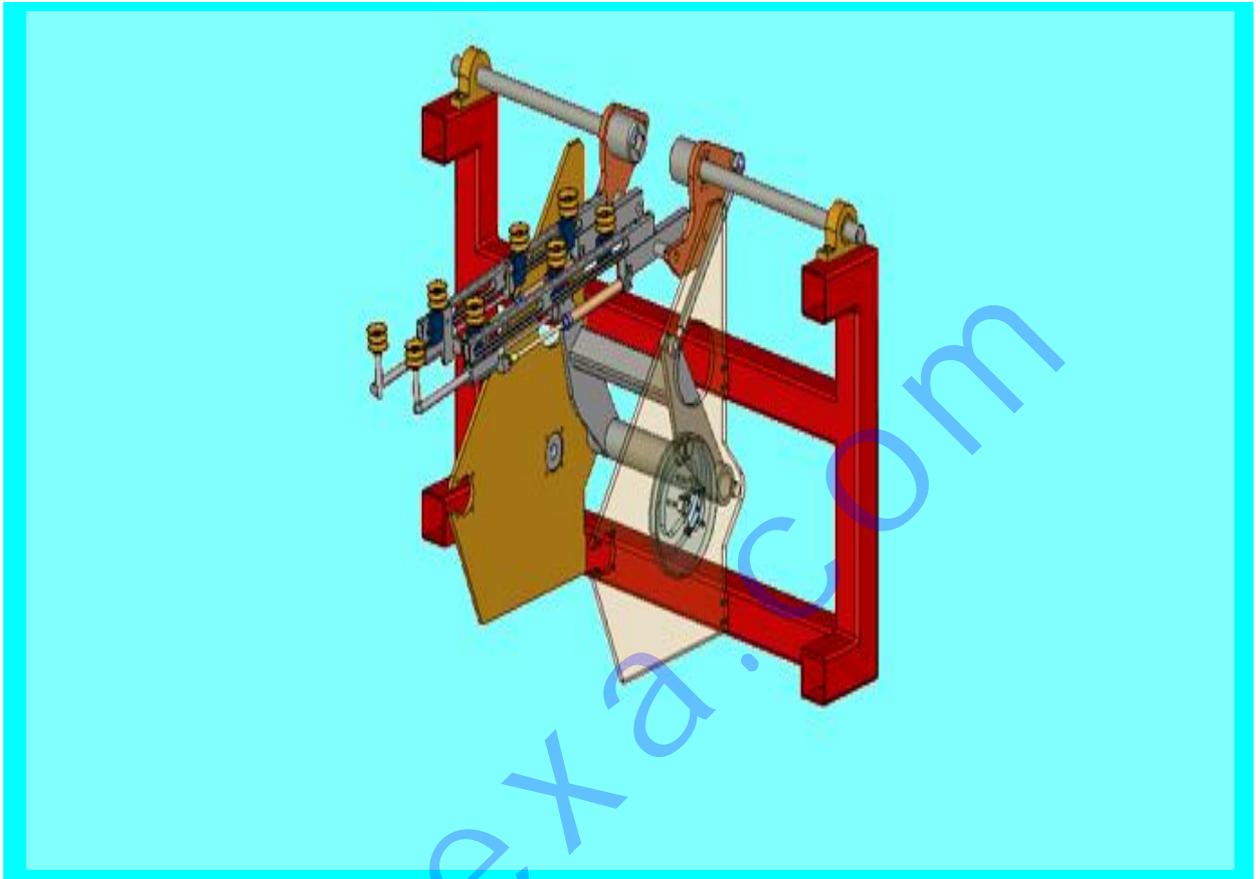


FIG 4



## RESISTANCE DES MATERIAUX



Au dix-huitième siècle, c'est Lagrange et Hamilton qui construisent la mécanique analytique qui donne aux principes posés par leurs prédécesseurs une forme définitive lorsqu'Euler étudie la mécanique du solide sur laquelle doit s'appuyer le développement technique et industriel du dix-neuvième siècle.

<b>Chapitre 1 : Rappels sur la RDM.....</b>	<b>33</b>
<b>Chapitre 2 : Centre d'inertie, Moment statique, Moment quadratique.....</b>	<b>35</b>
<b>Chapitre 3 : Flexion simple.....</b>	<b>42</b>
<b>Chapitre 4 : Torsion simple.....</b>	<b>51</b>
<b>Problèmes pratiques sur la RDM : .....</b>	<b>57</b>



## Chapitre 1

## Rappels sur la RDM

## 1- Tableau récapitulatif des sollicitations :

Sollicitations	Efforts				Illustrations
	N	T	M t	M f	
<i>Traction simple</i>	> 0	0	0	0	
<i>Compression simple</i>	< 0	0	0	0	
<i>Cisaillement simple</i>	0	≠ 0	0	0	
<i>Flexion simple</i>	0	≠ 0	0	≠ 0	
<i>Torsion simple</i>	0	0	≠ 0	0	

## 2- Traction-Compression simple:

$$\{\tau_{\text{coh}}\} = G \begin{cases} N \neq 0 & Mt = 0 \\ Ty = 0 & Mfy = 0 \\ Tz = 0 & Mfz = 0 \end{cases} (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$$

Condition de résistance :  $\sigma_x \leq Rpe$  ; Or  $\sigma_x = \left| \frac{N}{S} \right|$  et  $Rpe = \frac{Re}{s}$

- N = Effort normal en N
- S = Surface soumise à la traction ou à la compression en  $\text{mm}^2$  ou en  $\text{m}^2$
- Re = Résistance élastique en traction ou en compression en  $\text{N}/\text{mm}^2 = \text{Mpa}$
- Rpe = Résistance pratique élastique en traction ou en compression en  $\text{N}/\text{mm}^2 = \text{Mpa}$
- s = Coefficient de sécurité
- $\sigma_x$  = Contrainte élastique en traction ou en compression en  $\text{N}/\text{mm}^2 = \text{Mpa}$

**3- Cisaillement simple :**

$$\{\tau_{\text{coh}}\} = G \begin{cases} N = 0 & Mt = 0 \\ Ty \neq 0 & Mfy = 0 \\ Tz \neq 0 & Mfz = 0 \end{cases} (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$$

**Condition de résistance :**

$$\tau_{xy} \leq \tau_p$$

$$; \text{ Or } \tau_{xy} = \left| \frac{T}{n.S} \right| \text{ et } \tau_p = \left| \frac{\tau_e}{s} \right| ; \tau_e = \frac{Re}{2}$$

- $T = \sqrt{Ty^2 + Tz^2}$  = Effort tranchant en N
- $S$  = Surface soumise au cisaillement en  $\text{mm}^2$  ou en  $\text{m}^2$
- $n$  = nombre de surfaces soumises au cisaillement.
- $\tau_e$  = Résistance élastique au cisaillement en  $\text{N/mm}^2 = \text{Mpa}$
- $\tau_p$  = Résistance élastique pratique au cisaillement en  $\text{N/mm}^2 = \text{Mpa}$
- $\tau_{xy}$  = Contrainte élastique au cisaillement en  $\text{N/mm}^2 = \text{Mpa}$

**L'ESSENTIEL**



## Chapitre 2 Centre d'inertie, Moment statique, Moment quadratique



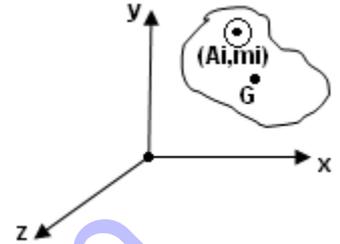
### Objectif:

Être prédisposé à l'étude de la torsion et de la flexion, et retenir quelques résultats relatifs aux sections des formes géométriques simples.

#### 1- Centre de gravité:

##### 1.1- Centre d'inertie :

Soit le système matériel (S) qu'on peut décomposer en sous systèmes ponctuels  $A_i$  de masse  $m_i$ . On appelle centre d'inertie du système matériel (S) le barycentre  $G$  de tous les éléments  $(A_i, m_i)$  qui constituent le système matériel (S).



$$\begin{aligned} \bullet \sum m_i \cdot \overrightarrow{OA_i} = M \cdot \overrightarrow{OG} &\Rightarrow \begin{cases} X_G = \frac{\sum m_i \cdot x_i}{M} \\ Y_G = \frac{\sum m_i \cdot y_i}{M} \\ Z_G = \frac{\sum m_i \cdot z_i}{M} \end{cases} \\ \bullet \sum m_i \cdot \overrightarrow{OA_i} = M \cdot \overrightarrow{OG} &\Rightarrow \begin{cases} X_G = \frac{\sum v_i \cdot x_i}{V} \\ Y_G = \frac{\sum v_i \cdot y_i}{V} \\ Z_G = \frac{\sum v_i \cdot z_i}{V} \end{cases} \text{ Car } \varphi = \frac{m}{v} \text{ et } m = \varphi \cdot v \\ \bullet \sum m_i \cdot \overrightarrow{OA_i} = M \cdot \overrightarrow{OG} &\Rightarrow \begin{cases} X_G = \frac{\sum S_i \cdot x_i}{S} \\ Y_G = \frac{\sum S_i \cdot y_i}{S} \\ Z_G = \frac{\sum S_i \cdot z_i}{S} \end{cases} \text{ Car } S = \frac{V}{e} \text{ et } V = S \cdot e \end{aligned}$$

##### 1.2- Centre de gravité :

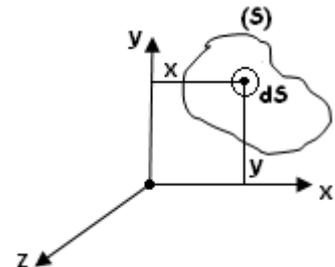
Si  $\|\vec{g}\|$  est constante en tout point du système matériel (S), alors le centre de gravité du système est confondu à son centre d'inertie.

#### 2- Moment statique d'une surface plane par rapport à un axe de son plan :

##### 2.1- Définition :

Soient un point  $M \in (S)$  de coordonnées  $(x, y)$  et  $dS$  une surface élémentaire de  $S$  entourant  $M$ ; On définit le moment statique élémentaire de  $dS$  par rapport à  $Ox$  noté  $dW_{Ox}$  par :

$$dW_{Ox} = y \cdot dS \Rightarrow W_{Ox} = \int_{(S)} y \cdot dS$$



##### 2.2- Propriétés :

$$W_{Ox} = \sum_{i=1}^n Y_{Gi} \cdot S_i = Y_{G1} \cdot S_1 + Y_{G2} \cdot S_2 + \dots + Y_{Gn} \cdot S_n$$

$$W_{Ox} = Y_G \cdot S$$

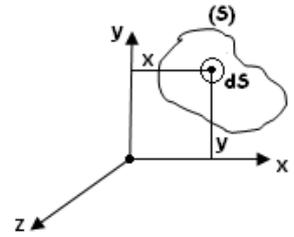
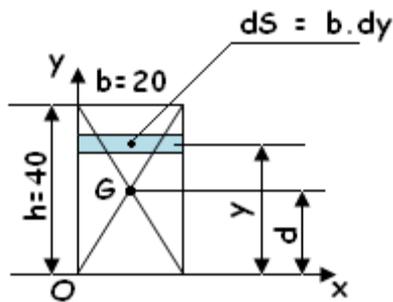
$$\begin{cases} W_{Ox} > 0 \text{ si } Y_G > 0 \\ W_{Ox} < 0 \text{ si } Y_G < 0 \end{cases}$$

**3- Moment quadratique d'une surface plane par rapport à un axe de son plan :****3.1- Définition :**

Soient un point  $M \in (S)$  de coordonnées  $(x,y)$  et  $dS$  une surface élémentaire de  $S$  entourant  $M$ ; le moment quadratique élémentaire de  $dS$  par rapport à  $Ox$  noté  $dIOx$  est défini par :  $dIOx = y^2 \cdot dS$

$$\Rightarrow I_{Ox} = \int_{(S)} y^2 \cdot dS \quad \text{Pour la surface (S)}$$

$I_{Ox} > 0$  et s'exprime en  $mm^2$

**3.1- Exemple de calcul du moment quadratique d'une surface par rapport à  $Ox$  :**

$$\text{On a } I_{Ox} = \int_{(S)} y^2 \cdot dS$$

$$\Rightarrow I_{Ox} = \int_{(S)} y^2 \cdot b \cdot dy$$

$$\Rightarrow I_{Ox} = b \int_{(S)} y^2 \cdot dy$$

$$\Rightarrow I_{Ox} = b \left[ \frac{1}{3} y^3 \right]_0^h$$

$$\Rightarrow I_{Ox} = b \left( \frac{1}{3} h^3 \right) - 0$$

$$\Rightarrow I_{Ox} = \frac{bh^3}{3}$$

A.N :

$$I_{Ox} = \frac{20 \times 40^3}{3}$$

Donc :

$$I_{Ox} = 426666,67 \text{ mm}^2$$

**3.2- Théorème de Huygens :****3.3.1- Enoncé :**

Le moment quadratique d'une surface par rapport à un axe quelconque de son plan est égal au moment quadratique de cette surface par rapport à un axe parallèle au précédent et passant par le centre de gravité de la surface, augmenté du produit de l'aire de cette surface par le carré de la distance qui sépare les deux axes.

On a :

$$I_{Ox} = I_{Gx} + S \cdot d^2$$

**3.3.2- Exemple :**

Pour le cas précédent, on a :

$$I_{Ox} = I_{Gx} + S \cdot d^2$$

$$\Rightarrow I_{Gx} = I_{Ox} - S \cdot d^2$$

Avec  $S = B \cdot h$  et  $d = \frac{h}{2}$

$$\text{D'où } I_{Gx} = \frac{bh^3}{3} - b \cdot h \cdot \frac{h^2}{4}$$

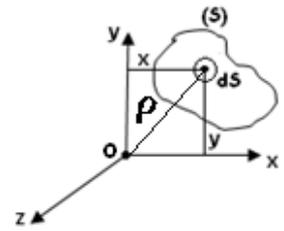
Donc :

$$I_{Gx} = \frac{bh^3}{12}$$

#### 4- Moment quadratique polaire :

##### 4.1- Définition :

Soient un point  $M \in (S)$  de coordonnées  $(x,y)$  et  $dS$  une surface élémentaire de  $S$  entourant  $M$  ; le moment quadratique polaire élémentaire  $dI_o$  par rapport à  $Oz$  perpendiculaire en  $O$  au plan  $(O,x,y)$  est défini par :



$$dI_o = \rho^2 \cdot dS \quad \Rightarrow \quad I_o = \int_{(S)} \rho^2 \cdot dS \quad \text{Pour la surface (S)}$$

$$\text{On a } \rho^2 = x^2 + y^2 \quad \Rightarrow \quad I_o = \int_{(S)} x^2 \cdot dS + \int_{(S)} y^2 \cdot dS$$

$$\Rightarrow \quad I_o = I_{ox} + I_{oy}$$

##### 4.2- Exemple :

$$I_o = I_{ox} + I_{oy}$$

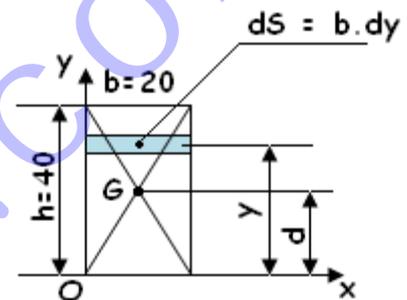
Avec

$$I_{ox} = \frac{bh^3}{3} \quad \text{et} \quad I_{oy} = \frac{hb^3}{3}$$

$$\text{D'où } I_o = \frac{bh^3}{3} + \frac{hb^3}{3}$$

$$I_o = \frac{b \cdot h(h^2 + b^2)}{3}$$

$$\text{Donc : } I_o = 533333.333 \text{ mm}^4$$



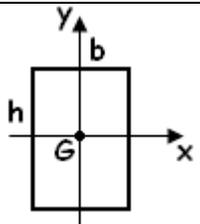
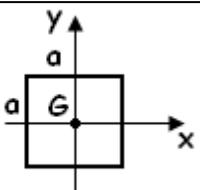
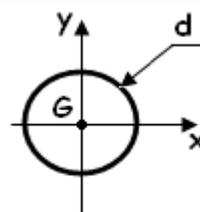
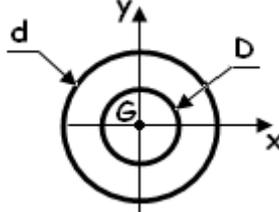
En appliquant le théorème de Huygens, on aura :

$$I_{Gx} = I_{ox} - S \cdot d^2; \quad \text{soit} \quad I_{Gx} = \frac{bh^3}{12} \quad \text{et} \quad I_{Gy} = I_{oy} - S \cdot d^2; \quad \text{soit} \quad I_{Gy} = \frac{hb^3}{12}$$

$$I_G = I_{Gx} + I_{Gy} \quad \Rightarrow \quad I_G = \frac{b \cdot h(h^2 + b^2)}{12}$$

$$\text{Donc : } I_G = 133333.333 \text{ mm}^4$$

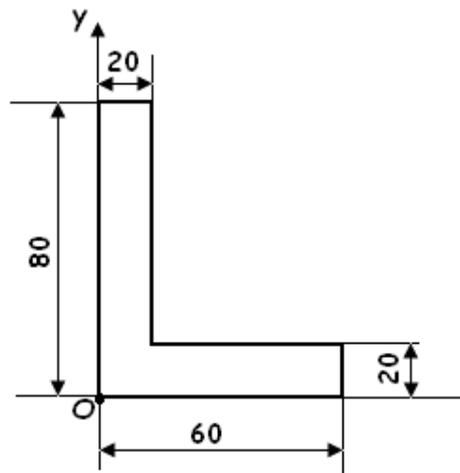
5- Moments quadratiques à connaître :

Surfaces	Moment quadratique par rapport à $Gx$ : $I_{Gx}$	Moment quadratique par rapport à $Gy$ : $I_{Gy}$	Moment quadratique polaire : $I_G$
	$I_{Gx} = \frac{bh^3}{12}$	$I_{Gy} = \frac{hb^3}{12}$	$I_G = \frac{b \cdot h(h^2 + b^2)}{12}$
	$I_{Gx} = \frac{a^4}{12}$	$I_{Gy} = \frac{a^4}{12}$	$I_G = \frac{a^4}{6}$
	$I_{Gx} = \frac{\pi \cdot d^4}{64}$	$I_{Gy} = \frac{\pi \cdot d^4}{64}$	$I_G = \frac{\pi \cdot d^4}{32}$
	$I_{Gx} = \frac{\pi \cdot (D^4 - d^4)}{64}$	$I_{Gy} = \frac{\pi \cdot (D^4 - d^4)}{64}$	$I_G = \frac{\pi \cdot (D^4 - d^4)}{32}$

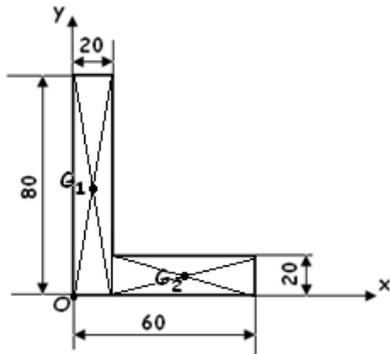


**Application résolue**

Soit la surface plane ci-dessous ; Déterminer  $W_{Ox}$  ;  $W_{Oy}$  ;  $I_{Gx}$  ;  $I_{Gy}$  et  $I_G$ .



**Solution :**



On a:  $W_{Ox} = \sum_{i=1}^n Y_{Gi} \cdot S_i = Y_{G1} \cdot S_1 + Y_{G2} \cdot S_2 + \dots + Y_{Gn} \cdot S_n$

$S_1 = 20 \times 80 = 1600 \text{ mm}^2$

$S_2 = 20 \times 40 = 800 \text{ mm}^2$

$G_1 \begin{pmatrix} X_{G1} = 10 \\ Y_{G1} = 40 \end{pmatrix}$  et  $G_2 \begin{pmatrix} X_{G2} = 40 \\ Y_{G2} = 10 \end{pmatrix}$

$W_{Ox} = Y_{G1} \cdot S_1 + Y_{G2} \cdot S_2 = 40 \times 1600 + 10 \times 800$

Donc :  $W_{Ox} = 72\,000 \text{ mm}^4$

$W_{Oy} = X_{G1} \cdot S_1 + X_{G2} \cdot S_2 = 10 \times 1600 + 40 \times 800$

Donc :  $W_{Oy} = 48\,000 \text{ mm}^4$

On sait que :  $W_{Ox} = Y_G \cdot S$  et  $W_{Oy} = X_G \cdot S$

$\Rightarrow X_G = \frac{W_{Oy}}{S}$ ; Soit  $X_G = \frac{48000}{1600+800}$ ; Donc :  $X_G = 20 \text{ mm}$

$\Rightarrow Y_G = \frac{W_{Ox}}{S}$ ; Soit  $Y_G = \frac{72000}{1600+800}$ ; Donc :  $Y_G = 30 \text{ mm}$

$I_{Gx} = I_{1Gx} + I_{2Gx}$

Or  $I_{1Gx} = I_{G1x1} + S_1 \cdot d_1^2 = \frac{b_1 h_1^3}{12} + S_1 \cdot d_1^2 = \frac{20 \times 80^3}{12} + 1600 \times 10^2 = 1013333,333$

Et  $I_{2Gx} = I_{G2x2} + S_2 \cdot d_2^2 = \frac{b_2 h_2^3}{12} + S_2 \cdot d_2^2 = \frac{40 \times 20^3}{12} + 800 \times 20^2 = 346666,666$

Donc:

$I_{Gx} = 1360000 \text{ mm}^4$

De la même façon on trouvera :

$I_{Gy} = 640000 \text{ mm}^4$

$I_G = I_{Gx} + I_{Gy}$

Donc :

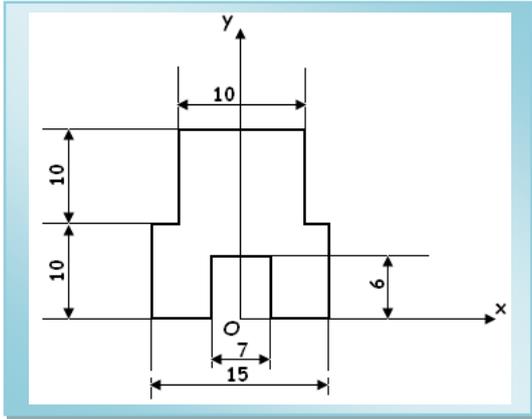
$I_G = 2000000 \text{ mm}^4$



**Consolidation**

Soit la surface plane ci-contre :

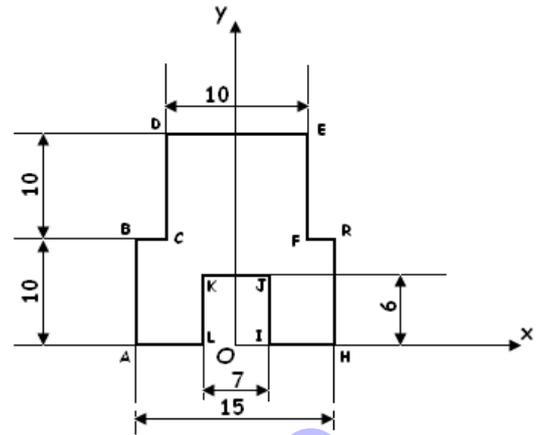
- 1- Déterminer la position du centre de gravité  $G$  de cette surface dans le repère  $(O, x, y)$ .
- 2- Déterminer le moment quadratique  $I_{Gx}$  de cette surface par rapport à l'axe  $Gx$  parallèle à  $Ox$ .
- 3- Déterminer le moment quadratique polaire  $I_G$  de cette surface par rapport à l'axe  $Gz$  perpendiculaire à son plan.



**Solution :**

1- On peut décomposer la surface en 3 :

- Rectangle (ABRH) :  $S_1 = 150 \text{ mm}^2$   
 $G_1 \begin{cases} X_{G1} = 0 \\ Y_{G1} = 5 \end{cases}$
- Rectangle (CDEF) :  $S_2 = 100 \text{ mm}^2$   
 $G_2 \begin{cases} X_{G2} = 0 \\ Y_{G2} = 15 \end{cases}$
- Rectangle (LKJI) :  $S_3 = 42 \text{ mm}^2$  (-)  
 $G_3 \begin{cases} X_{G3} = 0 \\ Y_{G3} = 3 \end{cases}$



D'où  $S = S_1 + S_2 - S_3 \Rightarrow S = 208 \text{ mm}^2$

$$\begin{cases} X_G = \frac{\sum S_i \cdot x_i}{S} = 0 \\ Y_G = \frac{\sum S_i \cdot y_i}{S} = \frac{150 \times 5 + 100 \times 15 - 42 \times 3}{208} = 10,21 \text{ mm} \end{cases}$$

Donc :

$$G \begin{cases} X_G = 0 \\ Y_G = 10,21 \text{ mm} \end{cases}$$

2-

On sait que

$$I_{Gix} = \frac{b_i \cdot h_i^3}{12}$$

D'où :

- $I_{G1x} = \frac{b_1 \cdot h_1^3}{12} = \frac{15 \times 10^3}{12} = 1250 \text{ mm}^4$
- $I_{G2x} = \frac{b_2 \cdot h_2^3}{12} = \frac{10 \times 10^3}{12} = 833,33 \text{ mm}^4$
- $I_{G3x} = \frac{b_3 \cdot h_3^3}{12} = \frac{7 \times 6^3}{12} = 126 \text{ mm}^4$

Par application du théorème de Huygens :

$$I_{iGx} = I_{Gix} + S_i \cdot d_i^2$$

Avec :

$$\begin{aligned} d_1 &= |OG_1 - OG| = |5 - 10,21| = 5,21 \text{ mm} \\ d_2 &= |OG_2 - OG| = |15 - 10,21| = 4,79 \text{ mm} \\ d_3 &= |OG_3 - OG| = |3 - 10,21| = 7,21 \text{ mm} \end{aligned}$$

D'où :

- $I_{1Gx} = I_{G1x} + S_1 \cdot d_1^2 = 1250 + 150 \times (5,21)^2 = 5321,61 \text{ mm}^4$
- $I_{2Gx} = I_{G2x} + S_2 \cdot d_2^2 = 833,33 + 100 \times (4,79)^2 = 3127,74 \text{ mm}^4$
- $I_{3Gx} = I_{G3x} + S_3 \cdot d_3^2 = 126 + 42 \times (7,21)^2 = 2309,33 \text{ mm}^4$

Si  $I_{Gx}$  est le moment quadratique de cette surface (S) par rapport à l'axe (Ox),

On a :  $I_{Gx} = I_{1Gx} + I_{2Gx} + I_{3Gx}$

$$\Rightarrow I_{Gx} = 5321,61 + 3127,74 + 2309,33$$

Donc:

$$I_{Gx} = 6140,02 \text{ mm}^4$$

De la même façon, on trouve:

$$I_{Gy} = 3474,33 \text{ mm}^4$$

3- Le moment quadratique polaire  $I_G$  de cette surface par rapport à l'axe  $Gz$  perpendiculaire à son plan est :

$$I_G = I_{Gx} + I_{Gy}$$

$$I_G = 6140,02 + 3474,33$$

Donc :

$$I_G = 9614,35 \text{ mm}^4$$



L'ESSENTIEL



Chapitre 3

La Flexion plane simple



Objectif:

Dimensionner les poutres soumises à la flexion plane simple

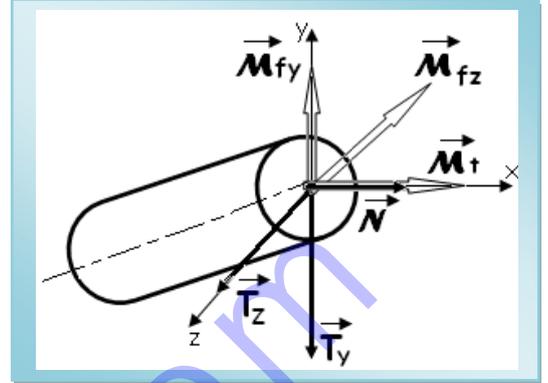
1- Généralités :

1.1- Définition :

En général, le torseur des forces extérieures qui agissent du même côté de la section considérée d'une poutre se définit par :

$$\{\tau\} = \begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{\mathcal{M}}_G \end{Bmatrix}$$

Avec :  $\vec{R} \begin{pmatrix} N \\ T_y \\ T_z \end{pmatrix}$  et  $\vec{\mathcal{M}}_G \begin{pmatrix} M_t \\ M_{fy} \\ M_{fz} \end{pmatrix}$



Pour la flexion simple, on a :

$$\vec{R} \begin{pmatrix} 0 \\ T_y \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{\mathcal{M}}_G \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M_{fz} \end{pmatrix} \text{ ou } \vec{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ T_z \end{pmatrix} \text{ et } \vec{\mathcal{M}}_G \begin{pmatrix} 0 \\ M_{fy} \\ 0 \end{pmatrix}$$

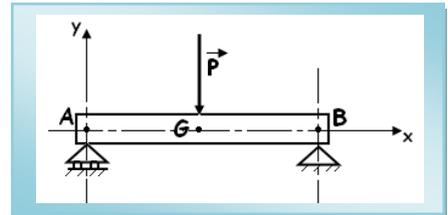
1.2- Hypothèses :

a) Hypothèses sur les forces :

Toutes les forces sont verticales et situées dans le plan de symétrie de la poutre. Elles peuvent être concentrées ou réparties.

- Les charges concentrées :

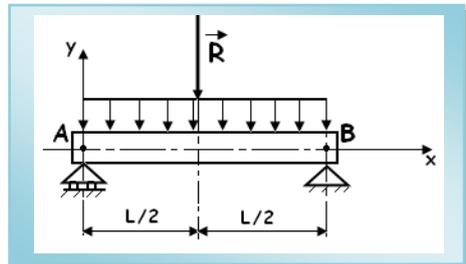
$$\vec{A} \begin{pmatrix} 0 \\ A \\ 0 \end{pmatrix}; \vec{P} \begin{pmatrix} 0 \\ -P \\ 0 \end{pmatrix}; \vec{B} \begin{pmatrix} 0 \\ B \\ 0 \end{pmatrix}; \vec{\mathcal{M}}_G \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M_{fz} \end{pmatrix}$$



- Les charges réparties :

La résultante des forces est  $\vec{R}$

$$R_A = q \cdot L \text{ et } M_A = \frac{q \cdot L^2}{2}$$



b) Hypothèses sur les appuis :

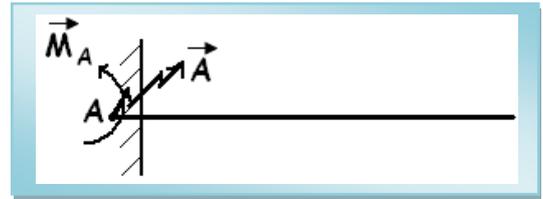
- Appui simple :  $\vec{A} \begin{pmatrix} 0 \\ A \\ 0 \end{pmatrix}$



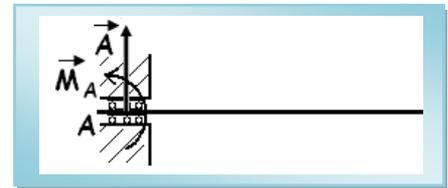
- Articulation cylindrique :  $\vec{A} \begin{pmatrix} Ax \\ Ay \\ Az \end{pmatrix}$



- Encastrement :  $\vec{A} \begin{pmatrix} Ax \\ Ay \\ Az \end{pmatrix}$  et  $\vec{M}_A \begin{pmatrix} M_{Ax} \\ M_{Ay} \\ M_{Az} \end{pmatrix}$



- Encastrement cylindrique :  $\vec{A} \begin{pmatrix} 0 \\ A \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $\vec{M}_A \begin{pmatrix} M_{Ax} \\ M_{Ay} \\ M_{Az} \end{pmatrix}$



## 2- Diagrammes des efforts tranchants et des moments fléchissants des poutres sollicitées en flexion plane simple :

### 2.1- Définitions de l'effort tranchant et du moment fléchissant :

- Par convention, on appelle **effort tranchant** ( $T_y$ ) dans une section la somme algébrique de tous les efforts situés à gauche de la section.
- Par convention, on appelle **moment fléchissant** ( $M_f$ ) dans une section la somme algébrique des moments des forces situées à gauche de la section.

### 2.1- Cas des charges concentrées :

- Calcul des réactions :

Equilibre :  $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$  et  $\sum \vec{M}_{B \vec{F}_{ext}} = \vec{0}$

D'où l'équilibre des torseurs :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A & 0 \\ 0 & -A.L \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -P & 0 \\ 0 & F.b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow -A.L + F.b = 0 \Rightarrow A = \frac{F.b}{L}$$

D'autre part :  $A - F + B = 0$

$$\Rightarrow B = F - A$$

$$\Rightarrow B = F - \frac{F.b}{L} \Rightarrow B = \frac{F.a}{L}$$

On a deux zones :

- $0 \leq x \leq a$  :

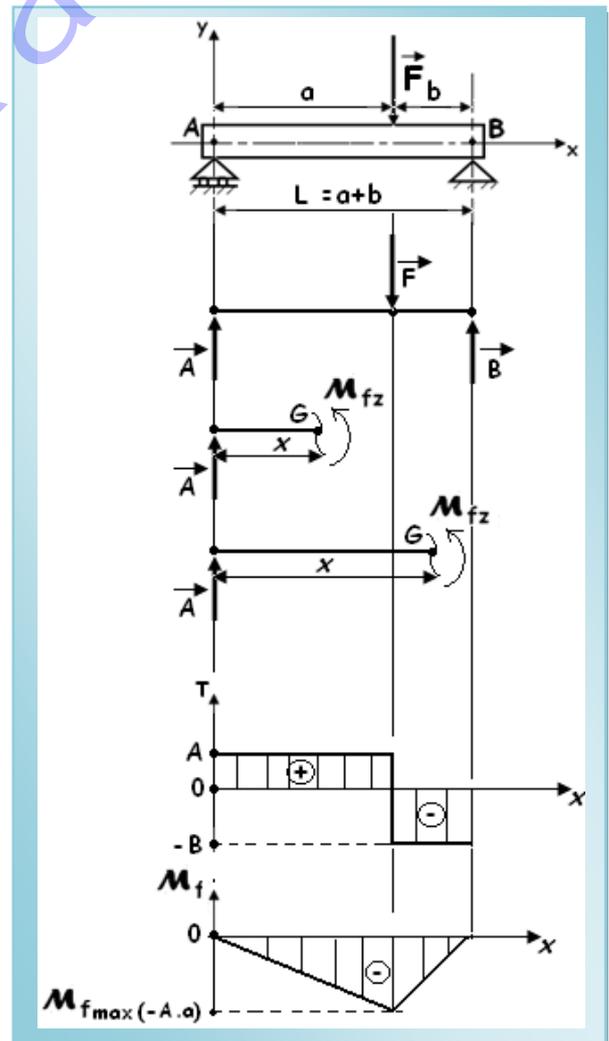
$$T_{1y} = A \quad \text{et} \quad M_{1f} = -A.x$$

D'où  $M_{fmax} = -A.a$

- $a \leq x \leq L$  :

$$T_{2y} = A - F = -B \quad \text{et} \quad M_{2f} = -A.x + F(x-a)$$

$$\begin{aligned} \text{D'où } M_{fmax} &= -A.L + F(L-a) \\ &= -A.L + F.b \\ &= 0 \end{aligned}$$



2.2- Cas des charges réparties:

- Calcul des réactions :

Equilibre :  $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$  et  $\sum \vec{M}_{B\vec{F}_{ext}} = \vec{0}$

D'où l'équilibre des torseurs :  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A & 0 \\ 0 & -A.L \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -q.L & 0 \\ 0 & q.L^2/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow -A.L + q \frac{L^2}{2} = 0 \Rightarrow A = \frac{q.L}{2}$

D'autre part :  $A - F + B = 0$

$\Rightarrow B = q.L - A$   
 $\Rightarrow B = q.L - \frac{q.L}{2} \Rightarrow B = \frac{q.L}{2}$

On a une seule zone car les charges sont réparties :

$0 \leq x \leq L$ :

Effort tranchant :

$T_y = A - q.x = q(\frac{L}{2} - x)$

Pour  $x=0 \Rightarrow T_y = q \cdot \frac{L}{2}$

Pour  $x=L/2 \Rightarrow T_y = 0$

Pour  $x=L \Rightarrow T_y = -q \cdot \frac{L}{2}$

Moment fléchissant :

$M_f = -A.x + q \cdot \frac{x^2}{2}$

Pour  $x=0 \Rightarrow M_f = 0$

Pour  $x=L/2 \Rightarrow M_f = -q \cdot \frac{L^2}{8}$

Pour  $x=L \Rightarrow M_f = 0$

3- Etude des contraintes dans une poutre sollicitée à la flexion plane simple:

3.1- Contrainte normale :

La contrainte normale est proportionnelle à l'ordonnée  $y$  de la fibre considérée :

Soit :  $\sigma = k.y$

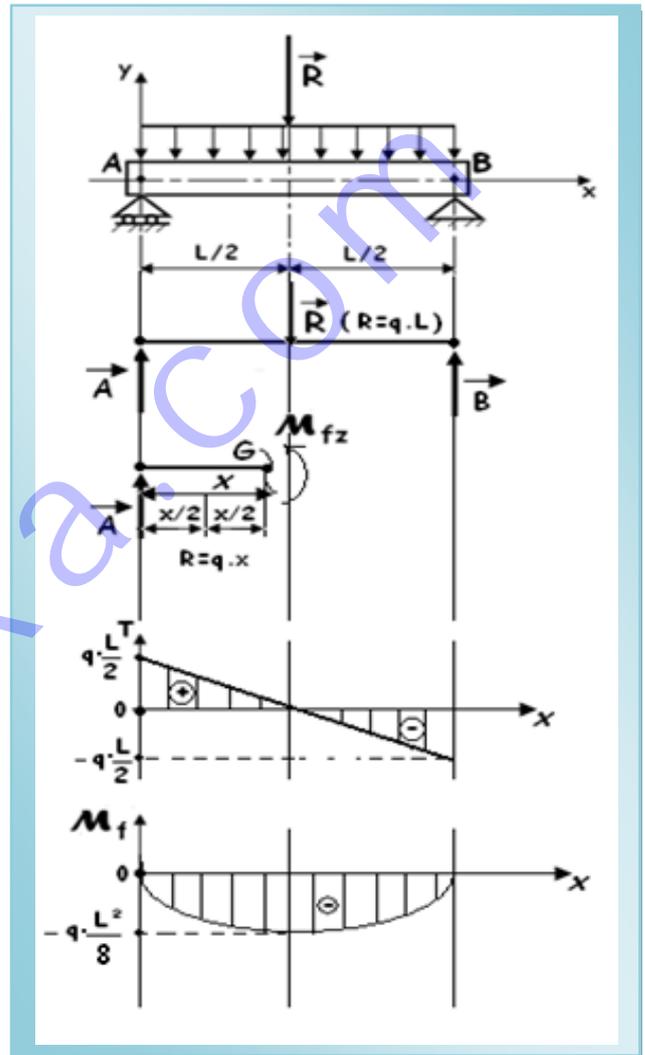
Le rapport de proportionnalité est :  $k = \frac{M_{fz}}{I_{Gz}}$

$\sigma = \frac{M_{fz}}{I_{Gz}} \cdot y$  Avec :

$\begin{cases} \sigma \text{ en } \frac{N}{mm^2} \\ M_{fz} \text{ en } N \cdot mm \\ y \text{ en } mm \\ I_{Gz} \text{ en } mm^4 \end{cases}$

3.2- Contrainte normale maximale :

$\sigma_{max} = \frac{M_{fmax}}{I_{Gz}} \cdot y_{max}$



- Dans le cas d'une section rectangulaire,  $y_{max} = \frac{h}{2}$
- La contrainte normale est maximale lorsque  $|M_{fz}|$  est maximal (Section dangereuse) et lorsque la fibre considérée est la plus éloignée du plan des fibres neutres :  $y_{max} = \vartheta$
- L'expression groupée  $\left(\frac{I_{Gz}}{\vartheta}\right)$  désignée « **module de flexion** » et dont l'unité est le  $\text{mm}^3$  se trouve sous cette forme dans les catalogues de profilés de commerce.

D'où :

$$\sigma_{max} = \frac{M_{fmax}}{\left(\frac{I_{Gz}}{\vartheta}\right)}$$

### 3.3- Courbure de la fibre neutre de la poutre :

$$\frac{1}{Rx} = -\frac{M_{fz}}{E \cdot I_{Gz}}$$

E est le module de Young en  $\text{N/mm}^2$

### 3.4- Angle de rotation de la section :

$$\varphi = \int_0^x \frac{1}{Rx} = \int_0^x -\frac{M_{fz}}{E \cdot I_{Gz}}$$

### 3.5- Condition de résistance :

$$\sigma_{max} \leq Rpe$$

### 3.6- Contrainte tangentielle :

$$\tau_{moyen} = \frac{|T_y|}{S}$$

Et

$$\tau_{max} = \frac{|T_{ymax}|}{S}$$

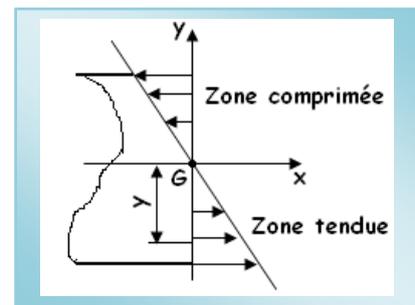
La contrainte tangentielle de cisaillement due à l'effort tranchant est :

$$\tau = \frac{-T_y \cdot W_{0x}}{b \cdot I_{Gz}}$$

$W_{0x}$  est le **moment statique** de la section considérée par rapport à l'axe  $Ox$ .

#### Remarque :

- Dans le cas où  $M_{fz} < 0$  :
- Si  $y > 0, \sigma < 0$  : La fibre est comprimée
- Si  $y < 0, \sigma > 0$  : La fibre est tendue



## Application résolue

Données :  $F=10N$  ;  $L=1m$  ;  $b=1cm$  ;  $h=2cm$  ;  $Rpe = 1N/mm^2$

1- Diagrammes des efforts tranchants et des moments fléchissants :

- $0 < x \leq L/2$ :

$$T_y = A = \frac{F}{2} = 5N$$

$$T_y = 5N$$

$$\mathcal{M}_f = -A \cdot x = -5x$$

$$\mathcal{M}_f = -5x$$

$$\mathcal{M}_{fmax} = -5 \times \frac{1}{2}$$

$$\mathcal{M}_{fmax} = -2,5N.m$$

- $L/2 < x \leq L$ :

$$T_y = A - F = -\frac{F}{2} = -5N$$

$$T_y = -5N$$

$$\mathcal{M}_f = -A \cdot x + F \left( x - \frac{L}{2} \right)$$

$$\mathcal{M}_f = \frac{5}{2}x - \frac{5}{2}$$

$$\mathcal{M}_{fmax} = \frac{5}{2}L - \frac{5}{2} \quad \text{Donc :} \quad \mathcal{M}_{fmax} = 0$$

$$\text{Donc :} \quad |\mathcal{M}_{fmax}| = 2,5N.m = 2,5 \cdot 10^3 N.mm$$

2- Contrainte maximale :

A.N :

$$\sigma_{max} = \frac{|\mathcal{M}_{fmax}|}{I_{Gz}} \cdot y_{max}$$

$$I_{Gz} = \frac{b \cdot h^3}{12} = 6,66 \cdot 10^{-9} mm^4$$

$$y_{max} = \frac{h}{2} = 1cm = 0,01m = 10mm$$

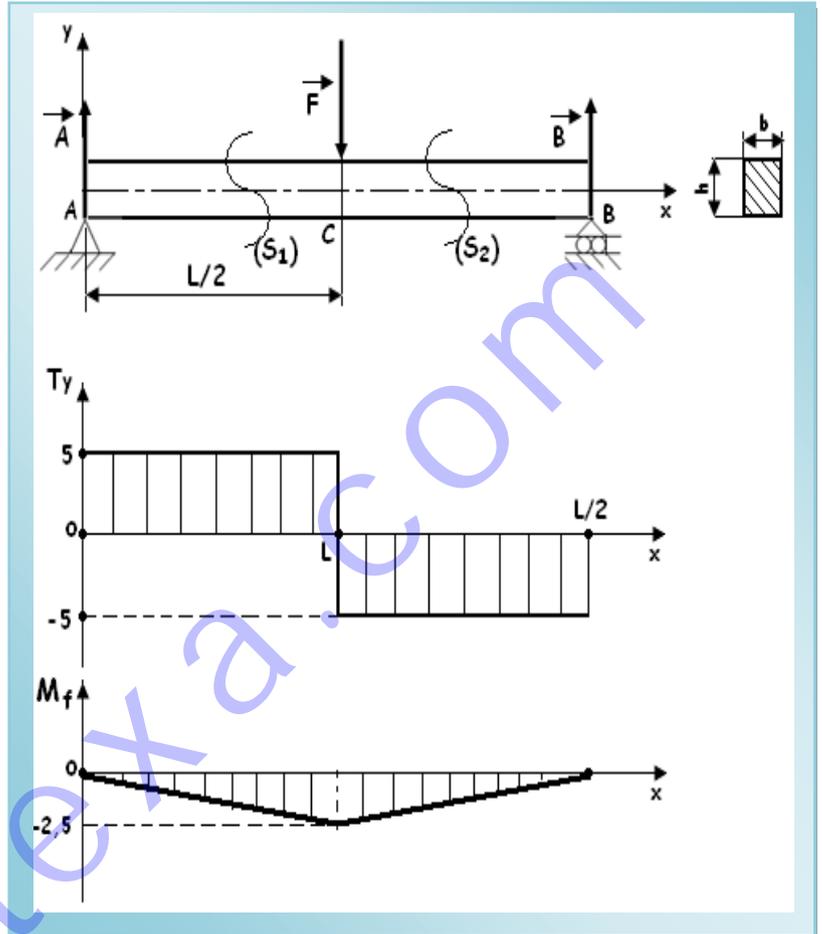
Donc:

$$\sigma_{max} = 3750000N/m^2$$

3- Courbure de la fibre neutre de la section  $S_1$  de la poutre :

Pour  $0 < x \leq L/2$  :

$$\frac{1}{Rx} = -\frac{M_{fz}}{E \cdot I_{Gz}}$$



A.N:  $\frac{1}{Rx} = -\frac{-5x}{2.10^5 \times 6,66.10^{-9}}$  Donc :  $\frac{1}{Rx} = \frac{3x}{8}$

4- Angle de rotation de la section  $S_1$  de la poutre :

Pour  $0 < x \leq L/2$  :

$$\varphi = \int_0^x \frac{1}{Rx} = \int_0^x \frac{3x}{8} = \frac{3}{8} \left[ \frac{1}{2} x^2 + c \right]_0^x$$

$\varphi = \left[ \frac{3}{16} x^2 + c \right]_0^{L/2} = \frac{3}{64}$  Donc :  $\varphi = \frac{3}{64} \text{ rad} = 2,68 \text{ deg}$

5- Répartitions des contraintes normales dans la section  $S_1$  :

On a :  $M_{fz} < 0$

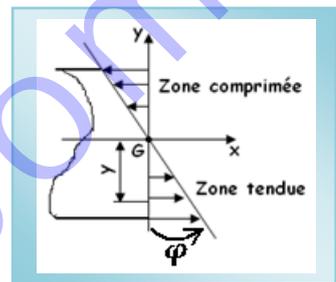
6- Calcul de la section de la poutre :

Condition de résistance :

$$|\sigma_{max}| \leq Rpe$$

$$\frac{|\mathcal{M}_{fmax}|}{I_{Gz}} \cdot y_{max} \leq Rpe$$

$$I_{Gz} \geq \frac{|\mathcal{M}_{fmax}|}{Rpe} \cdot y_{max}$$



$I_{Gz} = \frac{b \cdot h^3}{12} \geq 25$ ; Or  $b=1\text{cm}$  ;  $h=2\text{cm}$  D'où  $b = \frac{h}{2}$  et  $I_{Gz} = \frac{h^4}{24} \geq 25$

$h^4 \geq 600 \Rightarrow h \geq 4,94\text{mm}$

$h = 2b$  et  $I_{Gz} = \frac{2 \cdot b^4}{3} \geq 25$

$\Rightarrow b^4 \geq 37,5$

$\Rightarrow b \geq 2,47\text{mm}$  D'où:  $\begin{cases} h \geq 4,94\text{mm} \\ b \geq 2,47\text{mm} \end{cases}$  Or  $S = b \cdot h$

Donc :  $S \geq 12,27\text{mm}^2$

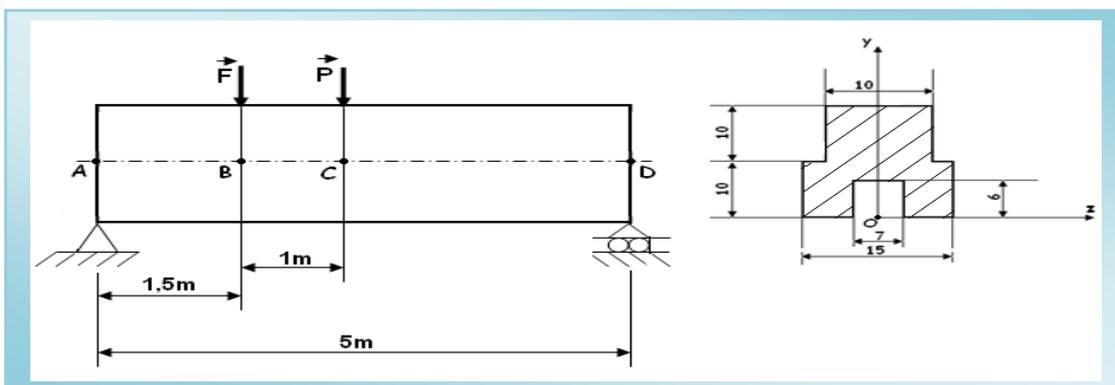
On peut prendre

$$S = 20\text{mm}^2$$



### Application à résoudre

Une poutre AD reposant sur deux appuis est chargée comme l'indique la figure ci-dessous. On donne :  $F = 9000\text{N}$  et  $P = 4000\text{N}$





-----

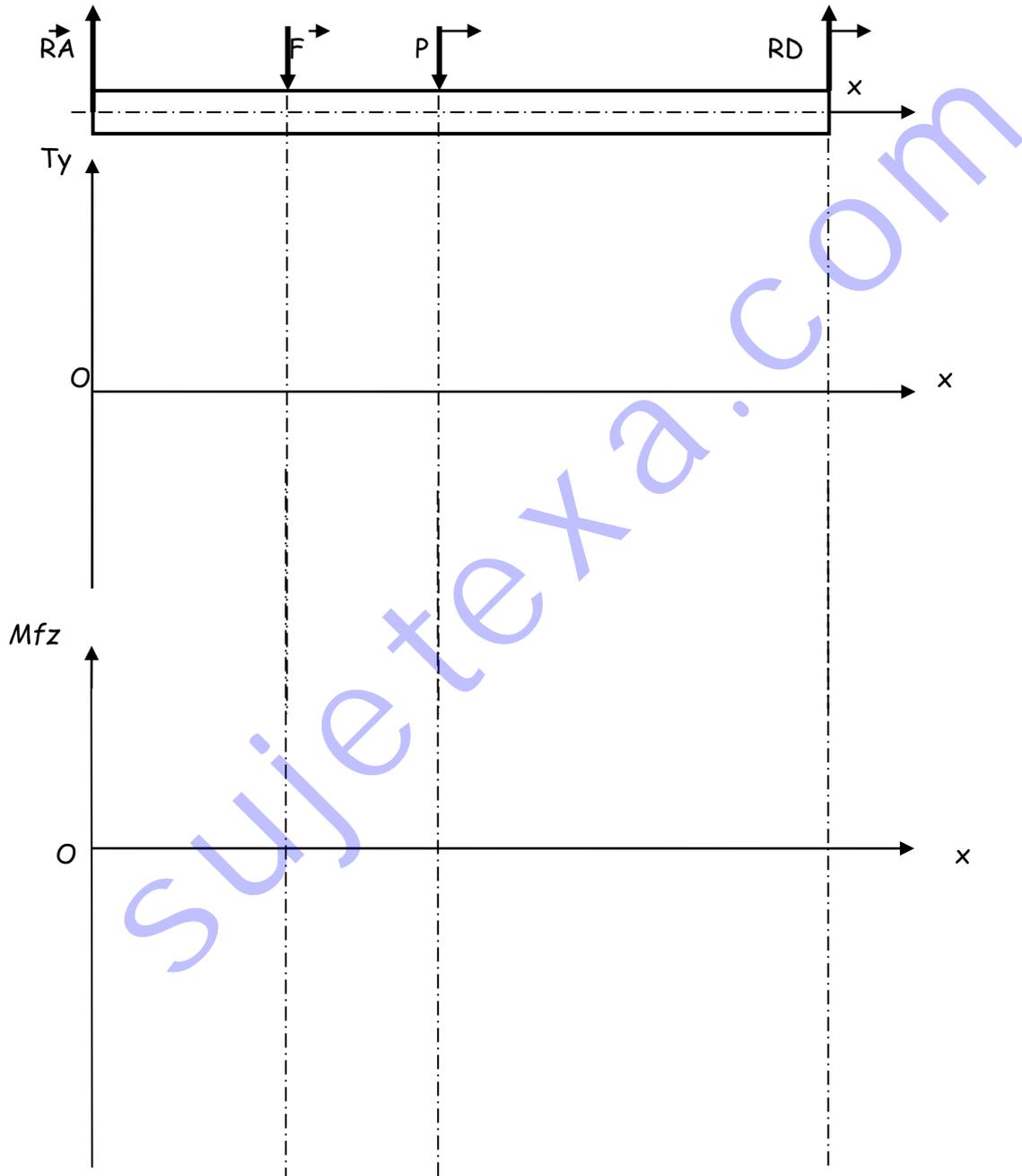
-----

-----

-----

-----

4- Représenter les diagrammes de l'effort tranchant et du moment fléchissant le long de la poutre.



5-Déduire le moment fléchissant maximal : -----  
----- $M_{fzmax} = \dots\dots\dots Nmm$

On considère la section droite (S) d'abscisse 1700mm

6- Déterminer la contrainte tangentielle maximale  $T_{max}$  dans cette section

-----  
 -----

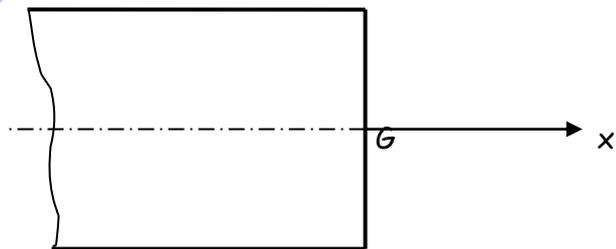
$T_{max} = \dots\dots\dots Mpa .$

7- Déterminer la contrainte normale en un point de (S) situé à 15mm au-dessus de la fibre neutre.

-----  
 -----  
 -----  
 -----  
 -----  
 -----

8- Calculer la contrainte normale maximale dans cette section et donner sa répartition

-----  
 -----  
 -----  
 -----  
 -----  
 -----  
 -----  
 -----  
 -----  
 -----





Chapitre 4

La Torsion simple



Objectif:

Dimensionner les poutres soumises à la torsion simple.

1- Définition et hypothèses:

1.1- Définition :

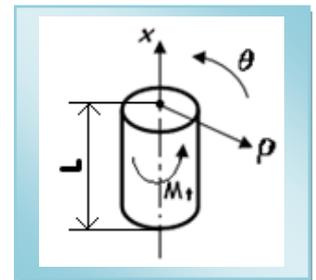
Une poutre est soumise à la torsion simple si à une section donnée, on a le torseur suivant :

$$\{\tau_{coh}\}_G \begin{cases} N = 0 & Mt \neq 0 \\ Ty = 0 & Mfy = 0 \\ Tz = 0 & Mfz = 0 \end{cases} (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$$

1.2- Hypothèses et déformations :

Système d'axe coordonnées cylindrique  $(x, \rho, \theta)$  :

- Les diamètres restent droits ;
- Les sections demeurent planes ;
- Les dimensions ne changent pas de façon notable ;
- La seule déformation consiste en une rotation des sections parallèlement aux autres.



L'angle de rotation des extrémités de l'arbre est :

$$\Delta \theta = \frac{M_t \cdot L}{G \cdot I_G}$$

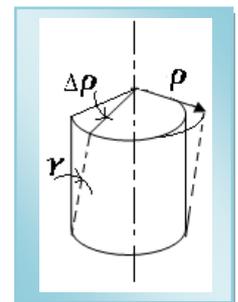
- $M_t$  = moment de torsion en N.mm
- $L$  = longueur de la poutre tordue en mm
- $I_G$  = moment quadratique polaire de la section tordue en  $mm^4$
- $G$  = module d'élasticité transversal ou module de Coulomb, en  $N/mm^2$  (Mpa).

D'où la déformation en cisaillement  $\gamma$  :

L'angle unitaire de torsion  $\theta$  est l'angle dont tourne l'une par rapport à l'autre deux sections distantes de l'unité de longueur. On a :

$$\theta = \frac{\gamma}{\rho}$$

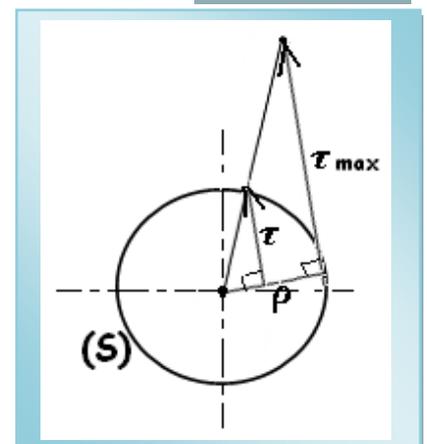
$$\begin{cases} \gamma \text{ en rad} \\ \rho \text{ en mm} \\ \theta \text{ en rad/mm} \end{cases}$$



2- Contrainte de torsion :

$$\tau = \frac{M_t \cdot \rho}{I_G}$$

- $M_t$  = moment de torsion.
- $\rho$  = rayon de la section tordue.
- $I_G$  = moment quadratique polaire de la section tordue.



**3- Contrainte de torsion maximale :  $\rho = \vartheta$** 

L'expression groupée  $\left(\frac{I_G}{\vartheta}\right)$  désignée « **module de torsion** » et dont l'unité est le  $\text{mm}^3$  se trouve sous cette forme dans les catalogues de profilés de commerce.

D'où :

$$\tau_{max} = \frac{M_{tmax}}{\left(\frac{I_{Gz}}{\vartheta}\right)}$$

**4- Loi de Hooke :**

$$\tau = G \cdot \gamma$$

**5- Condition de résistance :**

$$\tau_{max} \leq \tau_p$$

$$\text{Avec : } \tau_{max} = \frac{M_{tmax}}{\left(\frac{I_{Gz}}{\vartheta}\right)} \text{ et } \tau_p = \frac{\tau_e}{s} \text{ et } \tau_e = \frac{R_e}{2}$$

**Remarque :**

En cas de concentration de contrainte de coefficient  $k$ , la condition de résistance devient :

$$k \cdot \tau_{max} \leq \tau_p$$

**Application résolue N°1**

Un arbre cannelé de boîte de vitesse doit transmettre un couple de 400N.m.

On donne :  $\tau_e = 1200 \text{ Mpa}$ ;  $G = 80 \text{ Gpa}$ ;  $k = 1,57$ ;  $s = 3$ . L'arbre est plein.

La longueur de l'arbre est  $L = 140 \text{ mm}$ .

1- Calculer le diamètre de l'arbre.

2- Calculer la rotation  $\Delta\rho$  des extrémités de l'arbre.

**Solution :**

1- Condition de résistance due à la torsion simple :

$$\tau_{max} = \frac{M_{tmax}}{\left(\frac{I_{Gz}}{\vartheta}\right)} \text{ et } \tau_p = \frac{\tau_e}{s}$$

$$\frac{k \cdot M_{tmax}}{\left(\frac{I_{Gz}}{\vartheta}\right)} \leq \frac{\tau_e}{s} \text{ Or le rayon est } \vartheta = \rho = \frac{d}{2}$$

$$\text{D'où } \frac{k \cdot M_{tmax} \cdot d}{2 \cdot I_{Gz}} \leq \frac{\tau_e}{s} \leq \frac{\tau_e}{s} \quad I_{Gz} = \frac{\pi d^4}{32}$$

$$\Rightarrow \frac{16 \cdot k \cdot M_{tmax} \cdot d}{\pi \cdot d^4} \leq \frac{\tau_e}{s}; \text{ Soit } \frac{16 \cdot k \cdot M_{tmax}}{\pi \cdot d^3} \leq \frac{\tau_e}{s} \Rightarrow$$

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot s \cdot k \cdot M_{tmax}}{\pi \cdot \tau_e}}$$

$$\text{A.N: } \tau_e = 1200 \text{ Mpa} = 1200 \cdot 10^6; k = 1,57; s = 3; M_{tmax} = 400$$

Donc:

$$d \geq 20 \text{ mm}$$

$$2- \Delta\rho = \frac{M_t \cdot L}{G \cdot I_G} \text{ Or } I_{Gz} = \frac{\pi d^4}{32} \Rightarrow$$

$$\Delta\rho = \frac{32 \cdot M_{tmax} \cdot L}{\pi \cdot G \cdot d^4}$$

A.N:  $M_{tmax} = 400N.m$ ;  $G = 80Gpa$ ;  $d = 2.10^{-2}m$ ;  $L = 140mm$

Donc:  $\Delta\rho = 0,0445 rad = 2,55^\circ$

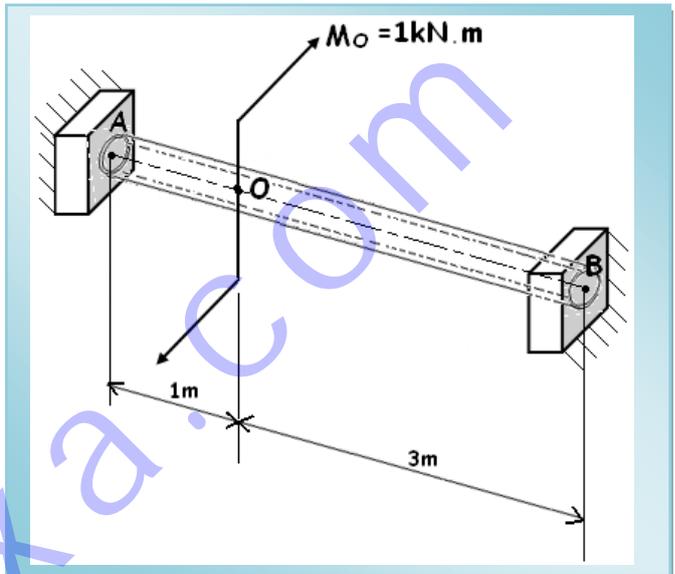


### Application résolue N°2

Un arbre creux est encastéré à ses deux extrémités A et B. Son diamètre extérieur est de 50 mm. On donne :

$R_e = 270Mpa$ ;  $s = 2$ ;  $G = 80Gpa$

- 1- Déterminer les moments aux encastrements en A et B.
- 2- Tracer le diagramme des moments de torsion.
- 3- Calculer le diamètre intérieur maximal de l'arbre AB.
- 4- Calculer l'angle de rotation de l'arbre en O.



#### Solution :

- 1- Modélisation de l'arbre et réaction aux encastrements :

$$\begin{aligned} \bullet \quad \sum \vec{M} &= \vec{0} \\ \Rightarrow \vec{M}_A + \vec{M}_O + \vec{M}_B &= \vec{0} \\ \Rightarrow M_A - M_O + M_B &= 0 \end{aligned}$$



- Compatibilité géométrique :

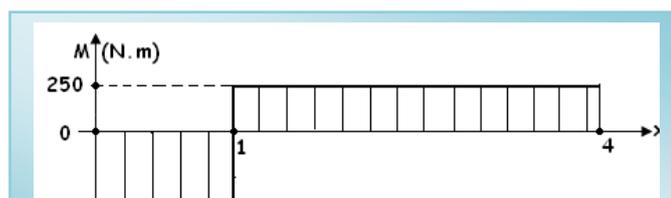
On sait que :  $\Delta\rho = \frac{M_t \cdot L}{G \cdot I_G}$  D'où :  $\frac{M_A \cdot OA}{G \cdot I_G} = \frac{M_B \cdot OB}{G \cdot I_G} \Rightarrow M_A \cdot OA = M_B \cdot OB$

$$\begin{aligned} \Rightarrow M_A &= 3M_B \\ \Rightarrow M_B + 3M_B &= M_O \\ \Rightarrow 4M_B &= M_O \\ \Rightarrow M_B &= \frac{M_O}{4} = 250N.m \\ \Rightarrow M_A &= 3M_B = 750N.m \end{aligned}$$

Donc :  $M_A = 750N.m$  et  $M_B = 250N.m$

- 2- Diagramme des moments de torsion :

- $0 \leq x \leq 1$ :  $\Rightarrow M_t = -M_A = -750N.m$
- $1 \leq x \leq 4$ :  $\Rightarrow M_t = -(M_A - M_O) = 250N.m$



3- Condition de résistance due à la torsion simple :

$$\tau_{max} = \frac{M_{tmax}}{\left(\frac{I_{Gz}}{\vartheta}\right)} \text{ et } \tau_p = \frac{\tau_e}{s} = \frac{R_e}{2.s}$$

$$\frac{M_{tmax}}{\left(\frac{I_{Gz}}{\vartheta}\right)} \leq \frac{\tau_e}{s} \text{ Or le rayon est } \vartheta = \rho = \frac{d_e}{2}$$

$$\text{D'où } \frac{M_{tmax} \cdot d_e}{2 \cdot I_{Gz}} \leq \frac{\tau_e}{s} \leq \frac{\tau_e}{s} \quad I_{Gz} = \frac{\pi(d_e^4 - d_i^4)}{32}$$

⇒

$$d_i \geq \sqrt[4]{d_e^4 - \frac{32 \cdot s \cdot d_e \cdot M_{tmax}}{\pi \cdot R_e}}$$

$$\text{A.N. : } \begin{cases} d_e = 50 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ M_{tmax} = 750 \text{ N.m} \\ s = 2 \\ R_e = 270 \text{ Mpa} = 270 \cdot 10^6 \text{ Pa} \end{cases} \quad \text{Donc : } d_i \approx 3,42 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

4- En O ; on a :

$$\Delta\rho = \frac{M_A \cdot OA}{G \cdot I_G} = \frac{M_B \cdot OB}{G \cdot I_G}$$

$$\text{Avec } I_{Gz} = \frac{\pi(d_e^4 - d_i^4)}{32} = 6,13 \cdot 10^{-7} \text{ m}^4$$

$$\text{A.N. : } G = 80 \text{ Gpa} = 80 \cdot 10^9 \text{ Pa}; M_A = 750 \text{ N.m}; I_G = 6,13 \cdot 10^{-7} \text{ mm}^4; OA = 1 \text{ m}$$

Donc :

$$\Delta\rho = 0,01528 \text{ rad} = 0,875^\circ$$



### Application à résoudre

Un arbre cannelé de boîte de vitesse doit transmettre un couple de 400N.m.

On donne :  $\tau_e = 1200 \text{ Mpa}$ ;  $G = 80 \text{ Gpa}$ ;  $k = 1,57$ ;  $s = 3$ .

La longueur de l'arbre est  $L = 140 \text{ mm}$ . L'arbre est creux :  $d_i = 15 \text{ mm}$

3- Calculer le diamètre extérieur de l'arbre.

4- Calculer la rotation  $\Delta\rho$  des extrémités de l'arbre.

Solution :

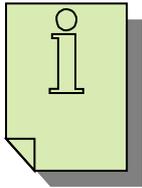
-----

-----



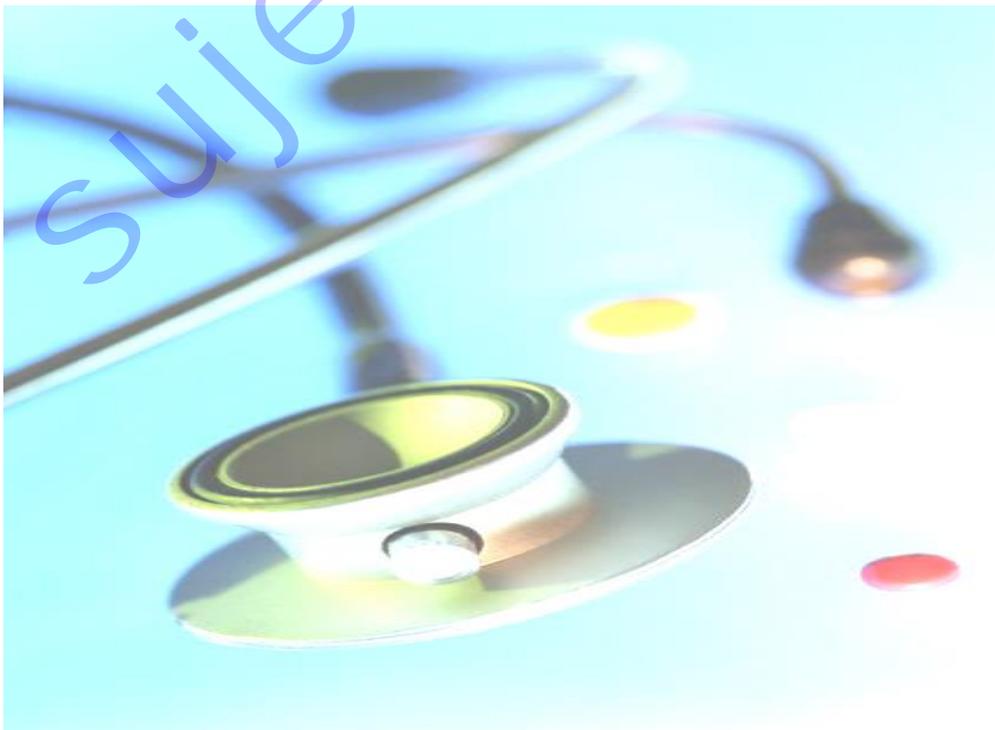


L'ESSENTIEL



Quatrième Partie

Dynamique



La Dynamique est l'étude des relations qui existent entre les déplacements d'un système matériel et les causes de ces déplacements c'est-à-dire les forces extérieures qui agissent sur ce système.

Chapitre 1 : Principe Fondamental de la Dynamique.....	57
Chapitre 2 : Travail, Puissance et Energie.....	60



**Chapitre 1**

**Principe fondamental de la Dynamique**



**Objectif:**

Maîtriser les prérequis permettant de résoudre aisément les problèmes de dynamique.

**1- Quantité de mouvement :**

**1.1- Définition :**

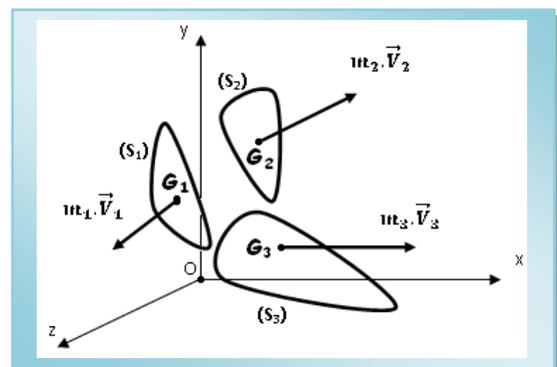
Dans un repère galiléen, à un instant t, on appelle quantité de mouvement d'un point matériel M de masse m et de vecteur vitesse  $\vec{V}$ , le vecteur  $\vec{Q}$  tel que :

$$\vec{Q} = m \cdot \vec{V} \quad \left\{ \begin{array}{l} m \text{ en Kg} \\ V \text{ en m/s} \\ Q \text{ en Kg.m/s} \end{array} \right.$$

**Remarque :**

Dans un repère galiléen, à un instant t, on considère un système matériel (S) de masse m et de centre de gravité G, constitué de plusieurs sous-ensembles (S<sub>i</sub>) de masse m<sub>i</sub> et de centre de gravité G<sub>i</sub> :

(S) = (S<sub>1</sub>) + (S<sub>2</sub>) + ..... + (S<sub>n</sub>). Le vecteur quantité de mouvement du système matériel (S) a pour expression :



$$\vec{Q} = \sum_{i=0}^n m_i \cdot V_i = m_1 \cdot V_1 + m_2 \cdot V_2 + \dots + m_n \cdot V_n$$

**1.2- Théorème de la dérivée de la quantité de mouvement :**

Dans un repère galiléen, la dérivée par rapport au temps de la quantité de mouvement d'un système matériel (S) est égale à la somme géométrique des forces extérieures appliquées à ce système :

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \sum \vec{F}_{ext}$$

## 2- Moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe :

### 2.1- Définition :

Considérons un solide (S) en rotation par rapport à l'axe Oz ; Soit  $m_i$ , la masse d'une particule située à la distance  $\rho_i$  de l'axe Oz. On appelle moment d'inertie du solide (S) par rapport à l'axe Oz la quantité :

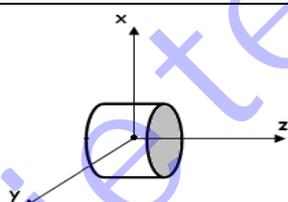
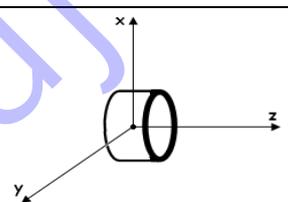
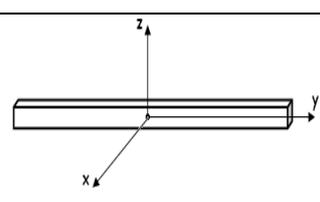
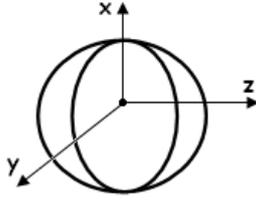
$$J_{Oz} = \sum_{(S)} m_i \rho_i^2 \quad \left\{ \begin{array}{l} m \text{ en Kg} \\ \rho \text{ en m} \\ J_{Oz} \text{ en Kg.m}^2 \end{array} \right.$$

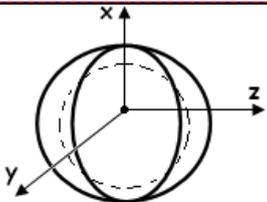
### 2.2- Théorème de Huygens :

Le moment d'inertie d'un solide (S) par rapport à un axe quelconque Oz est égal au moment d'inertie de celui-ci par rapport à un axe passant par son centre de gravité, augmenté du produit de sa masse par le carré de la distance qui sépare les deux axes.

$$J_{Oz} = J_{Gz} + M \cdot d^2$$

### 2.3- Quelques moments d'inertie des figures planes homogènes :

Désignation	Schéma	Moment d'inertie par rapport à Oz
Cylindre plein ou disque de masse $m$ et de rayon $R$		$J_{Oz} = \frac{1}{2} m \cdot R^2$
Enveloppe sphérique mince ou cerceau de masse $m$ et de rayon $R$		$J_{Oz} = m \cdot R^2$
Tige homogène de masse $m$ et de longueur $l$		$J_{Oz} = \frac{1}{12} m \cdot l^2$
Sphère pleine de masse $m$ et de rayon $R$		$J_{Oz} = \frac{2}{5} m \cdot R^2$

<p>Sphère creuse de masse <math>m</math> et de rayons <math>R_1</math> et <math>R_2</math></p>		$J_{Oz} = \frac{2}{5} m \left( \frac{R_2^5 - R_1^5}{R_2^3 - R_1^3} \right)$
--	---	---

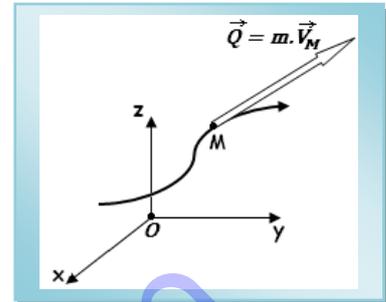
**3- Moment cinétique :**

**3.1- Définition :**

➤ Le vecteur moment cinétique par rapport à un point quelconque d'une particule  $M$  de masse  $m$  et de vecteur vitesse  $\vec{V}$  est égal au vecteur moment en  $A$  de la quantité de mouvement de  $M$ . on note :

$$\vec{\sigma}_A = \overrightarrow{AM} \wedge m \cdot \vec{V}$$

$\sigma$  en  $Kg \cdot m^2 \cdot s^{-1}$



➤ Le moment cinétique par rapport à un axe d'un système matériel est égal au produit scalaire de son vecteur moment cinétique par rapport à un point quelconque de l'axe, par le vecteur unitaire de cet axe. Si c'est l'axe  $Oz$ , on aura :

$$\sigma_{Oz} = \vec{\sigma}_O \cdot \vec{k}$$

**Remarque : Champ des moments cinétiques.**

Connaissant  $\vec{\sigma}_B$  et  $\vec{V}_G$  ; on peut trouver  $\vec{\sigma}_A$  à partir de la relation :

$$\vec{\sigma}_A = \vec{\sigma}_B + \overrightarrow{AB} \wedge m \cdot \vec{V}_G$$

**3.2- Théorème du moment cinétique :**

Le moment cinétique par rapport à un axe fixe d'un solide en rotation autour de cet axe est égal au produit de son moment d'inertie par rapport à l'axe par la mesure algébrique sur cet axe du vecteur rotation. On note :

$$\sigma_{Oz} = J_{Oz} \cdot \omega_z$$

$\omega_z$  est encore la vitesse angulaire en rad/s

**3.1- Théorème de la dérivée du moment cinétique :**

**3.3.1- Par rapport à un point fixe :**

La dérivée par rapport au temps du moment cinétique par rapport à un point fixe, d'un système matériel, est égale à la somme des moments par rapport à ce point des forces extérieures appliquées au système matériel.

$$\frac{d\vec{\sigma}_A}{dt} = \sum \vec{M}_A(\vec{F}_{ext})$$

**3.3.2- Par rapport à un axe fixe :**

La dérivée par rapport au temps du moment cinétique par rapport à un axe fixe, d'un système matériel, est égale à la somme des moments par rapport à cet axe des forces extérieures appliquées au système matériel.

$$\frac{d\sigma_{Oz}}{dt} = \sum M_{Oz}(\vec{F}_{ext})$$

$$\frac{d\sigma_{Oz}}{dt} = J_{Oz} \cdot \dot{\omega}_z$$

Et

$\dot{\omega}_z$  est encore l'accélération angulaire en rad/s<sup>2</sup>

#### 4- Principe Fondamental de la Dynamique :

On sait que :

$$\vec{Q} = m \cdot \vec{V}$$

Et

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \sum \vec{F}_{ext}$$

D'autres parts

$$\sigma_{Oz} = J_{Oz} \cdot \omega_z$$

Et

$$\frac{d\sigma_{Oz}}{dt} = J_{Oz} \cdot \dot{\omega}_z$$

Donc :

$$\begin{cases} \sum \vec{F}_{ext} = m\vec{\Gamma} \\ \sum M_{Oz}(\vec{F}_{ext}) = J_{Oz} \cdot \dot{\omega}_z \end{cases}$$

$\vec{\Gamma}$  est l'accélération linéaire en m/s<sup>2</sup>

$\dot{\omega}_z$  est l'accélération angulaire en rad/s<sup>2</sup>



## Chapitre 2

## Travail, Puissance et Energie

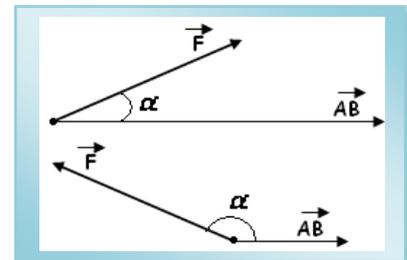


**Objectif:** Savoir calculer le travail et la puissance d'une force.

### 1- Travail d'une force :

#### 1.1- Définition :

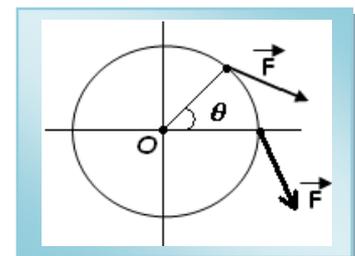
- Le travail d'une force constante lors d'un déplacement rectiligne de son point d'application de A vers B est égal au produit scalaire de la force par le vecteur déplacement :



$$\vec{W}_{AB}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{AB} = F \cdot AB \cdot \cos\alpha$$

- Si  $\alpha > 90^\circ \Rightarrow \vec{W}_{AB}(\vec{F}) < 0$  : Le travail est résistant
- Si  $\alpha < 90^\circ \Rightarrow \vec{W}_{AB}(\vec{F}) > 0$  : Le travail est moteur

- Le travail d'une force constante lors d'un déplacement en rotation de son point d'application d'un angle  $\theta$  est égal au produit du moment de la force par l'angle balayé.



$$\vec{W}_{AB}(\vec{F}) = M_o(\vec{F}) \cdot \theta$$

$$\vec{W}_{AB}(\vec{F}) = Cm \cdot \theta$$

Cm en N.m

$\theta$  en rad

$\left\{ \begin{array}{l} W \text{ en Joule (J) ou en Calorie et } 1J = 4,18cal \end{array} \right.$

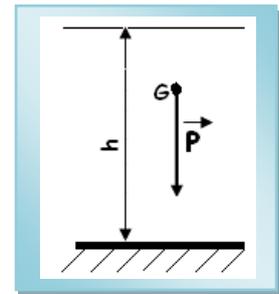
Cm est encore appelé Couple moteur.

### 1.2- Travail du poids:

Le travail du poids d'un corps est un travail particulier qui ne dépend que de la hauteur balayée :

$$W(\vec{P}) = m \cdot g \cdot h$$

- Si l'objet monte, le travail du poids est négatif, donc résistant.
- Si l'objet descend, le travail du poids est positif, donc moteur.



### 2- Puissance moyenne:

Si  $t$  est la durée mise par la force pour effectuer le travail, on a :

$$P = \frac{W(\vec{F})}{t} = C m \cdot \dot{\theta}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} P \text{ en watt (W)} \\ t \text{ en seconde (s)} \\ \dot{\theta} \text{ en rad/s} \end{array} \right.$$

**Remarque :** On utilise couramment les multiples suivants :

- $1KW = 10^3W$
- $1MW = 10^6W$
- $1GW = 10^9W$
- Dans l'industrie automobile, on utilise  $1ch = 736W$

### 3- Energies

#### 3.1- Energie cinétique :

- Pour un mouvement de translation,

$$E_c = \frac{1}{2} m \cdot V^2$$

- Pour un mouvement de rotation,

$$E_c = \frac{1}{2} J_{Oz} \cdot \dot{\theta}^2$$

- Si la translation et la rotation sont combinées,

$$E_c = \frac{1}{2} m \cdot V^2 + \frac{1}{2} J_{Oz} \cdot \dot{\theta}^2$$

#### 3.2- Théorème de l'énergie cinétique :

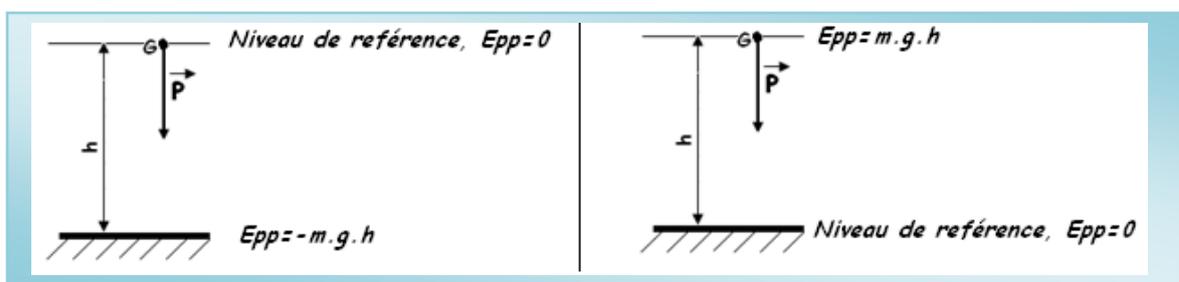
Dans un référentiel galiléen, la variation de l'énergie cinétique d'un système est égale à la somme des travaux de toutes les forces appliquées au système :

$$\Delta E_c = \sum W(\vec{F}_{ext}) + \sum W(\vec{F}_{int})$$

#### 3.3- Energie potentielle :

##### 3.3.1- Energie potentielle de pesanteur :

$$E_{pp} = m \cdot g \cdot h$$



Remarque :

- Si le solide se trouve au niveau de référence,  $E_{pp}=0$
- Si le solide se trouve en dessous du niveau de référence,  $E_{pp}<0$
- Si le solide se trouve au dessus du niveau de référence,  $E_{pp}>0$
- La variation de l'énergie potentielle de pesanteur ne dépend pas du niveau de référence.

### 3.3.2- Energie potentielle élastique :

Soient  $k$ , la constance de raideur d'un ressort ou d'une corde élastique et  $x$  son allongement ou son raccourcissement, on a :

$$E_{pe} = \frac{1}{2} k \cdot x^2$$

### 3.3.3- Energie potentielle de torsion :

Soient  $C$ , la constance de torsion du fil ou de la corde tordue et  $\theta$ , l'angle de torsion, on a :

$$E_{pt} = \frac{1}{2} C \cdot \theta^2$$

### 3.2- Travail et chaleur :

$$Q = K \cdot \Delta\theta = m \cdot C \cdot \Delta\theta = m \cdot C \cdot (\theta_f - \theta_i)$$

$m =$  masse du système en Kg

$C =$  chaleur massique du système en J/KG/°C ou en J/KG/°K

$K =$  capacité thermique du système en J/°C ou en J/°K

$Q =$  chaleur en Jou en cal et  $1J = 4,18cal$

Remarque :

- Le principe des échanges de chaleur est :  $\sum Q = 0$
- L'énergie est une grandeur polymorphe, nomade mais conservée :  $W=Q$
- L'énergie s'exprime en Joule (J)



## L'ESSENTIEL



## THÈME : ÉTUDE D'UNE TÊTE DE PERÇAGE

## 1- STATIQUE

## Hypothèses :

- Du fait des symétries ; on est ramené à un problème plan.
- Tous les contacts sont supposés sans adhérence.
- Le poids de chacun des éléments est négligé devant les autres efforts.
- Seul le poids  $\vec{P}_2$  de l'ensemble (2 + tête de perçage) sera pris en compte :  $\|\vec{P}_2\| = 300 \text{ N}$ .
- On précise que  $HB = HC = 1 \text{ m}$  ;  $HD = HF = 0,75 \text{ m}$  ;  $ED = EF = 0,5 \text{ m}$ .

## 1.1- Montage en position de départ. (Voir Fig. 1).

L'effort de la butée 9 sur 2 est nul.

## 1.1.1- On isole l'ensemble (3+4+5+6+7+8).

Déterminer le support des efforts  $\vec{B}_{1/4}$  et  $\vec{C}_{2/3}$ .

## 1.1.2- En précisant bien les différentes pièces isolées et les résultats obtenus après chaque étape de la résolution ;

Déterminer l'effort que doit fournir le vérin  $\vec{E}_{6/\text{axe}}$  (effort de la tige 6 du vérin sur l'axe d'articulation E). On commencera par considérer le système (2+ tête de perçage).

(Répondre sur Fig. 1 Feuille Réponse).

## 1.2- Montage en position de travail. (Voir Fig.2)

On donne certains efforts s'exerçant sur le système :

Effort dû à l'usinage :  $\|\vec{R}\| = 240 \text{ N}$  ;  $\|\vec{P}_2\| = 300 \text{ N}$  ;  $\|\vec{C}_{3/2}\| = 3000 \text{ N}$ .

Le support et le sens de chacune de ces forces sont donnés sur la figure 2. Déterminer graphiquement  $\vec{A}_{1/2}$  (l'effort dans la liaison pivot 1-2 en A) et  $\vec{L}_{10/2}$  dû à la butée 10.

## 2- RESISTANCE DES MATERIAUX

Il s'agit de procéder à un certain nombre de calculs de vérifications concernant la barre 3. (Voir figure 4).

- La configuration de la barre 3 et Le repère de position (H, X, Y, Z)
- Les forces appliquées à 3 par leurs composantes algébriques dans le repère de position :

$$\vec{H}_{\text{axe}/3} \begin{cases} H_x = -170\text{N} \\ H_y = 217,5\text{N} \end{cases} ; \vec{F}_{8/3} \begin{cases} F_x = 850\text{N} \\ F_y = -1087,5\text{N} \end{cases} ; \vec{C}_{2/3} \begin{cases} C_x = -680\text{N} \\ C_y = 870\text{N} \end{cases}$$

### 2.1- Construire le long de la barre 3 les diagrammes :

- De l'effort normal :  $N_x$  ;
- De l'effort tranchant :  $T_x$  ;
- Du moment de flexion :  $M_{fz}$ .

### 2.2- Etude des contraintes dans la section F :

- 2.2.1- Définir les contraintes dues à l'effort normal.
- 2.2.2- Définir la contrainte normale maximale due au moment de flexion en F.
- 2.2.3- Sans tenir compte du coefficient de concentration de contrainte en F, donner les répartitions des contraintes normales, dues à l'effort normal  $N_x$  ; dues au moment de flexion  $M_{fz}$  ; dues à l'ensemble des deux sollicitations.

## 3- CINEMATIQUE

Considérons la tête de perçage en position moyenne (fig. 3).

On donne la vitesse de sortie de la tige 6 du vérin par rapport au corps 5  $\|\vec{V}_{E6/5}\| = 15 \text{ mm/s}$ .

### 3.1- Détermination de $\vec{V}_{E6/4}$ .

- 3.1.1- Quelle est la nature de chacun des mouvements de 5/4 et de 7/4.
- 3.1.2- Tracer le support du vecteur vitesse  $\vec{V}_{E5/4}$ .
- 3.1.3- Ecrire la relation de composition de vitesse donnant  $\vec{V}_{E6/4}$

en fonction de  $\vec{V}_{E6/5}$  et  $\vec{V}_{E5/4}$ .

- 3.1.4- Comparer  $\vec{V}_{E6/4}$  ;  $\vec{V}_{E7/4}$  et  $\vec{V}_{E8/4}$ .
- 3.1.5- Déterminer  $\vec{V}_{E6/4}$ .

### 3.2- Détermination de $\vec{V}_{C3/4}$ .

- 3.2.1- Quelle est la nature du mouvement de 3/4 ?
- 3.2.2- Tracer le support du vecteur vitesse  $\vec{V}_{F3/4}$ .
- 3.2.3- Comparer  $\vec{V}_{F3/4}$  et  $\vec{V}_{F8/4}$
- 3.2.4- Déterminer par équiprojectivité  $\vec{V}_{F8/4}$ .
- 3.2.5- Déterminer  $\vec{V}_{C3/4}$ .

### 3.3- Détermination de la vitesse angulaire de rotation de 2 par rapport à 1 : $\vec{\omega}_{2/1}$ .

- 3.3.1- Quelle est la nature du mouvement de 2 / 1 ?
- 3.3.2- Tracer le support du vecteur vitesse  $\vec{V}_{C2/1}$  (fig. 7).

3.3.3- Comparer  $\vec{V}_{c2/1}$  et  $\vec{V}_{c3/1}$ .

3.3.4- Quelle est la nature du mouvement de 4/1 ?

3.3.5- Tracer le support de  $\vec{V}_{c4/1}$ . (fig.7).

3.3.6- Ecrire la relation de composition de vitesse entre  $\vec{V}_{c3/1}$ ;  $\vec{V}_{c3/4}$  et  $\vec{V}_{c4/1}$ .

3.3.7- Ecrire la relation entre  $\|\vec{V}_{c2/1}\|$  et  $\|\vec{\omega}_{2/1}\|$  et déduire  $\|\vec{\omega}_{2/1}\|$ .

On donne  $CA = 100 \text{ mm}$

#### 4- DYNAMIQUE

Les efforts dû à l'usinage se réduisent en un point quelconque de l'axe du foret à :

- Une résultante suivant l'axe du foret  $\|\vec{R}\| = 240\text{N}$
  - Un moment résultant suivant l'axe du foret  $\|\vec{M}\| = 0,5\text{N.m}$ .
  - Le rendement des chaînes cinématiques moteur- foret de vérin- foret est égal à 1.
- 4.1- Déterminer la puissance du moteur donnant une vitesse de rotation du foret égale à  $N = 1200 \text{ tr/min}$ .
- 4.2- Déterminer le travail effectué par le vérin donnant l'avance du foret si la longueur de perçage est de 30mm.

## 1- STATIQUE

- $\|\vec{P}_2\| = 300 \text{ N}$ .
- On précise que  $HB = HC = 1 \text{ m}$  ;  $HD = HF = 0,75 \text{ m}$  ;  $ED = EF = 0,5 \text{ m}$ .

1.1- Montage en position de départ. (Voir Fig. 1). L'effort de la butée 9 sur 2 est nul.

1.1.1- On isole l'ensemble (3+4+5+6+7+8).

Support des efforts  $\vec{B}_{1/4}$  et  $\vec{C}_{2/3}$  : .....

1.1.2- En précisant bien les différentes pièces isolées et les résultats obtenus après chaque étape de la résolution ;

Déterminons l'effort que doit fournir le vérin  $\vec{E}_{6/\text{axe}}$  (effort de la tige 6 du vérin sur l'axe d'articulation E). On commencera par considérer le système (2+ tête de perçage). (Tracer les dynamiques sur la figure 1).

- Equilibre du système (2+ tête de perçage) : P.F.S :

.....  
.....

$$\|\vec{C}_{2/3}\| = \dots\dots\dots \text{ et } \|\vec{A}_{1/2}\| = \dots\dots\dots$$

- Equilibre de la bielle 8 : P.F.S :

.....  
.....

$$\|\vec{H}_{\text{axe}/3}\| = \dots\dots\dots \text{ et } \|\vec{F}_{8/3}\| = \dots\dots\dots$$

- Equilibre de la pièce 3 : P.F.S :

.....  
.....

$$\|\vec{E}_{8/\text{axe}}\| = \dots\dots\dots ; \|\vec{E}_{7/\text{axe}}\| = \dots\dots\dots ; \|\vec{E}_{6/\text{axe}}\| = \dots\dots\dots$$

1.2- Montage en position de travail.

(Répondre sur Fig. 2 Feuille Réponse).

On donne certains efforts s'exerçant sur le système :

Effort dû à l'usinage :  $\|\vec{R}\| = 240 \text{ N}$  ;  $\|\vec{P}_2\| = 300 \text{ N}$  ;  $\|\vec{C}_{3/2}\| = 3000 \text{ N}$ .

$$\|\vec{A}_{1/2}\| = \dots\dots\dots ; \|\vec{L}_{10/2}\| = \dots\dots\dots$$

2- RESISTANCE DES MATERIAUX

$$\vec{H}_{\text{axe } 3} \begin{cases} H_x = -170\text{N} \\ H_y = 217,5\text{N} \end{cases} ; \vec{F}_{8/3} \begin{cases} F_x = 850\text{N} \\ F_y = -1087,5\text{N} \end{cases} ; \vec{C}_{2/3} \begin{cases} C_x = -680\text{N} \\ C_y = 870\text{N} \end{cases}$$

2.1- Construisons le long de la barre 3 les diagrammes de  $N_x$ ,  $T_x$  et  $M_{fz}$ . (Sur Figure 4).

- Zone HF :  $0 \leq x \leq 200$  :
  - Effort normal : .....
  - Effort tranchant : .....
  - Moment fléchissant : .....
  - Moment fléchissant maximal : .....
- Zone FC :  $200 \leq x \leq 250$ 
  - Effort normal : .....
  - Effort tranchant : .....
  - Moment fléchissant : .....
  - Moment fléchissant maximal : .....

2.2- Etude des contraintes dans la section F :

2.2.1- Contraintes dues à l'effort normal : .....

.....

.....

$\sigma =$  .....

2.2.2- Contrainte normale maximale due au moment de flexion en F :

.....

.....

.....

.....

.....

$\sigma_{1max} =$  .....

$\sigma_{2max} =$  .....

2.2.3- Donnons les répartitions des contraintes normales,

Pour l'effort normal $N_x$	Pour le moment de flexion $M_{fz}$	Pour les deux



Position travail Echelle des forces: 1cm  $\leftrightarrow$  300N

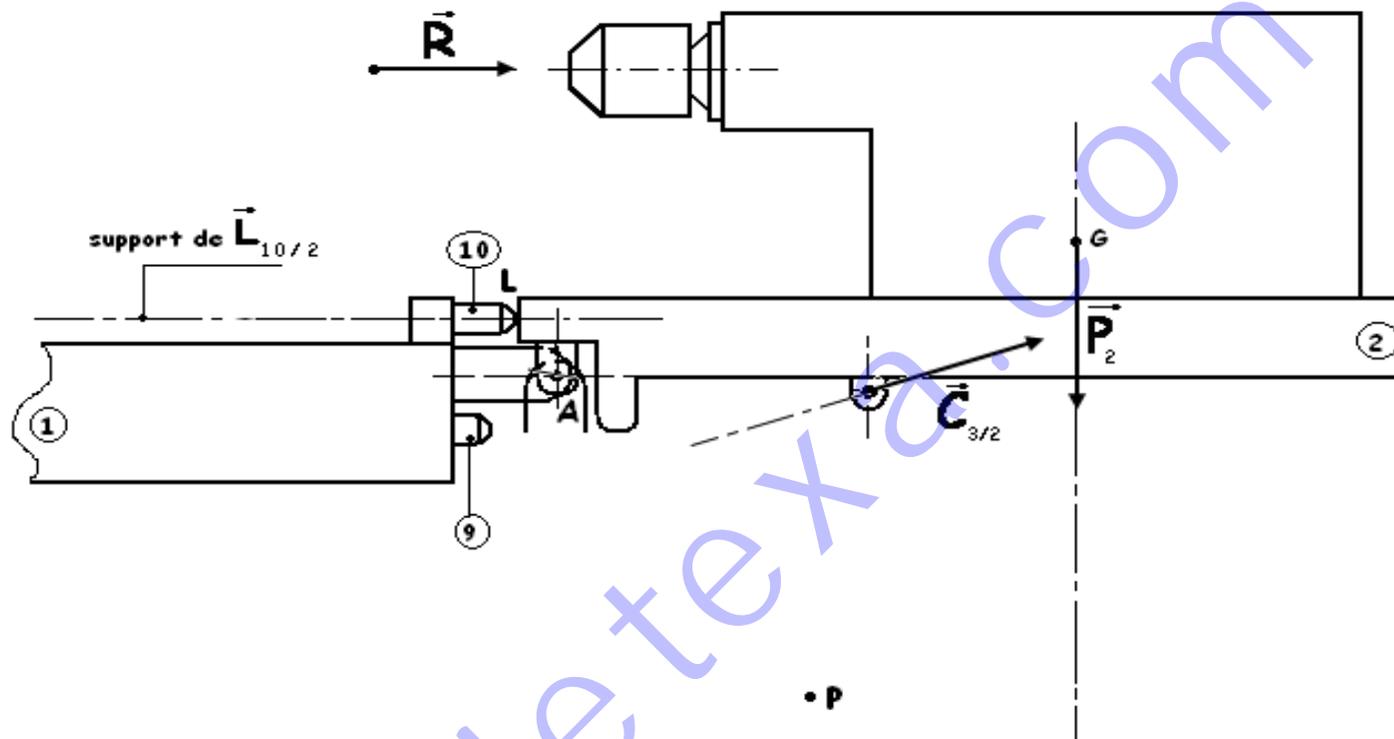
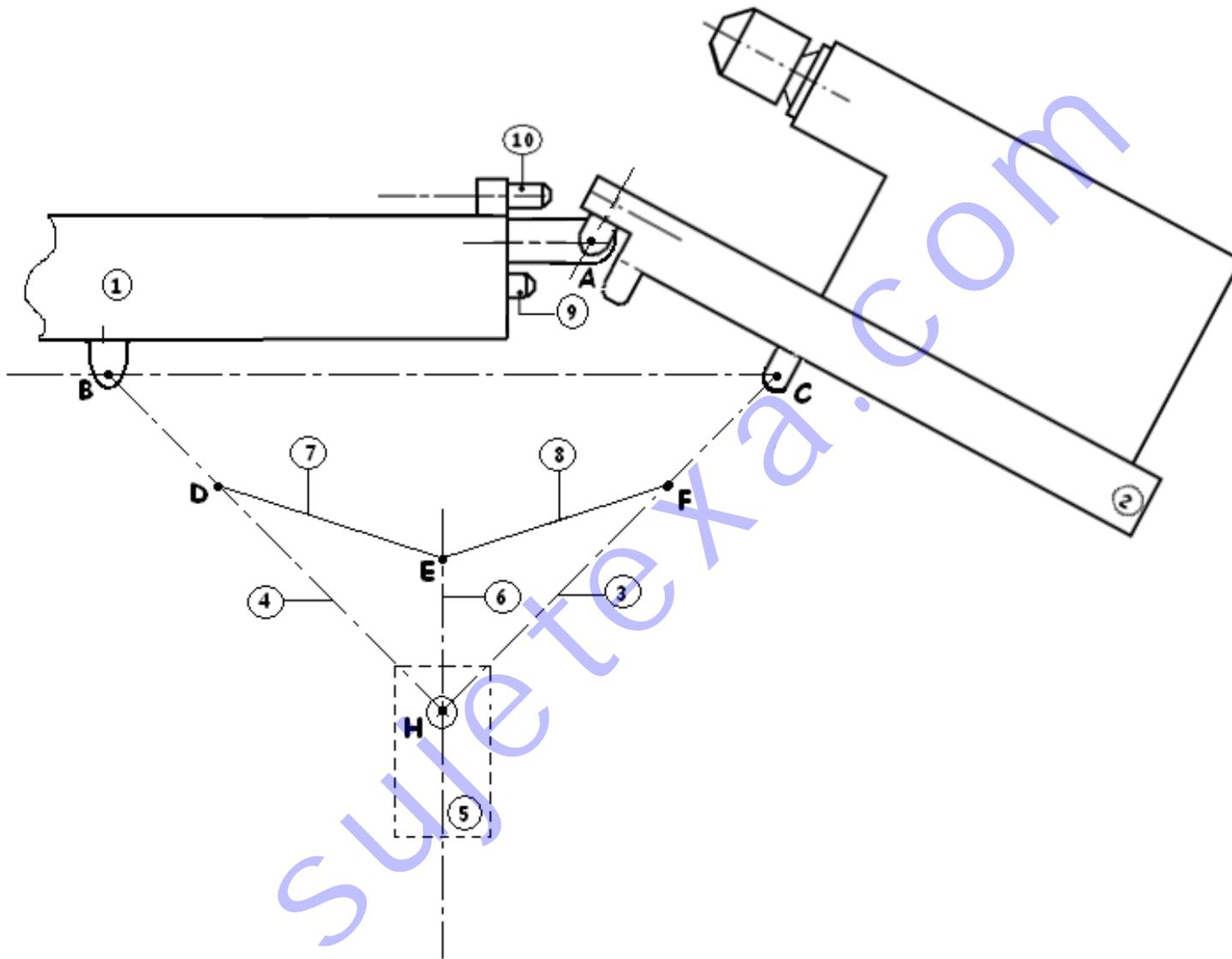


Fig. 2.

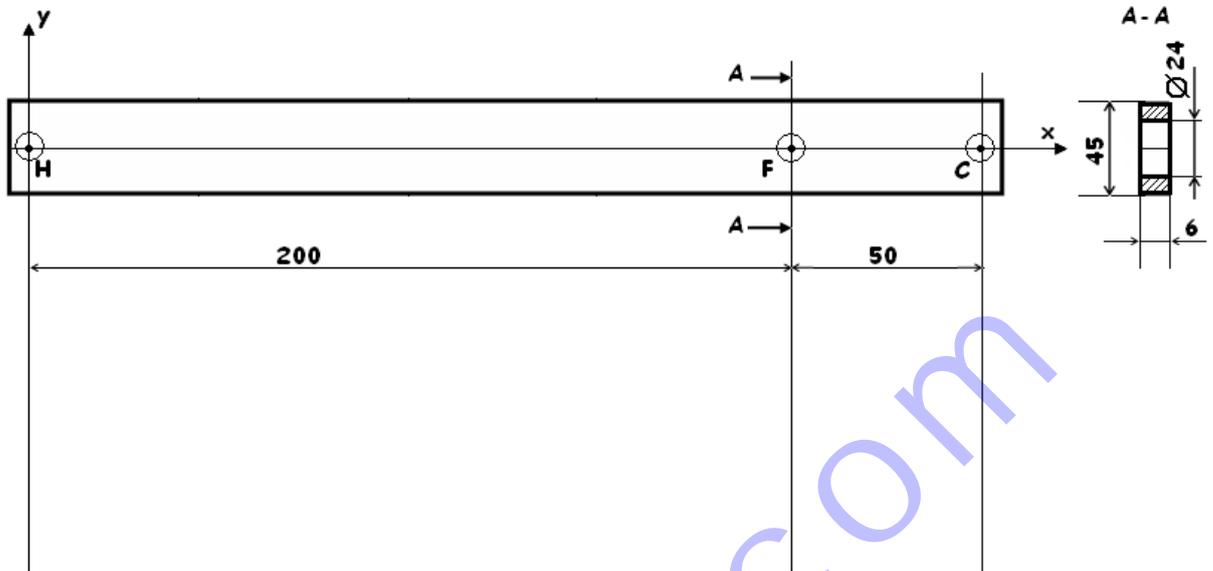


Echelle des vitesses: 1cm  $\longrightarrow$  10mm/s

70

Figure 4

FEUILLE REPONSES



Sujetexa.com

**3- CINEMATIQUE**

(Tracer sur Fig. 3 Feuille Réponses).

Considérons la tête de perçage en position moyenne (fig. 3).  $\|\vec{V}_{E6/5}\| = 15 \text{ mm/s}$ .**3.1- Détermination de  $\vec{V}_{E6/4}$ .****3.1.1- Nature de chacun des mouvements :**

- Mouvement de 5/4.....
- Mouvement de 7/4.....

**3.1.2- Support du vecteur vitesse  $\vec{V}_{E5/4}$  :**.....**3.1.3- Relation de composition de vitesse donnant  $\vec{V}_{E6/4}$  en fonction de  $\vec{V}_{E6/5}$  et  $\vec{V}_{E5/4}$  .....****3.1.4- Comparons  $\vec{V}_{E6/4}$  ;  $\vec{V}_{E7/4}$  et  $\vec{V}_{E8/4}$ .**

.....

.....

**3.1.5- Déterminons graphiquement  $\vec{V}_{E6/4}$  :**

.....

 $\|\vec{V}_{E6/4}\| = \dots\dots\dots$ **3.2- Détermination de  $\vec{V}_{C3/4}$ .****3.2.1- Nature du mouvement de 3/4 :**.....**3.2.2- Support du vecteur vitesse  $\vec{V}_{F3/4}$  :**.....**3.2.3- Comparons  $\vec{V}_{F3/4}$  et  $\vec{V}_{F8/4}$  :**.....**3.2.4- Déterminons par équiprojectivité  $\vec{V}_{F8/4}$  :**..... $\|\vec{V}_{F8/4}\| = \dots\dots\dots$ **3.2.5- Déterminons  $\vec{V}_{C3/4}$  :**..... $\|\vec{V}_{C3/4}\| = \dots\dots\dots$ **3.3- Détermination de la vitesse angulaire de rotation de****2 par rapport à 1 :  $\vec{\omega}_{2/1}$ .****3.3.1- Nature du mouvement de 2 / 1 :**.....

.....

**3.3.2- Support du vecteur vitesse  $\vec{V}_{C2/1}$  (fig. 3).....****3.3.3- Comparons  $\vec{V}_{C2/1}$  et  $\vec{V}_{C3/1}$  .....**

.....

3.3.4- Nature du mouvement de 4/1.....

3.3.5- Support de  $\vec{V}_{C4/1}$ . (fig.3).....

3.3.6- Relation de composition de vitesse entre  $\vec{V}_{C3/1}$ ;  $\vec{V}_{C3/4}$  et  $\vec{V}_{C4/1}$ .

.....  
 .....

3.3.7- On donne  $CA = 100 \text{ mm}$

- Relation entre  $\|\vec{V}_{C2/1}\|$  et  $\|\vec{\omega}_{2/1}\|$  .....
- Dédution de  $\|\vec{\omega}_{2/1}\|$  :.....  $\|\vec{\omega}_{2/1}\| =$ .....

**4- DYNAMIQUE**

Les efforts dû à l'usinage se réduisent en un point quelconque de l'axe du foret à :

- Résultante suivant l'axe du foret :  $\|\vec{R}\| = 240\text{N}$
- Moment résultant suivant l'axe du foret :  $\|\vec{M}\| = 0,5\text{N.m.}$
- Rendement des chaînes cinématiques moteur- foret de vérin- foret : 1.

4.1- Puissance du moteur donnant une vitesse de rotation du foret égale à  $N = 1200 \text{ tr/min}$

.....  
 .....  $P =$ .....

4.2- Travail effectué par le vérin donnant l'avance du foret si la longueur de perçage est de 30mm.....

.....  
 .....  
 .....  $W =$ .....

## CORRIGÉ DU THÈME

## 1- STATIQUE

- $\|\vec{P}_2\| = 300 \text{ N}$ .
- On précise que  $HB = HC = 1 \text{ m}$  ;  $HD = HF = 0,75 \text{ m}$  ;  $ED = EF = 0,5 \text{ m}$ .
- 1.1- Montage en position de départ. (Voir Fig. 1). L'effort de la butée 9 sur 2 est nul.
- 1.1.1- On isole l'ensemble (3+4+5+6+7+8). Support des efforts  $\vec{B}_{1/4}$  et  $\vec{C}_{2/3}$  :  
Ces deux forces sont directement opposées et ont pour support la droite (BC).
- 1.1.2- En précisant bien les différentes pièces isolées et les résultats obtenus après chaque étape de la résolution :

Déterminons l'effort que doit fournir le vérin  $\vec{E}_{6/\text{axe}}$  (effort de la tige 6 du vérin sur l'axe d'articulation E). On commencera par considérer le système (2+ tête de perçage). (Tracer les dynamiques sur la figure 1).

- Equilibre du système (2+ tête de perçage) : P.F.S :  
Ce système est soumis à l'action de trois forces :  $\vec{P}_2$ ;  $\vec{C}_{3/2}$  et  $\vec{A}_{1/2}$  ;  
d'où :  $\vec{P}_2 + \vec{C}_{3/2} + \vec{A}_{1/2} = \vec{0}$  Voir figure 1.

$$\|\vec{C}_{2/3}\| = 175\text{N} \quad \text{et} \quad \|\vec{A}_{1/2}\| = 400\text{N}$$

- Equilibre de la bielle 8 : P.F.S :  
Elle est en équilibre sous l'action de deux forces directement opposées et ayant pour support la droite

$$EF. \text{ D'où : } \|\vec{E}_{\text{axe}/8}\| = \|\vec{F}_{3/8}\|$$

$$\|\vec{H}_{\text{axe}/3}\| = 275\text{N} \quad \text{et} \quad \|\vec{F}_{8/3}\| = 425\text{N}$$

- Equilibre de la pièce 3 : P.F.S :  
Elle est en équilibre sous l'action de trois forces coplanaires et concourantes.

$$\|\vec{E}_{8/\text{axe}}\| = 425\text{N} ; \|\vec{E}_{7/\text{axe}}\| = 425\text{N} ; \|\vec{E}_{6/\text{axe}}\| = 600\text{N}$$

## 1.2- Montage en position de travail. (Voir Figure 2).

On donne certains efforts s'exerçant sur le système :

$$\text{Effort dû à l'usinage : } \|\vec{R}\| = 240\text{N} ; \|\vec{P}_2\| = 300 \text{ N} ; \|\vec{C}_{3/2}\| = 300\text{N}.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0} \Rightarrow \text{Dynamique fermé} \\ \sum \vec{M}_A(\vec{F}_{\text{ext}}) = \vec{0} \Rightarrow \text{Funiculaire fermé} \end{array} \right.$$

$$\vec{A}_{1/2} + \vec{R} + \vec{P}_2 + \vec{C}_{3/2} + \vec{L}_{10/2} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{01} + \vec{12} + \vec{23} + \vec{34} + \vec{40} = \vec{0}$$

$$\|\vec{A}_{1/2}\| = 4425\text{N} ;$$

$$\|\vec{L}_{10/2}\| = 1050\text{N}$$

## 2- RESISTANCE DES MATERIAUX

$$\vec{H}_{\text{axe } / 3} \begin{cases} H_x = -170 \text{ N} \\ H_y = 217,5 \text{ N} \end{cases} ; \vec{F}_{8/3} \begin{cases} F_x = 850 \text{ N} \\ F_y = -1087,5 \text{ N} \end{cases} ; \vec{C}_{2/3} \begin{cases} C_x = -680 \text{ N} \\ C_y = 870 \text{ N} \end{cases}$$

2.1- Construisons le long de la barre 3 les diagrammes de  $N_x$ ,  $T_x$  et  $M_{fz}$ .

(Voir Figure 4).

- Zone HF :  $0 \leq x \leq 200$  :
  - Effort normal :  $N_x = H_x = -170 \text{ N}$  (Traction)
  - Effort tranchant :  $T_y = H_y = 217,5 \text{ N}$
  - Moment fléchissant :  $M_{fz} = -217,5x$
  - Moment fléchissant maximal :  $M_{f_{\max}} = -43500 \text{ N} \cdot \text{mm}$
- Zone FC :  $200 \leq x \leq 250$ 
  - Effort normal :  $N_x = H_x + F_x = 680 \text{ N}$  (Compression)
  - Effort tranchant :  $T_y = H_y + F_y = -870 \text{ N}$
  - Moment fléchissant :  $M_{fz} = -217,5x - 1087,5(200 - x)$   
 $= -870x - 217500$
  - Moment fléchissant maximal :  $M_{f_{\max}} = 0$

2.2- Etude des contraintes dans la section F :

2.2.1- Contraintes dues à l'effort normal :

$$\sigma = \frac{|N_x|}{S} = \frac{680}{126} \quad \text{Donc : } \sigma = 5,4 \text{ N/mm}^2$$

2.2.2- Contrainte normale maximale due au moment de flexion en F :

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{fz}}{\frac{I_{Gz}}{\vartheta}}$$

Or Dans la section considérée on a :

$$M_{fz} = -43500 \text{ N} \cdot \text{mm}, \frac{I_{Gz}}{\vartheta} = \frac{6(45^3 - 24^3)}{12} = 38650,5 \text{ mm}^4$$

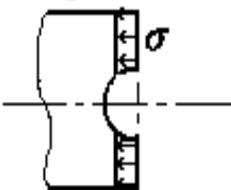
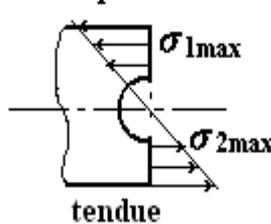
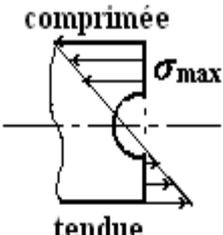
Au dessus de la fibre neutre, on a :  $\vartheta = 22,5 \text{ mm}$ Au dessous de la fibre neutre, on a :  $\vartheta = -22,5 \text{ mm}$ 

Donc :

$$\sigma_{1\max} = 25,35 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-2} : \text{Fibre comprimée}$$

$$\sigma_{2\max} = -25,35 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-2} : \text{Fibre tendue}$$

2.2.3- Donnons les répartitions des contraintes normales,

Pour l'effort normal $N_x$	Pour le moment de flexion $M_{fz}$	Pour les deux
<p>comprimée</p>  <p>tendue</p>	<p>comprimée</p>  <p>tendue</p>	<p>comprimée</p>  <p>tendue</p>

Position départ

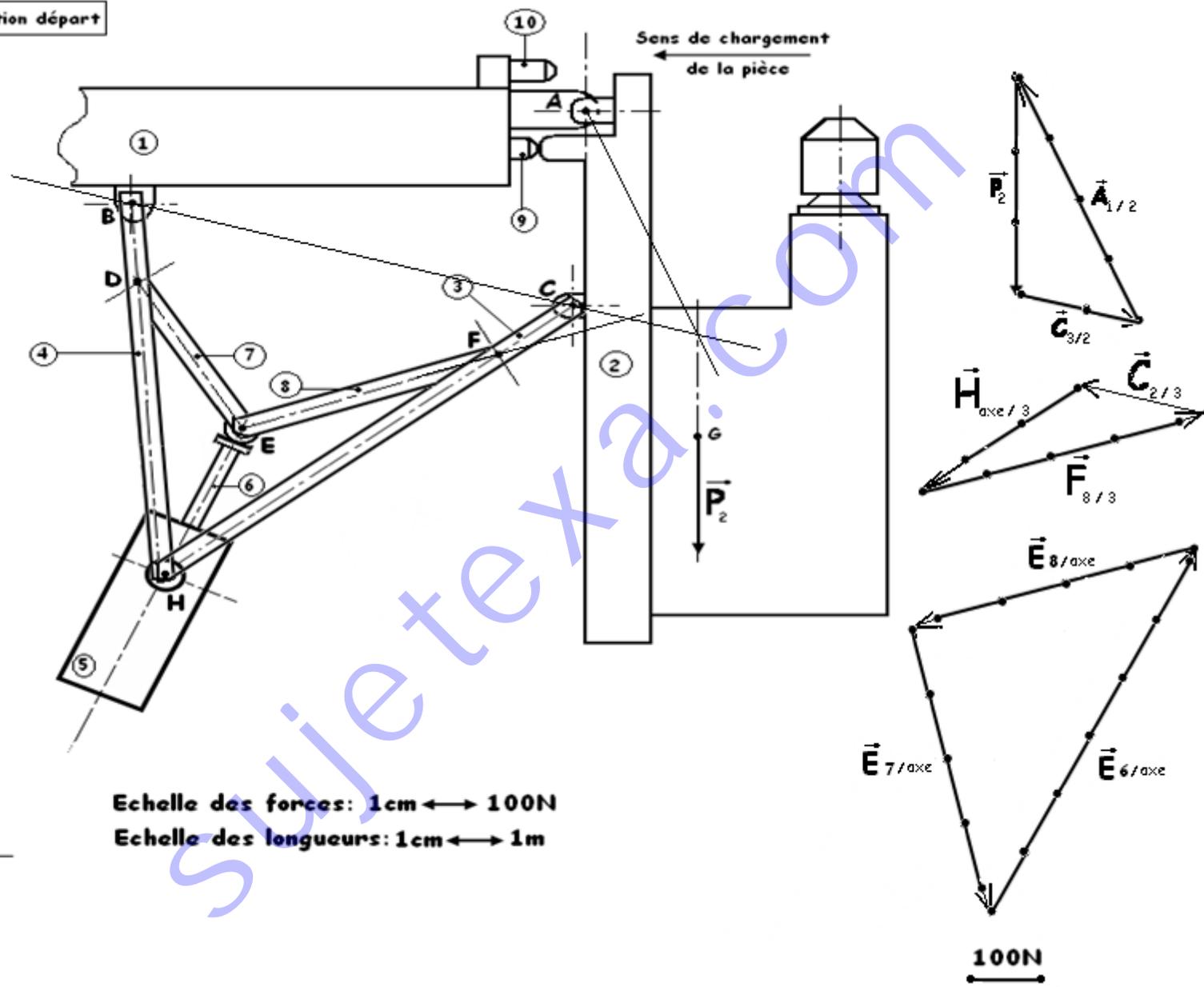


Fig. 1.

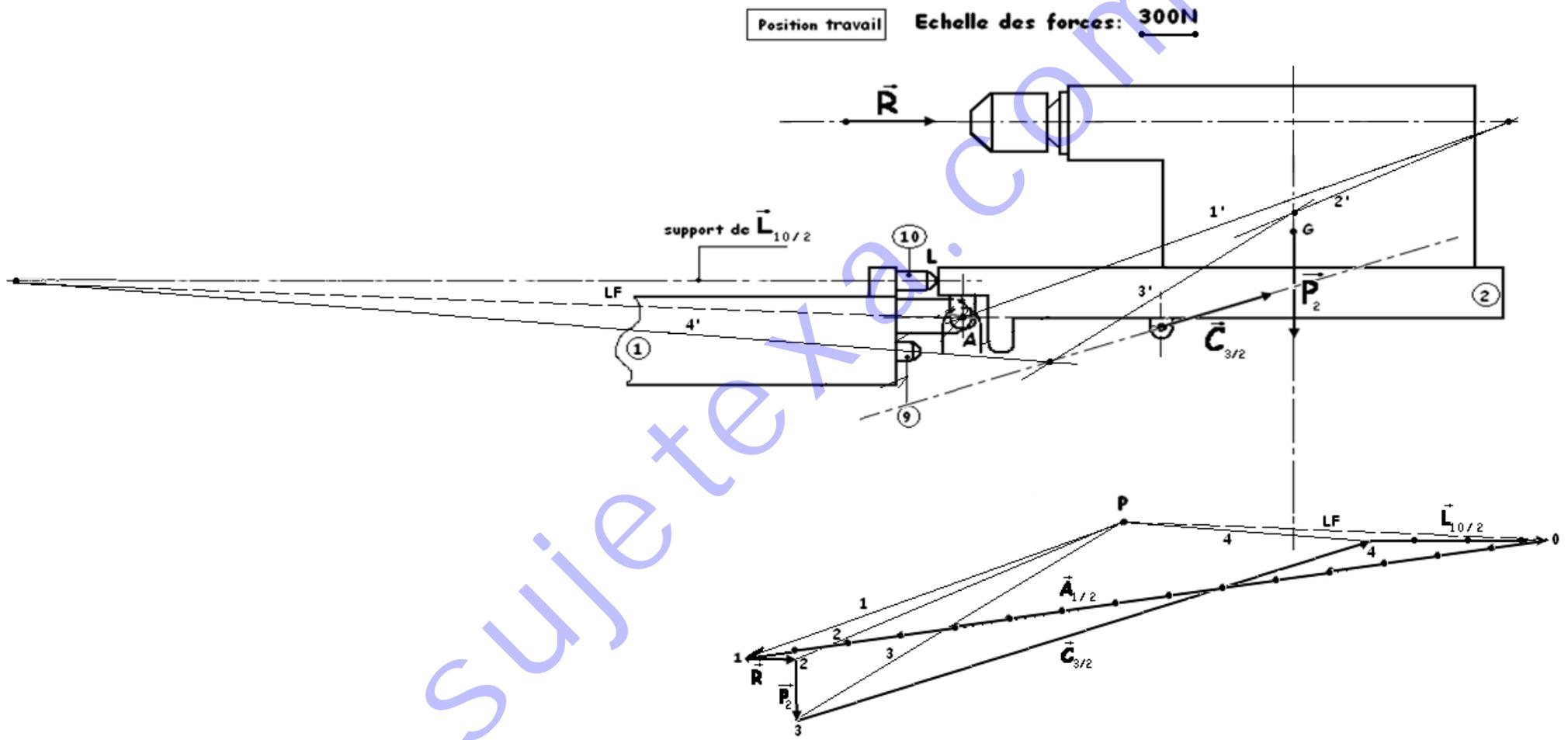
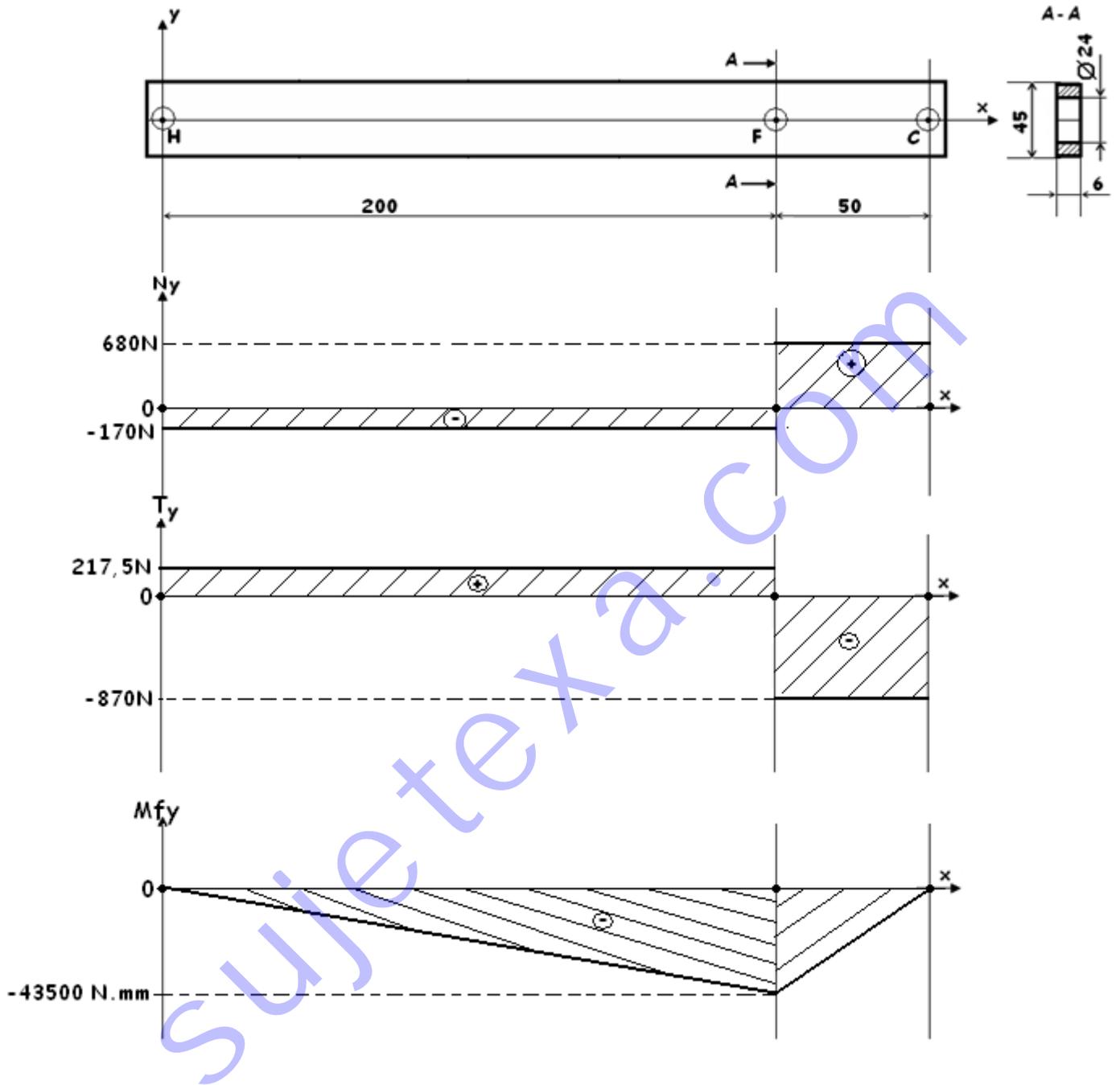


Fig.2.

Figure 4

FEUILLE REPONSES



**3- CINEMATIQUE**

(Tracer sur Fig. 3 Feuille Réponse).

Considérons la tête de perçage en position moyenne (fig. 3).  $\|\vec{V}_{E6/5}\| = 15 \text{ mm/s}$ .**3.1- Détermination de  $\vec{V}_{E6/4}$ .****3.1.1- Nature de chacun des mouvements :**

- Mouvement de 5/4 : *Mouvement de rotation de centre H*
- Mouvement de 7/4 : *Mouvement de rotation de centre D*

**3.1.2- Support du vecteur vitesse  $\vec{V}_{E5/4}$  : *Tangent au cercle de centre H et de rayon HE*****3.1.3- Relation de composition de vitesse donnant  $\vec{V}_{E6/4}$  en fonction**de  $\vec{V}_{E6/5}$  et  $\vec{V}_{E5/4}$  :

$$\text{On a : } \vec{V}_{E6/4} = \vec{V}_{E6/5} + \vec{V}_{E5/4}$$

**3.1.4- Comparons  $\vec{V}_{E6/4}$  ;  $\vec{V}_{E7/4}$  et  $\vec{V}_{E8/4}$ .**

$$\text{On a : } \vec{V}_{E6/4} = \vec{V}_{E7/4} = \vec{V}_{E8/4}$$

**3.1.5- Déterminons graphiquement  $\vec{V}_{E6/4}$  :**

*La liaison entre 7 et 4 est une liaison pivot de centre D, d'où  $\vec{V}_{E6/4} = \vec{V}_{E7/4}$  et leurs support est la perpendiculaire en E à (DE).*

$$\|\vec{V}_{E6/4}\| \simeq 18 \text{ mm/s}$$

**3.2- Détermination de  $\vec{V}_{C3/4}$** **3.2.1- Nature du mouvement de 3/4 : *Mouvement de rotation de centre H*****3.2.2- Support du vecteur vitesse  $\vec{V}_{F3/4}$  : *Tangent au cercle de centre H et de rayon HF*****3.2.3- Comparons  $\vec{V}_{F3/4}$  et  $\vec{V}_{F8/4}$  : On a :  $\vec{V}_{F3/4} = \vec{V}_{F3/8} + \vec{V}_{F8/4}$** 

*Or  $\vec{V}_{F3/8} = \vec{0}$  car F est le centre instantané de rotation de la liaison pivot entre 3 et 8.*

$$\text{Donc : } \vec{V}_{F3/4} = \vec{V}_{F8/4}$$

**3.2.4- Déterminons par équiprojectivité  $\vec{V}_{F8/4}$  : connaissant le support de  $\vec{V}_{F8/4}$** 

$$\|\vec{V}_{F8/4}\| \simeq 35 \text{ mm/s}$$

**3.2.5- Déterminons  $\vec{V}_{C3/4}$  : *Triangle des vitesses***

$$\|\vec{V}_{C3/4}\| \simeq 43,5 \text{ mm/s}$$

**3.3- Détermination de la vitesse angulaire de rotation de 2 par rapport à 1 :  $\vec{\omega}_{2/1}$** **3.3.1- Nature du mouvement de 2 / 1 : *Mouvement de rotation de centre A*****3.3.2- Support du vecteur vitesse  $\vec{V}_{C2/1}$  (fig. 3)****3.3.3- Comparons  $\vec{V}_{C2/1}$  et  $\vec{V}_{C3/1}$  On a :  $\vec{V}_{C2/1} = \vec{V}_{C2/3} + \vec{V}_{C3/1}$** 

*Or  $\vec{V}_{C2/3} = \vec{0}$  car F est le centre instantané de rotation de la liaison pivot entre 3 et 8.*

$$\text{Donc : } \vec{V}_{C2/1} = \vec{V}_{C3/1}$$

3.3.4- Nature du mouvement de 4/1 : *Mouvement de rotation de centre B.*

3.2.6- Support de  $\vec{V}_{C4/1}$ . (fig. 3) : *Tangent au cercle de centre B et de rayon BC.*

3.3.5- Relation de composition de vitesse entre  $\vec{V}_{C3/1}$ ;  $\vec{V}_{C3/4}$  et  $\vec{V}_{C4/1}$ .

$$\text{On a : } \vec{V}_{C3/1} = \vec{V}_{C3/4} + \vec{V}_{C4/1}$$

3.3.6- On donne  $CA = 100 \text{ mm}$

- Relation entre  $\|\vec{V}_{C2/1}\|$  et  $\|\vec{\omega}_{2/1}\|$  ; On a :  $\|\vec{V}_{C2/1}\| = \|\vec{CA}\| \cdot \|\vec{\omega}_{2/1}\|$
- Dédution de  $\|\vec{\omega}_{2/1}\|$  :  $\|\vec{\omega}_{2/1}\| = \frac{\|\vec{V}_{C2/1}\|}{\|\vec{CA}\|} = \frac{52}{126}$  ; Donc :  $\|\vec{\omega}_{2/1}\| = 0,412 \text{ rad/s}$

#### 4- DYNAMIQUE

Les efforts dû à l'usinage se réduisent en un point quelconque de l'axe du foret à :

- Résultante suivant l'axe du foret :  $\|\vec{R}\| = 240 \text{ N}$
- Moment résultant suivant l'axe du foret :  $\|\vec{M}\| = 0,5 \text{ N.m.}$
- Rendement des chaînes cinématiques moteur- foret de vérin- foret : 1.

4.1- Puissance du moteur donnant une vitesse de rotation du foret égale à  $N = 1200 \text{ tr/min.}$

On a :  $P_{\text{moteur}} = P_{\text{rotation du foret}}$

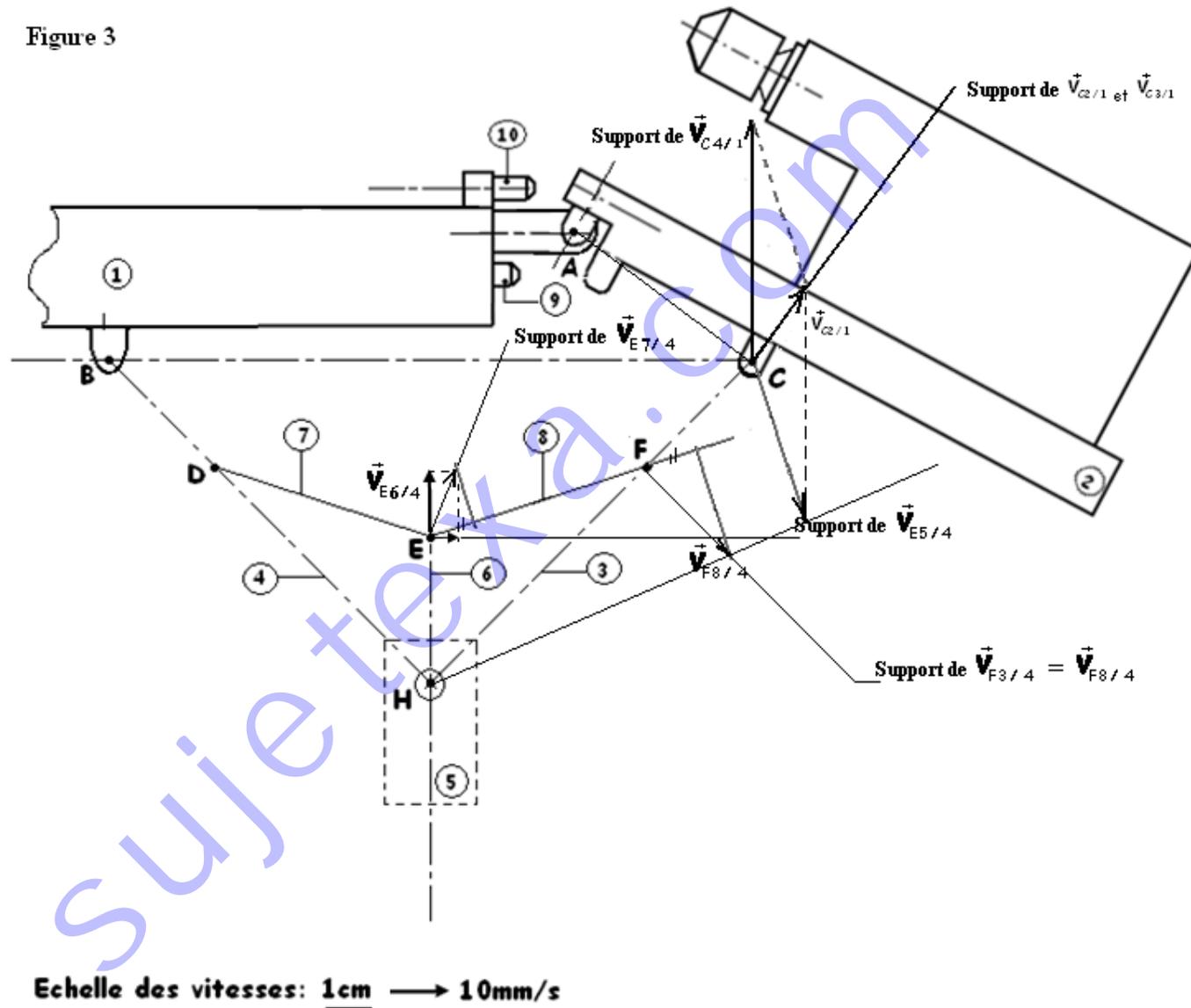
$$P = \|\vec{M}\| \cdot \|\vec{\omega}\| ; \quad \text{Or } \|\vec{\omega}\| = \frac{\pi N}{30} ; \quad \text{Donc : } P = 62,8 \text{ W}$$

4.2- Travail effectué par le vérin donnant l'avance du foret si la longueur de perçage est de 30mm.

On a :  $W_{\text{moteur}} = W_{\text{translation du foret}}$

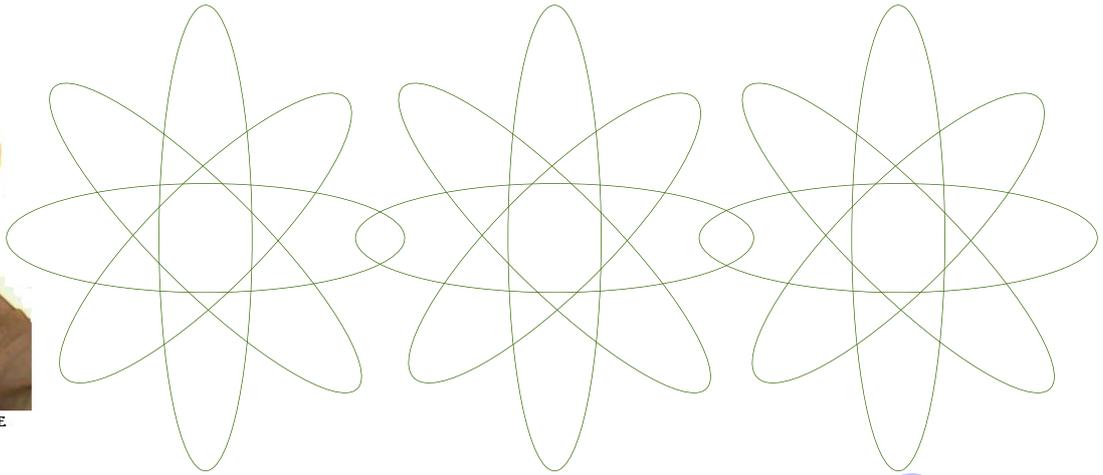
$$\|\vec{\omega}\| = \|\vec{R}\| \cdot l ; \quad \text{Donc : } W = 7,2 \text{ J}$$

Figure 3





NGINKELI YOPA DUCLAIRE



Par le même auteur :

- L'ABAQUE - Mécanique Appliquée Secondes
- L'ABAQUE - Dessin et Technologie de Construction Mécanique Secondes
- L'ABAQUE - Mécanique Appliquée Premières
- L'ABAQUE - Dessin de Construction Mécanique Premières
- L'ABAQUE - Mécanique Appliquée Terminales

Riches en éléments de cours complets, en exercices d'applications souples et en exercices de consolidations bien sélectionnés, ces supports didactiques sont adaptés pour faciliter l'apprentissage, la recherche et surtout la préparation du probatoire de BT, du BT ; du probatoire F et du baccalauréat F.

L'élève et même le pédagogue y trouveront en outre quelques sujets d'examen inédits et corrigés pour une bonne imprégnation.