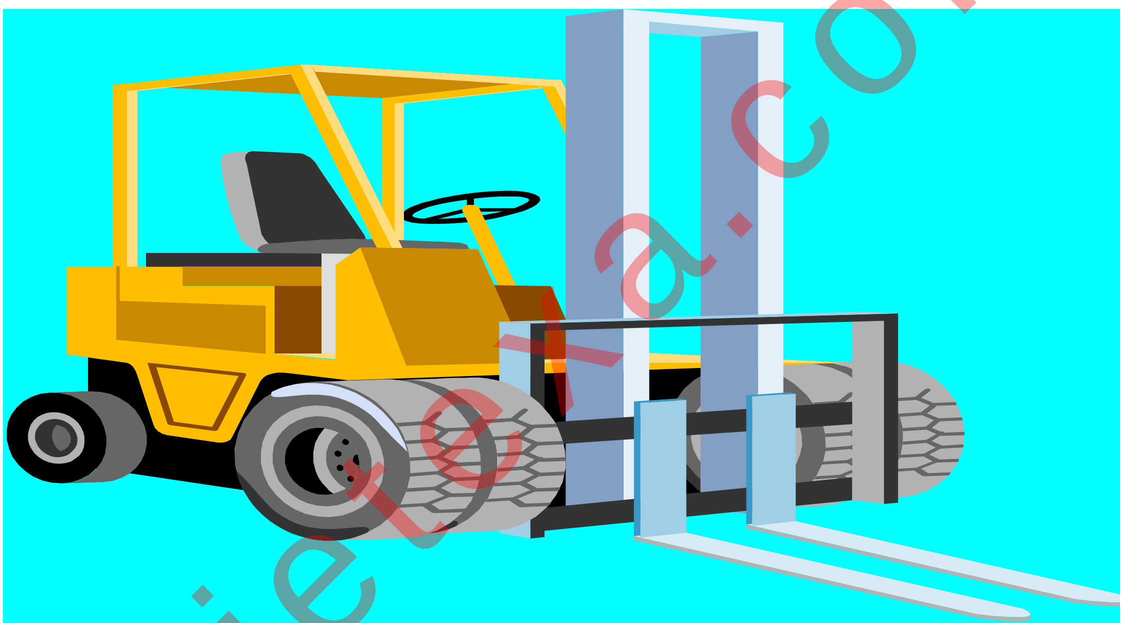
COLLECTION L'ABAQUE

MECANIQUE APPLIQUEE 2$^{\text{ndes}}$



L'ABAQUE

NGNINKEU YOPA DUCLAIRE
(Professeur des lycées et collèges d'enseignement technique au Cameroun)

Edition Duc Yopa Edition 2009

PROGRAMME CAMEROUNAIS

COLLECTION L'ABAQUE

MECANIQUE APPLIQUEE 2ndes

L'auteur :

NGNINKEU YOPA DUCLAIRE : Professeur de Construction Mécanique au Lycée Technique de Sangmélima ; Maître en droit des Affaires.

Mes remerciements à :

- **M. Luc MEKAH,**

Proviseur du lycée technique de Sangmélima

- **DASSI JEAN MARIE** : Professeur de Construction et Fabrication Mécanique ; Animateur pédagogique du département de Construction et Fabrication Mécanique au Lycée Technique de Sangmélima.
- **M.SIMO** : Inspecteur pédagogique provincial du centre.

Edition 2009

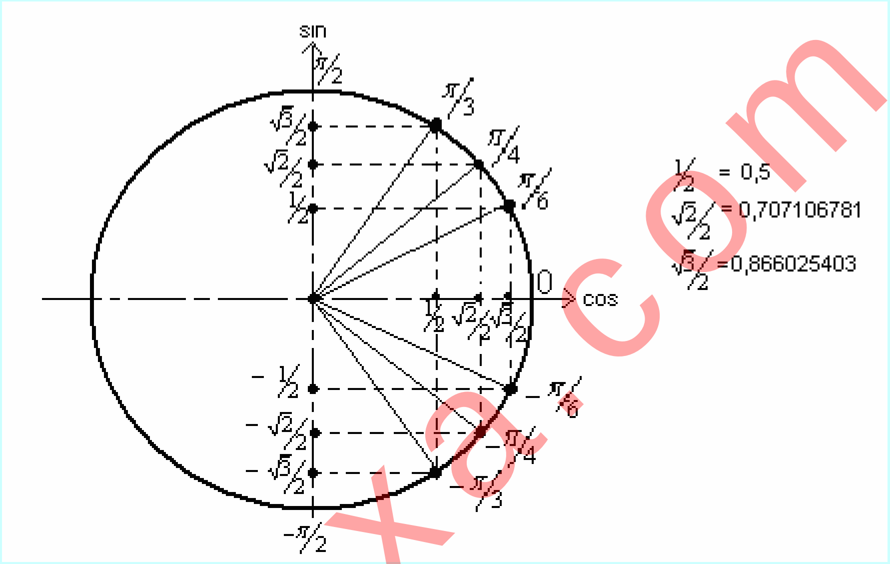
Edition Duc Yopa : Tels : 99 63 05 77/ 74 42 54 50 ; Courriel : ducyopa@yahoo.fr

TABLE DES MATIERES

Chapitre 1 — Notion de trigonométrie

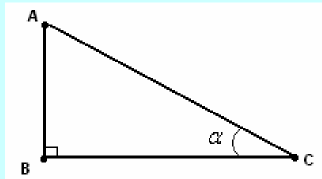
Objectif : Se familiariser à la manipulation des sinus, cosinus et tangente d'un angle.

1- Cercle trigonométrique :



2- Théorème de Pythagore pour les triangles rectangles :

Soit le triangle (ABC) rectangle en B ci contre ;



Soit l'angle α de ce triangle ; on a :

- AB= Côté opposé à l'angle α
- AC= Hypoténuse
- BC= Côté adjacent à l'angle α .

$$\cos\alpha = \frac{BC}{AC}$$

$$\sin\alpha = \frac{AB}{AC}$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{AB}{BC}$$

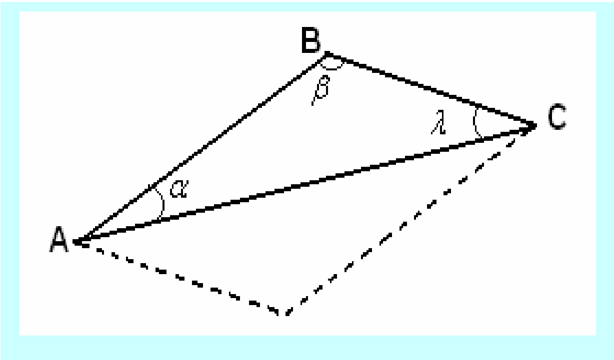
Les valeurs du cosinus ; sinus et tangentes sont données par les relations :

Dans tout triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.

D'où $AC^2 = AB^2 + BC^2$

3- Théorème de Pythagore généralisé pour un triangle quelconque :

- Dans un triangle quelconque, la relation entre les sinus des angles aux sommets est :



$$\frac{\sin\alpha}{\left|\overrightarrow{BC}\right|} = \frac{\sin\beta}{\left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{\sin\lambda}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}$$

- Le théorème de Pythagore généralisé est :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2.\left\|\overrightarrow{AB}\right\|.\left\|\overrightarrow{BC}\right\|.\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$$

4- Valeurs trigonométriques des angles remarquables :

x° (rad)	30° ($\pi/6$)	45° ($\pi/4$)	60° ($\pi/4$)	90° ($\pi/4$)	180° (π)	360° (2π)
sin x	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0	0
cos x	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0	-1	1
tan x	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	impossible	0	0
Cotan x	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/3$	0	impossible	impossible

<u>N.B</u> : ce chapitre est un pré requis pour mieux commencer notre cours de mécanique appliquée en classe de seconde; raison pour laquelle les exercices d'application et de consolidation y relatif seront découverts dans les chapitres suivants.

Chapitre 2 Notion sur les vecteurs

Objectif : Effectuer les opérations sur les vecteurs.

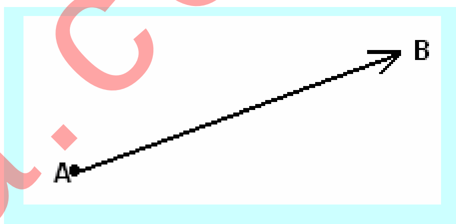
1- Définitions :

1.1- Vecteur :

Un vecteur est un bipoint c.a.d. un ensemble ordonné de points. Il est caractérisé par :

- Son origine ou point d'application ;
- Sa direction qui est la droite passant par les deux points ;
- Son sens ;
- Son module ou son intensité qui est encore la longueur du segment représenté par les deux points.

Exemple :

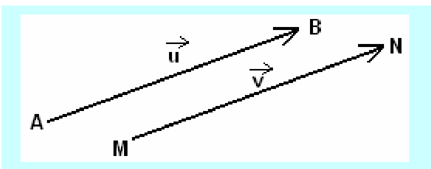


- Point d'application : A
- Direction : La droite AB
- Sens : de A vers B
- Module : $\|\overrightarrow{AB}\|$ = distance AB

1.2- Vecteurs équipollents:

Deux vecteurs sont équipollents s'ils ont des directions parallèles, même sens et même module.

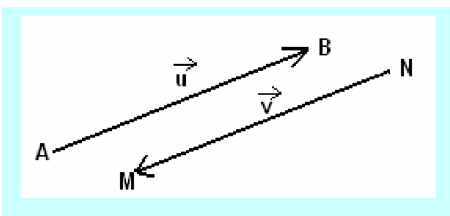
Exemple : Les deux vecteurs ci-dessous sont équipollents.



1.3- Vecteurs opposés:

Deux vecteurs sont opposés s'ils ont des directions parallèles, de même module, mais de sens opposés.

Exemple : Les deux vecteurs ci-contre sont opposés.



1.4- Vecteurs colinéaires :

Deux vecteurs sont colinéaires si leurs directions sont parallèles ou confondues.

Remarques :

- Deux vecteurs équipollents sont colinéaires.
- Deux vecteurs opposés sont colinéaires.
- Les vecteurs colinéaires ne sont pas nécessairement équipollents, encore moins opposés.
- Deux vecteurs sont égaux s'ils sont équipollents.

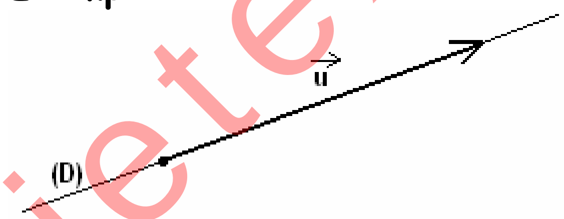
1.5- Vecteur libre :

Un vecteur est dit libre s'il est caractérisé seulement par sa direction, son sens et son module. Il n'est donc pas lié à un point.

1.6- Vecteur glissant :

Un vecteur est glissant si c'est un vecteur libre pour lequel la direction est imposée par une droite donnée.

Exemple :



$\vec{u}$ **est vecteur libre et glissant.**

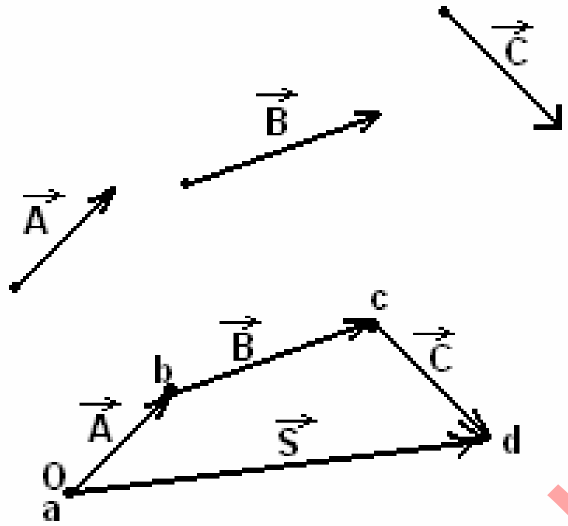
2- Opération sur les vecteurs :

2.1- Somme de vecteurs et propriétés de la somme vectorielle :

2.1.1- Somme de vecteurs :

Soient $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$, des vecteurs liés, glissants ou libres :Par un point O quelconque de l'espace, on trace les vecteurs $\overrightarrow{ab} \equiv \vec{A}$, $\overrightarrow{bc} \equiv \vec{B}$ et $\overrightarrow{cd} \equiv \vec{C}$. Par définition, la somme géométrique des vecteurs $\vec{A}$, $\vec{B}$ et $\vec{C}$ est le vecteur $\vec{S} \equiv \overrightarrow{ad}$ qui joint l'extrémité O à d.

$$\vec{S} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$$



Remarques :

- Cette opération s'étend à un nombre quelconque de vecteurs.
- Le polygone (a, b, c, d) est appelé **polygone des vecteurs** ou **dynamique des vecteurs.**

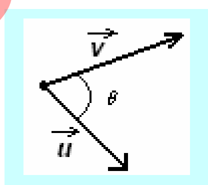
2.1.2- Propriétés de la somme vectorielle :

- Commutativité : $\vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A}$.
- Associativité : $\vec{A}+(\vec{B}+\vec{C})=(\vec{A}+\vec{B})+\vec{C}$.
- Distributivité : $\lambda(\vec{A}+\vec{B})=\lambda\,\vec{A}+\lambda\,\vec{B}, \forall\, \lambda \in \mathbb{R}$

2.2- Produit scalaire de deux vecteurs :

2.2.1- Définition :

Le produit scalaire des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ci-dessous est le nombre $\vec{u}.\vec{v}$ défini par :



$$\vec{u}.\vec{v} = u.v.\cos\left(\widehat{u,v}\right)$$

2.2.2- Propriétés du produit scalaire :

- $\vec{u}.\vec{v}=\vec{v}.\vec{u}$
- $\vec{u}.\vec{u}=u^2$
- $\vec{u}(\lambda.\vec{v})=\lambda(\vec{u}.\vec{v}), \forall\, \lambda \in \mathbb{R}$

2.2.3- Calcul analytique du produit scalaire :

Soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ définis par leurs coordonnées : $\vec{u}(x, y, z)$ et $\vec{v}(x', y', z')$

On a :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

Remarques :

- **Le produit scalaire de deux vecteurs donne un scalaire.**
- **Le produit vectoriel sera abordé lors de l'étude de la notion de forces.**

2- Module d'un vecteur :

- Soit un vecteur $\overrightarrow{AB}$ représenté par deux points A et B dont on connaît les coordonnées dans un espace donné : A (x_A ;y_A ;z_A) et B (x_B ;y_B ;z_B)

$$\overrightarrow{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

- Soit un vecteur $\vec{u}(x, y, z)$ $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Applications

Exercice 1 :

En utilisant le produit scalaire, déterminer les cosinus des angles α , β et λ formés respectivement par le vecteur $\vec{u}(3,2,0)$ et chacun des axes Ox, Oy, Oz .

Solution Exercice 1 :

On a : $$\begin{aligned} Ox &\Leftrightarrow \vec{i}\,(1,0,0) \\ Oy &\Leftrightarrow \vec{j}\,(0,1,0) \\ Oz &\Leftrightarrow \vec{k}\,(0,0,1) \end{aligned}$$

- $\vec{u}.\vec{i} = 3x1 + 2x0 + 0x0 = 3$ et $\vec{u}.\vec{i} = \|\vec{u}\|.\|\vec{i}\|.\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{\vec{u}.\vec{i}}{\|\vec{u}\|.\|\vec{i}\|}$

Or $\begin{aligned} \|\vec{u}\| &= \sqrt{3^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{13} \\ \|\vec{i}\| &= \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} = 1 \end{aligned}$ d'où $\cos\alpha = \dfrac{3}{1x\sqrt{13}}$ Donc $\cos\alpha = \dfrac{3\sqrt{13}}{13}$

- $\vec{u}.\vec{j} = 3x0 + 2x1 + 0x0 = 2$ et $\vec{u}.\vec{j} = \|\vec{u}\|.\|\vec{j}\|.\cos\beta \Rightarrow \cos\beta = \dfrac{\vec{u}.\vec{j}}{\|\vec{u}\|.\|\vec{j}\|}$

Or $\|\vec{u}\| = \sqrt{3^2+2^2+0^2} = \sqrt{13}$; $\|\vec{j}\| = \sqrt{0^2+1^2+0^2} = 1$ d'où $\cos\beta = \dfrac{2}{1x\sqrt{13}}$

Donc : $\cos\beta = \dfrac{2\sqrt{13}}{13}$

- $\vec{u}.\vec{k} = 3x0 + 2x0 + 0x1 = 0$ et

$\vec{u}.\vec{k} = \|\vec{u}\|.\|\vec{k}\|.\cos\lambda \Rightarrow \cos\lambda = \dfrac{\vec{u}.\vec{k}}{\|\vec{u}\|.\|\vec{k}\|} = \dfrac{0}{1x\sqrt{13}} = 0$

Donc : $\cos\lambda = 0$

Exercice 2 :

Dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on donne les vecteurs $\vec{u}(2,-4,-1)$ et $\vec{v}(4,2,-2)$

1- Calculer le produit scalaire $\vec{u}.\vec{v}$.

2- Calculer le cosinus de l'angle $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$.

3- En déduire l'angle $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$.

Solution Exercice 2 :

1- $\vec{u}.\vec{v} = 2x4 + (-4x2) + (-1x(-2))$; Donc : $\vec{u}.\vec{v} = 2$

2- On a :

$\|\vec{u}\| = \sqrt{2^2+(-4)^2+(-1)^2} = \sqrt{21}$ et $\|\vec{v}\| = \sqrt{4^2+2^2+(-2)^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

Or $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$

D'où $\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|}$ A.N : $\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \dfrac{2}{2\sqrt{6}x\sqrt{21}} = \dfrac{1}{\sqrt{126}} = \dfrac{\sqrt{126}}{126}$

Donc : $\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \dfrac{\sqrt{126}}{126}$ ou $\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = 0,089$

3- D'où $mes(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = 84,888°$

Chapitre 3 Notion de force

Objectif :

Appliquer les opérations sur les vecteurs aux forces et les étendre au produit vectoriel.

1- Définition :

La force est une grandeur vectorielle capable de provoquer le mouvement d'un corps, de le modifier ou de le maintenir au repos. Ainsi apparaît-elle comme un moyen de rendre compte de l'action mutuelle entre deux ou plusieurs corps.

2- Caractéristiques d'une force :

Une force est caractérisée par :

- Son point d'application
- Sa direction
- Son sens
- Son module ou intensité.

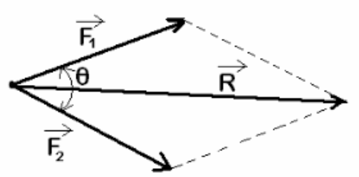
Remarque :

La force étant un vecteur, les opérations sur les forces sont les mêmes que celles sur les vecteurs. **L'unité de la force est le newton (N)**

3- Résultante de plusieurs forces :

3.1- Cas de deux forces :

Soient deux forces $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$ formant entre elles un angle θ et $\vec{R}$ leur résultante.



- Si $\theta = 0 \Rightarrow \cos\theta = 0$, les forces ont même direction et même sens.
- Si $0 \leq \theta \leq 90° \Rightarrow \cos\theta$ >0, les forces n'ont pas même direction mais ont même sens.
- Si $90° \leq \theta \leq 180° \Rightarrow \cos\theta$ <0, les forces n'ont pas le même sens, encore moins les mêmes directions.
- Si $\theta = 180° \Rightarrow \cos\theta = -1$, les forces ont même direction mais de sens opposés.

La résultante est toujours : $R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2.F_1.F_2.\cos\theta}$

3.2- Cas de trois forces et plus :

Pour avoir la résultante de plus de deux forces, on les regroupe deux à deux, puis on procède aux résultantes des résultantes (Figure 1).On peut aussi directement faire la somme géométrique des vecteurs forces (Figure 2).

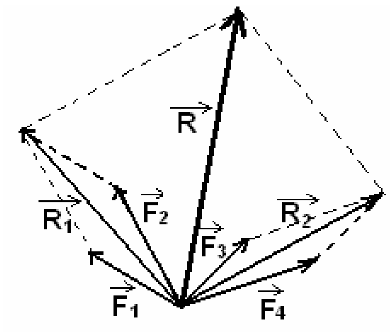


Figure 1

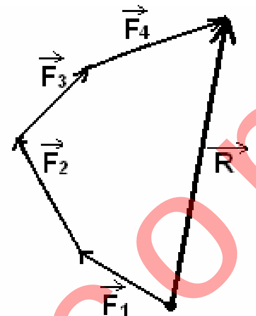
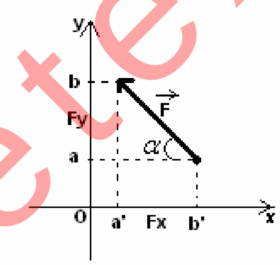


Figure 2

4- Projection d'une force sur un plan :

Dans un repère orthonormé (Ox, Oy), on peut projeter une force $\vec{F}$:



$Fx = -F.\cos\alpha$

$Fy = F.\sin\alpha$

$F^2 = Fx^2 + Fy^2$

Fx et Fy sont les composantes de F dans le repère (Ox, Oy).

Application

Dans un repère orthonormé (Ox, Oy) un solide (S) est soumis aux forces $\vec{P}$; $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$; telles que :

$$\vec{P}\left|\begin{array}{l} Px = 0 \\ Py = 1000N \end{array}\right. ; \vec{F_1}\left|\begin{array}{l} F_1x = 1200N \\ F_1y = -500N \end{array}\right. ; \vec{F_2}\left|\begin{array}{l} F_2x = -1000N \\ F_2y = -100N \end{array}\right. .$$

Trouver les composantes de la résultante $\vec{R}$ de ces trois forces.

Solution :

On a : $\vec{R}\left|\begin{array}{l}\vec{R}x = Px + F_1x + F_2x \\ \vec{R}y = Py + F_1y + F_2y\end{array}\right.$

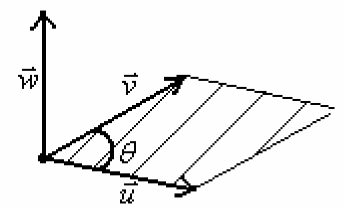
D'où $\vec{R}\begin{pmatrix} R_x = 0 + 1200 - 1000 \\ Ry = 1000 - 500 - 100 \end{pmatrix}$ Donc : $\vec{R}\left|\begin{array}{l}\vec{R}x = 200\,N \\ \vec{R}y = 400\,N\end{array}\right.$

5- Moment d'une force :

5.1- Produit vectoriel de deux vecteurs :

5.1.1- Définition :

Le produit vectoriel du vecteur $\vec{u}$ par le vecteur $\vec{v}$ est le vecteur $\vec{w}$ noté $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$. **On lit : $\vec{u}$ vectoriel $\vec{v}$**. Son module est :



$$w = u.v.\sin(\vec{u}, \vec{v})$$

Le produit vectoriel est un vecteur normal au plan contenant $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et de sens donné par celui de l'avancement de la vis ou du tire-bouchon lorsqu'on tourne de $\vec{u}$ vers $\vec{v}$.

5.1.2- Propriétés du produit vectoriel :

- $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{w}$
- $\vec{v} \wedge \vec{w} = \vec{u}$
- $\vec{w} \wedge \vec{u} = \vec{v}$
- $\vec{u} \wedge (\lambda\,\vec{v}) = \lambda\,(\vec{u} \wedge \vec{v})$
- $\vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{0}$
- $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$

5.1.3- Calcul analytique du produit vectoriel :

Soient les vecteurs représentés par leurs coordonnées : $\vec{u}(x, y, z)$ et $\vec{v}(x', y', z')$:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}\left|\begin{array}{c} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{array}\right.(-) = (yz' - zy')\vec{i} - (xz' - zx')\vec{j} + (xy' - yx')\vec{k}$$

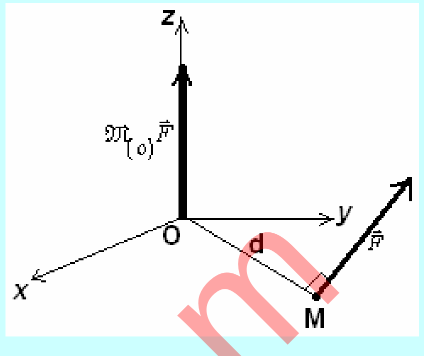
D'où :

$$w = \vec{u} \wedge \vec{v} = (yz' - zy')\vec{i} - (xz' - zx')\vec{j} + (xy' - yx')\vec{k}$$

5.2- Moment d'une force par rapport à un point :

Le moment d'une force $\vec{F}$ d'origine M par rapport à un point fixe O est le vecteur d'origine O défini par :

$$\vec{\mathfrak{M}}_{(o)}\vec{F} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$$



$$\left\|\vec{A}_{2/1}\right\| = \left\|\vec{A}_{1/2}\right\|$$

Son module peut s'écrire :

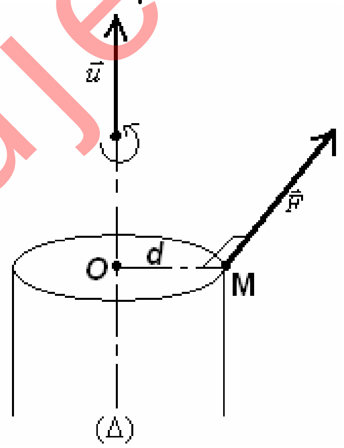
$$\mathfrak{M}_{(o)}\vec{F} = \pm\left\|\vec{F}\right\|.d$$

$\left\|\vec{\mathfrak{M}}_{(o)}\vec{F}\right\|$ en N.m (Newton fois mètre).

d est appelé longueur du bras de levier.

5.3- Moment d'une force par rapport à une droite ou à un axe :

Le moment d'une force par rapport à un axe (Δ) fixe perpendiculaire au plan qu'il coupe en O est égal au produit scalaire du moment de la force par rapport au point O par le vecteur directeur de la droite. C'est aussi le produit du bras de levier par l'intensité de la force.



$$\mathfrak{M}_{(\Delta)}\vec{F} = \pm\left\|\vec{F}\right\|.d$$

$$\left\|\vec{\mathfrak{M}}_{(\Delta)}\vec{F}\right\| = (\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}).\vec{u}$$

$\left\|\vec{\mathfrak{M}}_{(\Delta)}\vec{F}\right\|$ en N.m (Newton fois mètre)

Remarques :

- Le produit vectoriel est un vecteur ; par conséquent **le moment d'une force par rapport à un point est un vecteur.**
- Le produit scalaire étant un scalaire, **le moment d'une force par rapport à un axe est un scalaire.**
- Si le support de la force est parallèle à l'axe ou si sa direction rencontre le point O, le moment de la force est nul.

Applications

Exercice 1 :

Dans le repère orthonormé (O, x, y, z), on donne un point M et une force $\vec{F}$ appliquée en A tels que $M\begin{pmatrix}4\\5\\-1\end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix}3\\-2\\5\end{pmatrix}$, $\vec{F}\begin{pmatrix}-4\\3\\7\end{pmatrix}$

1- Déterminer le vecteur moment de la force $\vec{F}$ par rapport au point M.

2- Déterminer les moments de la force $\vec{F}$ successivement par rapport aux axes Mx, My, Mz.

Solution Exercice 1 :

1- On a : $\vec{\mathfrak{M}}_{(M)}\vec{F} = \overrightarrow{MA} \wedge \vec{F}$.

$\overrightarrow{MA}\begin{pmatrix}-1\\-7\\6\end{pmatrix}$ et $\vec{F}\begin{pmatrix}-4\\3\\7\end{pmatrix}$ d'où : $\begin{pmatrix}-1\\-7\\6\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}-4\\3\\7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-67\\-17\\-31\end{pmatrix}$

Donc : $\vec{\mathfrak{M}}_{(M)}\vec{F} = \begin{pmatrix}-67\\-17\\-31\end{pmatrix}$

2-

- Rappelons que l'axe Mx est porté par le vecteur $\vec{i}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

D'où $\mathfrak{M}_{(Mx)}\vec{F} = (\vec{\mathfrak{M}}_{(M)}\vec{F}).(\vec{i}) = \begin{pmatrix}-67\\-17\\-31\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = -67+0+0$

Donc : $\mathfrak{M}_{(Mx)}\vec{F} = -67$ En unité légale (N.m)

- Rappelons que l'axe My est porté par le vecteur $\vec{j}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

D'où $\mathfrak{M}_{(My)}\vec{F} = (\vec{\mathfrak{M}}_{(M)}\vec{F}).(\vec{j}) = \begin{pmatrix}-67\\-17\\-31\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = 0-17+0$

Donc : $\mathfrak{M}_{(My)}\vec{F} = -17$ En unité légale (N.m)

- Rappelons que l'axe Mz est porté par le vecteur $\vec{k}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

D'où $\mathfrak{M}_{(Mz)}\vec{F} = (\vec{\mathfrak{M}}_{(M)}\vec{F}).(\vec{k}) = \begin{pmatrix}-67\\-17\\-31\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = 0+0-31$

Donc : $\mathfrak{M}_{(Mz)}\vec{F} = -31$ En unité légale (N.m)

Exercice 2 :

Dans le repère orthonormé $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on donne les points A (2, 2,2) et M (-1,-1,-1). M étant l'origine de la force $\vec{F} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$.

1- Calculer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AM}$

2- Calculer les composantes du vecteur moment $\vec{\mathfrak{M}}_{(A)}\vec{F}$

3- F est donnée en newton et les distances en cm. Calculer les intensités $\|\vec{F}\|$; $\|\overrightarrow{AM}\|$ et $\|\vec{\mathfrak{M}}_{(A)}\vec{F}\|$.

4- En déduire la mesure de l'angle $(\widehat{\vec{F},\overrightarrow{AM}})$.

Solution Exercice 2 :

1- $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}-1-2\\-1-2\\-1-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\-3\\-3\end{pmatrix}$ Donc : $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}-3\\-3\\-3\end{pmatrix}$

2- $\vec{\mathfrak{M}}_{(A)}\vec{F}=\overrightarrow{AM}\wedge\vec{F}=\begin{pmatrix}-3\\-3\\-3\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-12\\-3\\15\end{pmatrix}$ Donc : $\vec{\mathfrak{M}}_{(A)}\vec{F}\begin{pmatrix}-12\\-3\\15\end{pmatrix}$

3- $\|\vec{F}\|=\sqrt{2^2+(-3)^2+1^2}=\sqrt{14}$ Donc $\|\vec{F}\|=\sqrt{14}N$

$\|\overrightarrow{AM}\|=\sqrt{3^2+3^2+3^2}=\sqrt{27}=3\sqrt{3}$ Donc $\|\overrightarrow{AM}\|=3\sqrt{3}cm$

$\|\vec{\mathfrak{M}}_{(A)}\vec{F}\|=\sqrt{+12^2+(-3)^2+(15)^2}=\sqrt{378}=3\sqrt{42}$

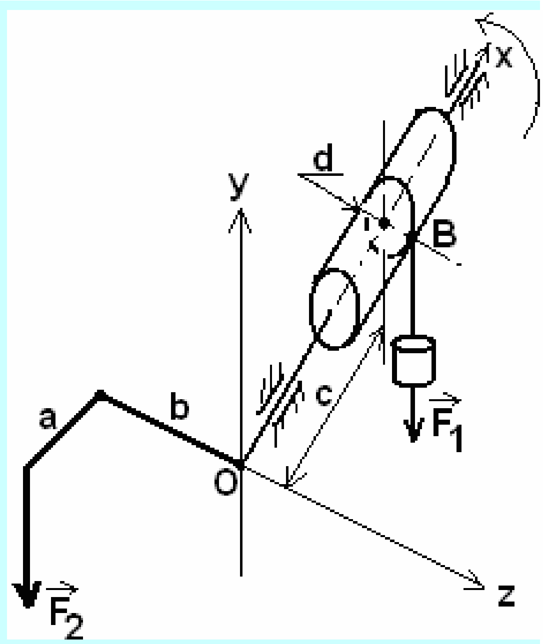
Donc $\|\vec{\mathfrak{M}}_{(A)}\vec{F}\|=3\sqrt{42}N.cm$

4- On sait que $\|\vec{\mathfrak{M}}_{(A)}\vec{F}\|=\|\overrightarrow{AM}\|.\|\vec{F}\|.\sin(\widehat{\overrightarrow{AM},\vec{F}})$

D'où $\sin(\widehat{\overrightarrow{AM},\vec{F}})=\dfrac{\|\vec{\mathfrak{M}}_{(A)}\vec{F}\|}{\|\overrightarrow{AM}\|.\|\vec{F}\|}=\dfrac{3\sqrt{42}}{3\sqrt{3}.\sqrt{14}}=\dfrac{3\sqrt{42}}{3\sqrt{42}}=1$

D'où $mes(\widehat{\overrightarrow{AM},\vec{F}})=\sin^{-1}1=90°=\dfrac{\pi}{2}rad$

CONSOLIDATION



Un tambour de treuil de diamètre d supporte une charge qui exerce sur le câble une force F_1= 800N (Voir figure). A l'extrémité de la manivelle de commande, on exerce un effort F_2 vertical.

1) Quel est le moment du système de forces (F_1, F_2) en O ?

2) Quel doit être l'intensité de la force F_2 pur que le moment du système de forces (F_1, F_2) par rapport à l'axe (Ox) soit nul.

On donne : a=100mm ; b=400mm ; c=600mm ; d= 200mm.

Chapitre 4 Corps solide ; Système matériel

Objectif : Définir, isoler un système matériel et faire le bilan des forces extérieures qui s'y appliquent.

1- Définitions :

1.1- Corps solides :

a) Solide réel :

C'est le solide tel qu'il est en l'absence des forces extérieures.

b) Solide déformable :

C'est le solide qui, sous l'influence d'une force extérieure, se déforme plus ou moins.

- La déformation est élastique si la force est faible.
- La déformation est plastique si la force est grande.

c) Solide indéformable :

C'est le solide théorique, qui, sous l'influence d'une force extérieure, ne se déforme pas. Les distances de deux points quelconques de ce solide sont invariables.

1.2- Système matériel :

C'est un ensemble infini ou fini de points matériels ou particules soumis à l'action des forces.

2- Actions mécaniques :

Il existe deux types d'actions mécaniques :

- Les actions mécaniques à distance (poids et attractions électromécaniques)
- Les actions mécaniques de contact ou de liaison (réaction, tension).

2.1- Une action mécanique à distance : le poids.

Le poids ou action de pesanteur notée $\vec{P}$ est la force qu'exerce le centre de la terre sur tout corps. Ses caractéristiques sont :

- Le point d'application : son centre de gravité G ;

- La direction : Verticale ;
- Le sens : Descendant (du haut vers le bas) ;
- Son intensité $\|\vec{P}\| = m.g$; avec m = masse du corps en Kg et g=accélération de la pesanteur en N/Kg.

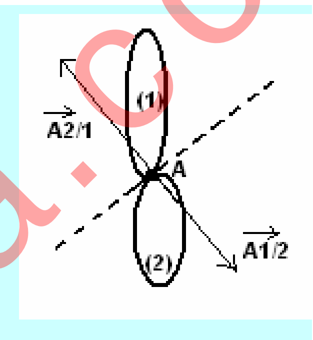
2.2- Action mécanique de liaison ou de contact :

2.2.1- Principe de NEWTON ou de l'égalité des actions mutuelles :

L'action d'un corps (1) sur un corps (2) est égale et directement opposée à l'action du corps (2) sur le corps (1). Ainsi a-t-on :

$\vec{A}_{2/1} + \vec{A}_{1/2} = \vec{0}$ ou $\vec{A}_{2/1} = -\vec{A}_{1/2}$

et $\|\vec{A}_{2/1}\| = \|\vec{A}_{1/2}\|$

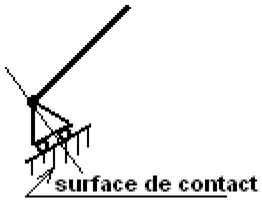
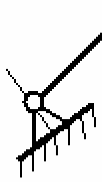
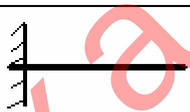


2.2.1- Caractéristiques des actions de contact :

Les actions de contact sont dirigées vers l'intérieur du corps auquel elles sont appliquées.
Ainsi :

- Les actions de contact des corps (1) et (2) ont même point d'application : le point A.
- Les actions de contact des corps (1) et (2) sont directement opposées : elles ont la même direction, mais de sens opposés.
- Les actions de contact des corps (1) et (2) ont même module (même intensité).

2.2.2- Quelques types de liaisons simples :

Désignations	Symboles	Direction de l'action de contact
Appui simple		Normale à la surface de contact
Articulation		Inconnue
Encastrement		Inconnue

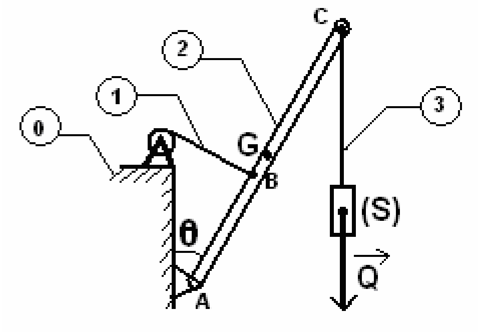
Remarque :

Les noms, symbolisations et schémas de principe des liaisons mécaniques seront mieux abordés dans le cours de Technologie de Construction Mécanique.

Application

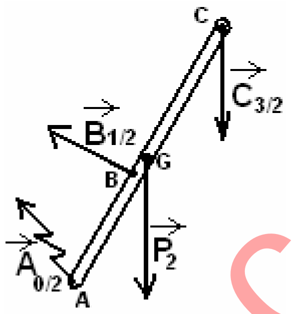
Isolément d'un système matériel :

Soit le système matériel ci-dessous, constitué de deux fils inextensibles repérés (1) et (3), d'une potence repérée (2) de masse m et d'un solide (S) de masse M.



$\theta = 30°$

- Isolons la potence (2)



- Faisons le bilan des forces extérieures qui s'y appliquent.

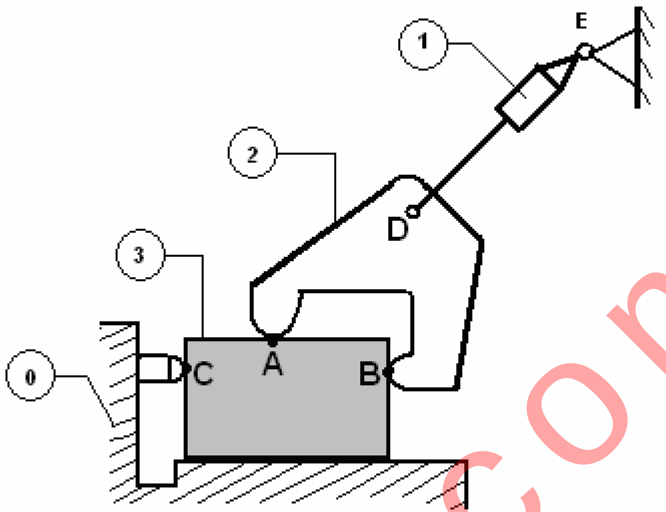
Forces extérieures	Points d'application	Direction	sens	Intensité ou module
$\vec{A}_{0/2}$	A	?	?	?
$\vec{B}_{1/2}$	B	60°	60°	?
$\vec{C}_{3/2}$	C		↓	$C_{3/2} = Q$
$\vec{P}_2$	G		↓	$P_2 = m.g$

Remarque :

L'ordre d'isolément des pièces est important pour une bonne résolution statique. Il faut d'abord isoler les solides soumis à l'action de deux forces extérieures.

Ainsi doit-on a priori isoler la charge de poids Q pour comprendre que $C_{3/2} = Q$; avant d'envisager l'isolément de la potence (2).

CONSOLIDATION



Un vérin (1) articulé en E porte à l'autre extrémité un levier (2) articulé en D. Ce levier permet d'immobiliser la pièce (3) sur la table (0).

Les poids propres de chaque pièce étant négligé, isoler successivement le vérin, le levier et la pièce et faire dans chaque cas le bilan des forces extérieures.

L'ESSENTIEL

Chapitre 5

Equilibre d'un système matériel ; Principe Fondamental de la statique

Objectif :

- Résoudre analytiquement et par calcul les problèmes d'équilibre
- Appliquer le Principe Fondamental de la Statique aux problèmes d'équilibre pour trouver les solutions.

1- Notion de résultante des forces et des moments :

1.1- Résultante des forces :

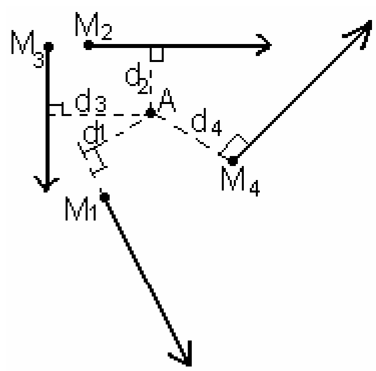
Soit un système de forces $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots\ldots\vec{F}_n$ appliquées respectivement en M_1, M2,…………….M_n. La résultante générale des forces est :

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \vec{F}_n$$

1.2- Moment résultant en un point :

Le moment résultant en un point A est :

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^{n} M_{(A)}\vec{F}_i$$



2- Principe Fondamental de la Statique (PFD) :

2.1- Enoncé :

Un corps étant en équilibre, reste en équilibre à condition que les forces extérieures qui lui sont appliquées constituent un système de vecteurs-forces équivalent à zéro c'est à dire :

$$\begin{cases} \sum \vec{F}ext = \vec{0} \\ \sum \mathfrak{M}_{(A)} \vec{F}ext = \vec{0} \end{cases}$$

Soit :

$$\begin{cases} \vec{R} = \vec{0} \\ \vec{M} = \vec{0} \end{cases}$$

2.2- Les six équations de l'équilibre:

Si la résultante des forces est : $\vec{R}\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$ et

le moment résultant est $\vec{M}\begin{pmatrix} L \\ M \\ N \end{pmatrix}$; on aura : **A=0, B=0, C=0, L=0, M=0, N=0**

Remarques:
Pour le cas des forces coplanaires, les six équations se réduisent à trois :

A=0, B=0, N=0 ou **B=0, C=0, L=0** ou **A=0, C=0, M=0**

2.3- Cas particuliers :

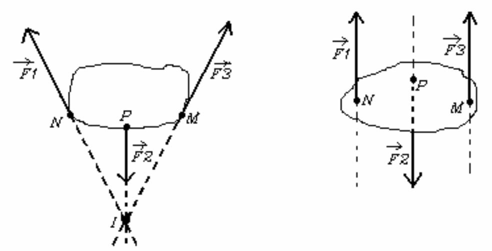
2.3.1- Equilibre sous l'action de deux forces :

Traction **Compression**

- Les deux forces ont même direction ;
- Elles sont égales et directement opposées.

$$\vec{F}_M + \vec{F}_N = \vec{0}$$
$$\vec{F}_M = -\vec{F}_N$$
$$F_M = F_N$$

2.3.2- Equilibre sous l'action de trois forces :



- Les trois forces sont dans le même plan (coplanaires).
- Les trois forces sont concourantes ou parallèles.
- Lorsque deux forces concourent en un même point I, alors la troisième passe aussi par ce point.

- Lorsque deux des trois forces est parallèle, alors la troisième sera aussi parallèle aux deux premières.

2.4- Méthode de résolution des problèmes de statique :

- Isoler le système matériel dont on a l'intention d'étudier l'équilibre ;
- Repérer parmi les forces extérieures les éléments connus et les éléments inconnus.
- Projeter suivant les axes du repère les vecteurs forces constituants les équations vectorielles d'équilibre. (Le repère est choisi s'il n'est pas imposé).
- Appliquer le PFS au système matériel.
- Résoudre les équations obtenues pour déterminer les inconnus.

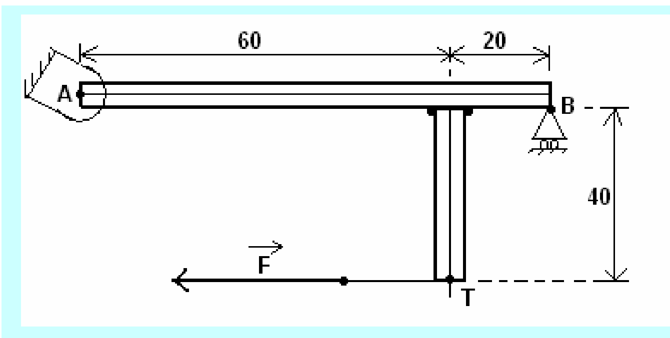
Remarques:

Il faut toujours s'assurer que le problème à résoudre a une solution, c'est à dire qu'il est isostatique. En effet :

- Un système est isostatique si le nombre d'inconnus est égal au nombre d'équations.
- Un système est hyperstatique si le nombre d'inconnus est supérieur au nombre d'équations. Un tel problème ne peut pas être solutionné.

Applications

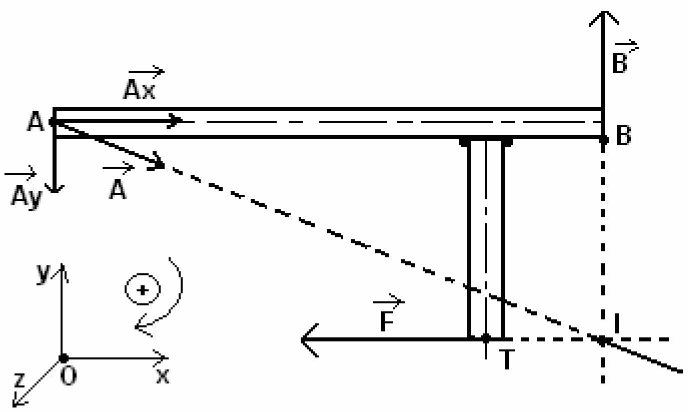
Exercice 1 :



Un support de Té, articulé en A et s'appuyant en B sur un point fixe, maintient au point d'attache T un câble qui est tiré par une force horizontale $\vec{F}$ d'intensité F = 1000N. Déterminer algébriquement les actions de contact en A et B par les appuis sur le support.

Solution Exercice 1 :

- Isolons le système et faisons le bilan des forces extérieures :



Forces extérieures	Point d'application	Direction	Sens	Intensité
$\vec{F}$	T	$\dashv$	←	1000N
$\vec{A}$	A	?	?	?
$\vec{B}$	B	$\top$	↑	?

Remarquons que ni la direction, ni le sens de $\vec{A}$ ne sont connus a priori, mais on peut voir que $\vec{F}$ et $\vec{B}$ concourant vers le point I, alors $\vec{A}$ aussi concoure vers I. En outre, on a 3 forces coplanaires, d'où 3 équations et 2 inconnus. Donc le problème n'est pas hyperstatique.

- Projetons suivant les axes du repère que nous avons nous mêmes choisi les vecteurs forces constituant les équations vectorielles d'équilibre : $\vec{F}\begin{vmatrix}-F\\0\\0\end{vmatrix} ; \vec{A}\begin{vmatrix}Ax\\Ay\\0\end{vmatrix} ; \vec{B}\begin{vmatrix}0\\-B\\0\end{vmatrix}$

- Appliquons le PFS au système matériel :

➢ $\vec{F}+\vec{A}+\vec{B}=\vec{0} \Rightarrow \begin{vmatrix}-F+Ax+0=0\\0+Ay-B=0\\0+0+0=0\end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix}-F+Ax=0(1)\\Ay-B=0(2)\\0=0\end{vmatrix}$

➢ $\mathfrak{M}_{(A)}\vec{F}+\mathfrak{M}_{(A)}\vec{A}+\mathfrak{M}_{(A)}\vec{B}=\vec{0} \Rightarrow \begin{vmatrix}0+0+0=0\\0+0+0=0\\40F+0-80B=0(3)\end{vmatrix}$

Remarque :

Pour trouver la troisième équation, on peut opter faire le calcul vectoriel des moments ou appliquer la méthode du bras de levier suivant l'axe (Oz).

Ainsi a-t-on le système à résoudre :

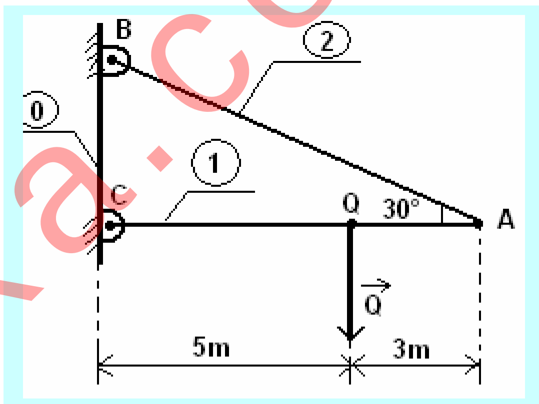
$$\begin{cases} -F + Ax = 0 \\ Ay - B = 0 \\ 40F - 80B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1000 + Ax = 0 \\ Ay - B = 0 \\ 40000 - 80B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Ax = 1000N \\ Ay = B \\ B = 500N \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Ax = 1000N \\ Ay = 500N \\ B = 500N \end{cases}$$

On sait que : $A = \sqrt{Ax^2 + Ay^2} = \sqrt{1000^2 + 500^2} = 1118N$

Donc : **A = 1118N** **B = 500N**

Exercice 2 :

Une potence murale est constituée d'une barre AC repérée (1) articulée à un point fixe C et supportant en A l'action d'un tirant AB repéré (2). La potence supporte une charge maximale $\|\vec{Q}\| = 5000N$. Le poids de la potence et les frottements sont négligés. On demande :



a) L'ordre d'isolément des organes à étudier ;

b) Isoler la barre AB et étudier son équilibre ;

c) Isoler la potence AC et faire le bilan des actions mécaniques qui s'y appliquent.

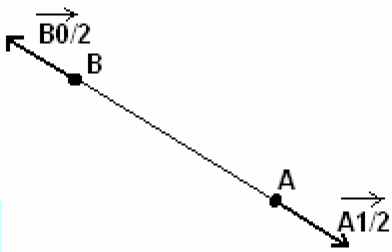
d) Déterminer analytiquement les actions mécaniques aux points B et C.

Solution Exercice 2 :

a) L'ordre d'isolément des organes à étudier : (2)-(1).

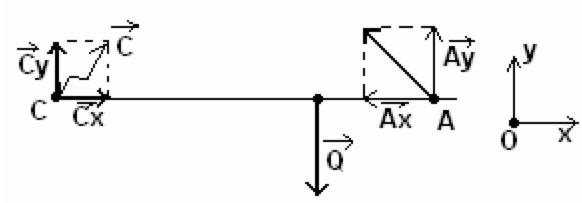
b) Isolons la barre (2) :

Il s'agit d'un solide soumis à l'action de deux forces ayant pour support la droite AB.



$$\vec{B}_{0/2} + \vec{A}_{1/2} = \vec{0} \Rightarrow \|\vec{B}_{0/2}\| = \|\vec{A}_{1/2}\|$$

c) Isolons la potence AC :



Bilan des forces extérieures :

Forces extérieures	Point d'application	Direction	sens	Intensité
$\vec{A}_{1/2}$	A	30°	↑	?
$\vec{Q}$	Q	$\top$	↓	5000N
$\vec{C}$	C	?	?	?

d) Déterminons les intensités de $\vec{A}_{1/2}$ et $\vec{C}$:

- Projetons suivant les axes du repère que nous avons nous mêmes choisi les vecteurs forces constituant les équations vectorielles d'équilibre :

$$\vec{C}\begin{vmatrix}Cx\\Cy\end{vmatrix};\vec{Q}\begin{vmatrix}0\\-Q\end{vmatrix};\vec{A}_{(1/2)}\begin{vmatrix}-Ax\\Ay\end{vmatrix}$$

- Appliquons le PFS au système matériel :

$$* \ \vec{A}_{(1/2)}+\vec{Q}+\vec{C}=\vec{0}\Rightarrow\begin{cases}Cx+0-Ax=0\\Cy-Q+Ay=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}Cx=Ax=A_{2/1}.\cos 30°\\Cy=Q-Ay=A_{2/1}.\sin 30°\end{cases}$$

$$* \ \vec{\mathfrak{M}}_{(C)}\vec{A}_{(1/2)}+\vec{\mathfrak{M}}_{(C)}\vec{Q}+\vec{\mathfrak{M}}_{(C)}\vec{C}=\vec{0}\Rightarrow 5Q-8Ay=0\Rightarrow Ay=\frac{5}{8}Q$$

Remarque :

Pour trouver cette dernière équation, on peut opter faire le calcul vectoriel des moments ou appliquer la méthode du bras de levier suivant l'axe (Oz).

D'où : $A_{1/2}=\dfrac{5Q}{8.\sin 30°}\Rightarrow A_{1/2}=6250N$

$Cx=5413N;Cy=1875N$

Or : $C=\sqrt{Cx^2+Cy^2}\Rightarrow C=5729N$

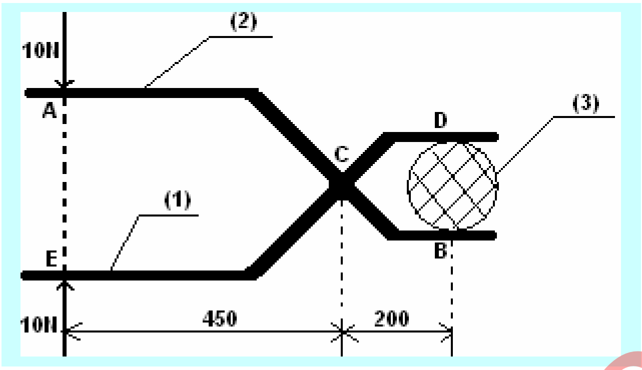
Donc :

B = 6250 N

C = 5729 N

Exercice 3 :

Soit la pince ci-dessous articulée en C :



a) Isoler le corps repéré (3) et faire le bilan des forces extérieures.

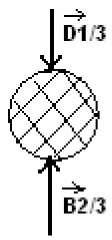
b) Isoler le corps repéré (2) et faire le bilan des forces extérieures.

c) Déterminer analytiquement les actions mécaniques en C, B et D.

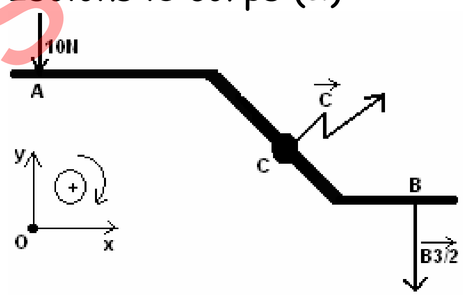
Solution Exercice 3 :

a) Isolons la pièce (3) : On a un solide soumis à l'action de deux forces extérieures de support la droite (BD)

$$\vec{D}_{1/3} + \vec{B}_{2/3} = \vec{0} \Rightarrow \left\|\vec{D}_{1/3}\right\| = \left\|\vec{B}_{2/3}\right\|$$



b) Isolons le corps (2) :



Forces ext.	Pt.d'Appli.	Direction	Sens	Intensité
$\vec{A}$	A	¯T	↓	10N
$\vec{B}_{(3/2)}$	B	¯T	↓	?
$\vec{C}$	C	?	?	?

c) Déterminons les actions mécaniques en C, B et D.

- Projetons suivant les axes du repère que nous avons nous mêmes choisi les vecteurs forces constituant les équations vectorielles d'équilibre :

$$\vec{A}\begin{vmatrix}0\\-10\end{vmatrix} \; ; \; \vec{B}_{(3/2)}\begin{vmatrix}0\\-B_{(3/2)}\end{vmatrix} \; ; \; \vec{C}\begin{vmatrix}Cx\\Cy\end{vmatrix}$$

- Appliquons le PFS au système matériel :

$$* \; \vec{A}+\vec{B}_{(3/2)}+\vec{C}=\vec{0} \Rightarrow \begin{cases}0+0+Cx=0\\-10-B_{(3/2)}+Cy=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}Cx=0\\Cy=10+B_{(3/2)}\end{cases}$$

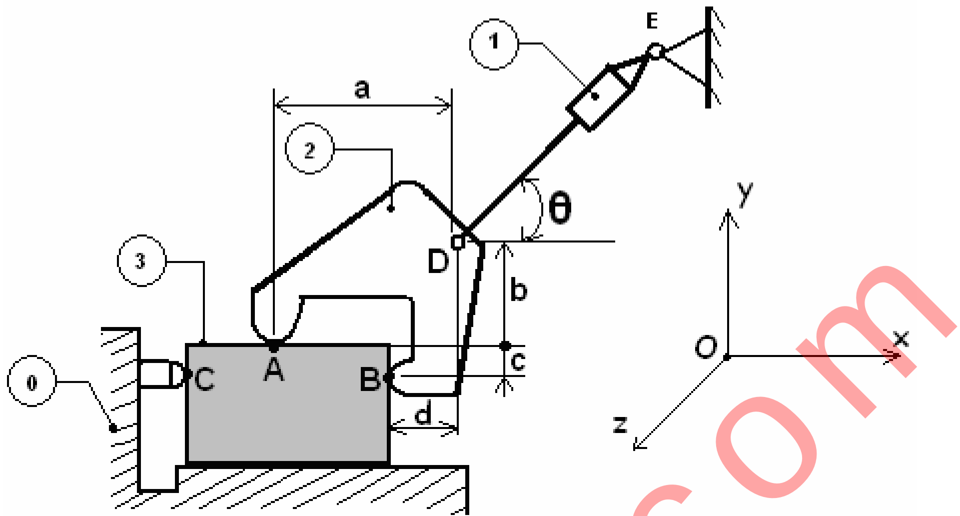
$$* \; \mathfrak{M}_{(C)}\vec{A}+\mathfrak{M}_{(C)}\vec{B}_{(3/2)}+\mathfrak{M}_{(C)}\vec{C}=\vec{0} \Rightarrow -4500+200B_{(3/2)}+0=0$$

$$\Rightarrow B_{(3/2)}=\frac{4500}{200}=22{,}5\text{N}$$

D'où $\boxed{B=22{,}5N}$ Or B = D; D'où: $\boxed{D = 22{,}5N}$

$\boxed{C=32{,}5N}$

CONSOLIDATION



Un vérin (1) articulé en E porte à l'autre extrémité un levier (2) articulé en D. Ce levier exerce au point A une force pressante d'intensité 1000 N et permet d'immobiliser la pièce (3) sur la table (0).

On donne : a = 150cm ; b = 75cm ; c = 15cm ; d = 75 cm.

Les poids propres de chaque pièce sont négligés.

1- Isoler le vérin 1, appliquer le Principe Fondamental de la Statique et déduire le support des forces extérieures qui s'y appliquent.
2- Isoler le levier, faire le bilan des forces extérieures qui s'y appliquent et déterminer les actions de contact en B et D.
3- Isoler la pièce (3), faire le bilan des forces qui s'y appliquent et déduire les actions de contact en C et K.
4- Déterminer la mesure de l'angle θ.

Solution Consolidation :

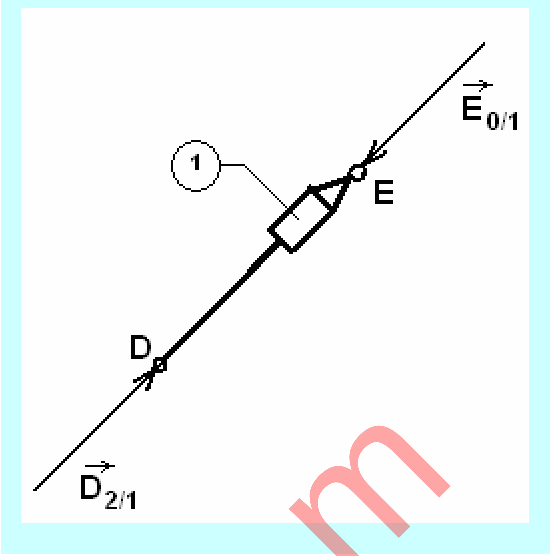
1- Isolons le vérin 1:

P.F.S: $\vec{E}_{0/1} + \vec{D}_{2/1} = \vec{0}$

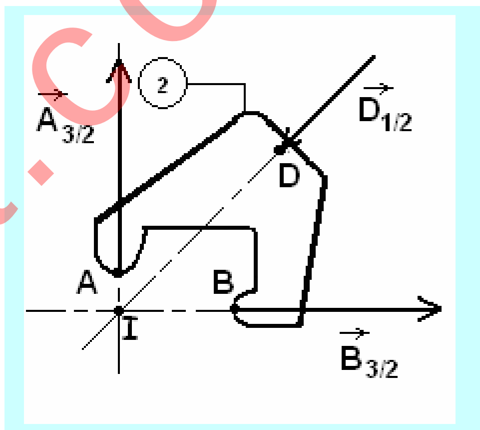
$\Rightarrow \vec{E}_{0/1} = -\vec{D}_{2/1}$

$\Rightarrow \|\vec{E}_{0/1}\| = \|\vec{D}_{2/1}\|$

Donc ces deux forces ont comme support la droite (DE).



2- Isolons le levier (2):



Bilan des forces extérieures:

Forces ext.	Pt.d'appl.	Direction	Sens	Intensité
$\vec{A}_{3/2}$	A	$\perp$	$\uparrow$	1000N
$\vec{B}_{3/2}$	B	$\vdash$	$\rightarrow$	?
$\vec{D}_{1/2}$	D	?	?	?

- $\vec{A}_{3/2} + \vec{B}_{3/2} + \vec{D}_{1/2} = \vec{0}$
- $\vec{\mathfrak{M}}_{(D)}\vec{A}_{3/2} + \vec{\mathfrak{M}}_{(D)}\vec{B}_{3/2} + \vec{\mathfrak{M}}_{(D)}\vec{D}_{1/2} = \vec{0}$

- $\vec{\mathfrak{M}}_{(D)}\vec{A}_{3/2} = \overrightarrow{DA} \wedge \vec{A}_{3/2} = \begin{pmatrix} -1,5 \\ -0,75 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1000 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1500 \end{pmatrix}$
- $\vec{\mathfrak{M}}_{(D)}\vec{B}_{3/2} = \overrightarrow{DB} \wedge \vec{B}_{3/2} = \begin{pmatrix} -0,75 \\ -0,90 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} Bx \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,90Bx \end{pmatrix}$

- $\vec{\mathfrak{M}}_{(D)}\vec{D}_{1/2} = \vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

D'où : $0{,}90 \text{ Bx} - 1500 = 0 \Rightarrow \text{Bx} = \dfrac{1500}{0{,}90}$ et $\text{Bx} = 1666{,}67\text{N}$, or $\text{By} = 0$

Donc : $\left\| \vec{B}_{3/2} \right\| = 1666{,}67\text{N}$

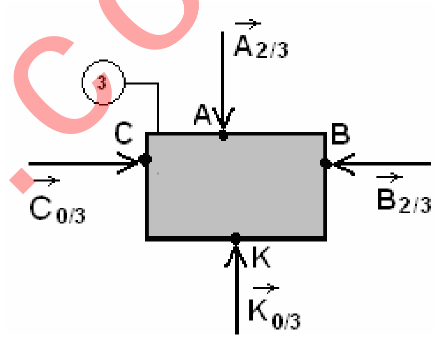
D'autre part : $\vec{A}_{3/2} + \vec{B}_{3/2} + \vec{D}_{1/2} = \vec{0}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1000 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1666,67 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Dx \\ Dy \\ Dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$Dx = -1666,67N$ et $Dy = -1000N$

$\left\| \vec{D}_{1/2} \right\| = 1943,65N$ $\left\| \vec{D}_{1/2} \right\| = \sqrt{(-1666,67)^2 + (-1000)^2}$

Donc : $\left\| \vec{D}_{1/2} \right\| = 1943,65N$



3- Isolons la pièce (3) :

Bilan des forces extérieures :

Forces ext.	Pt.d'appl.	Direction	Sens	Intensité
$\theta = 30,963°$ $\vec{C}_{0/3}$	C	⊢	↦	?
$\vec{K}_{0/3}$	K	⊥	↑	?
$\vec{A}_{2/3}$	A	⊥	↓	1000N
$\vec{B}_{2/3}$	B	⊢	←	1666,67N

On a: $\vec{A}_{2/3} + \vec{B}_{2/3} + \vec{K}_{0/3} + \vec{C}_{0/3} = \vec{0}$

$$\leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -1000 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1666,67 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ Ky \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Cx \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

D'où Cx = 1666,67N; Cy = 0; Cz = 0

Donc $\left\| \vec{C}_{0/3} \right\| = 1666,67N$

Et Kx = 0 ; Ky = 1000N ; Kz = 0

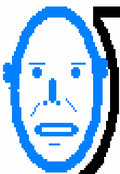
Donc $\left\| \vec{K}_{0/3} \right\| = 1000N$

4- Déterminons l'angle θ :

On a : $\tan\theta = \dfrac{Dy}{Dx} = \dfrac{1000}{1666,67}$

$\tan\theta = 0,5999$

Donc : $\theta = 30,963°$



L'ESSENTIEL

Chapitre 6 STATIQUE GRAPHIQUE

Objectif

Passer des conditions mathématiques d'équilibre aux conséquences graphiques de résolution ;

1- Généralités:

La statique graphique nous permet d'aborder plus aisément les problèmes de statique dans les cas des forces coplanaires supérieures ou égales à trois. La méthode graphique est plus rapide, plus directe mais donne des résultats avec une marge d'erreur d'environ 5%. La méthode graphique exige la maîtrise des concepts tels que le funiculaire et le dynamique.

1.1- Le funiculaire :

C'est un polygone ou une ligne brisée qui est tracé dans le plan de situation et qui indique la résultante des moments.

1.2- Le dynamique :

C'est un polygone ou une ligne brisée qui est tracé dans le plan des forces à partir d'un point isolé appelé **pôle** et qui indique la résultante des forces.

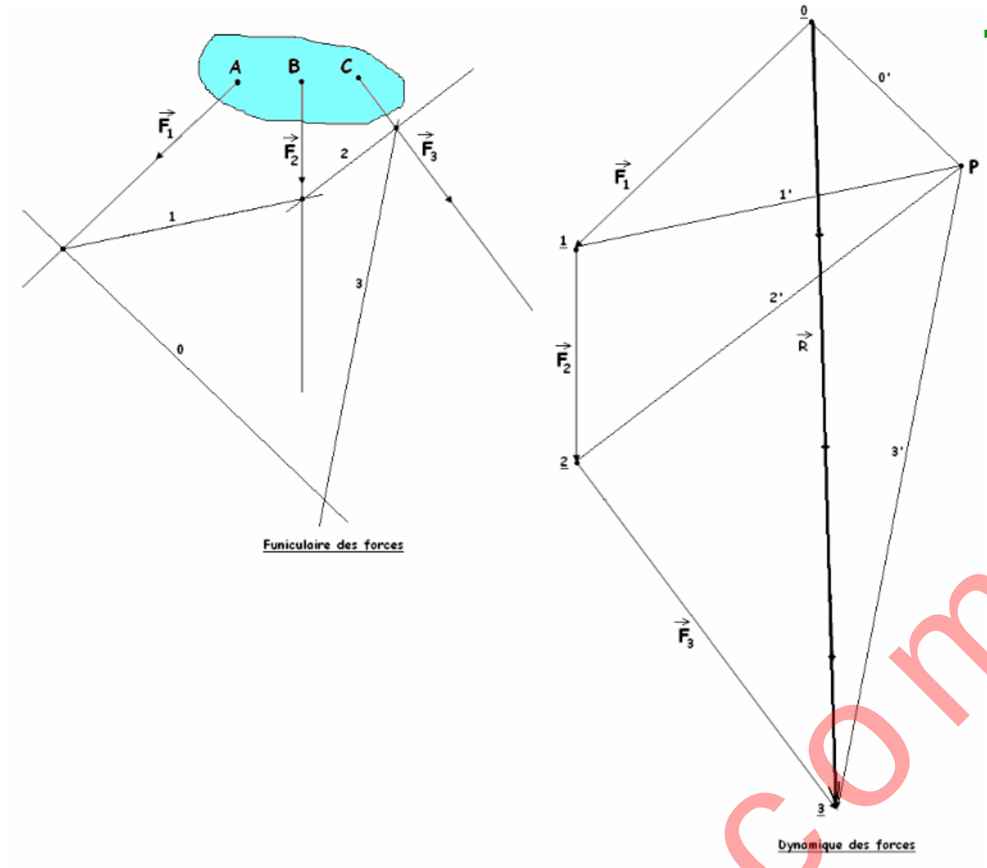
1.3- Le pôle :

C'est un point choisi de façon arbitraire (ou imposé au cours d'un devoir harmonisé), à partir duquel sont tracés les rayons joignant les extrémités des segments du dynamique.

Application

Résultante d'un système de force en construction graphique :

Soit un solide soumis à un système de trois forces F_1=750N ; F_2=500N et F_3=1000N. Déterminons la résultante de ces trois forces. On donne : Echelle : 1cm$\rightarrow$250N.



- 0',1',2',3' sont les rayons polaires et 0//0' ; 1//1' ; 2//2' ; 3//3'
- 0 3 est la résultante des forces : $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$
  $\Rightarrow \quad \overrightarrow{03} = \overrightarrow{01} + \overrightarrow{12} + \overrightarrow{23}$
  $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0}$
- Par simple mesure, on obtient : $\Rightarrow \overrightarrow{01} + \overrightarrow{12} = \overrightarrow{02} = \vec{0}$ $\vec{R} \cong 7{,}5cm$
  $\Rightarrow \|\vec{F}_1\| = \|\vec{F}_2\|$
  Donc : $\|\vec{R}\| \cong 1875N$

2- Comment tracer le dynamique et le funiculaire :

2.1- Méthode de tracé du dynamique :

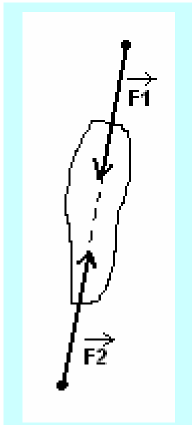
- Ecrire la condition d'équilibre après avoir analyser les forces en encadrant celles qui sont connues et commencer par celle qui présente le plus d'inconnues. Exemple : $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D} = \vec{0}$
- Procéder à la numérotation : Exemple $\overrightarrow{01} + \overrightarrow{12} + \overrightarrow{23} + \overrightarrow{30} = \vec{0}$.
- Placer à l'échelle des forces et dans le plan du dynamique les forces qui sont entièrement connues.
- Choisir le pôle P qui ne doit être ni proche, ni trop éloigné des forces.
- Tracer les rayons polaires.

2.2- Méthode de tracé du funiculaire :

- Construire les cordons du funiculaire qui doivent être parallèles aux rayons polaires correspondant tout en coupant les supports des forces.
- Tracer la ligne de fermeture du funiculaire qui joint le premier et le dernier cordon du funiculaire.
- Reporter cette ligne sur le dynamique en passant par le pôle.
- Reporter les cordons du funiculaire issus des forces inconnues sur le dynamique de sorte qu'ils coupent la ligne de fermeture et qu'ils passent par leurs origines respectives.
- Mesurer et appliquer l'échelle des forces pour lire leurs valeurs sur le dynamique.

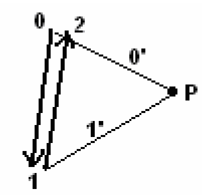
Applications **Cas particuliers**

Application 1 :
Solide soumis à l'action de deux forces :



$$\vec F_1+\vec F_2=\vec 0$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{01}+\overrightarrow{12}=\overrightarrow{02}=\vec 0$$
$$\Rightarrow \|\vec F_1\|=\|\vec F_2\|$$

Remarque :
Lorsqu'un solide est soumis à l'action de deux forces la construction du funiculaire est inutile.

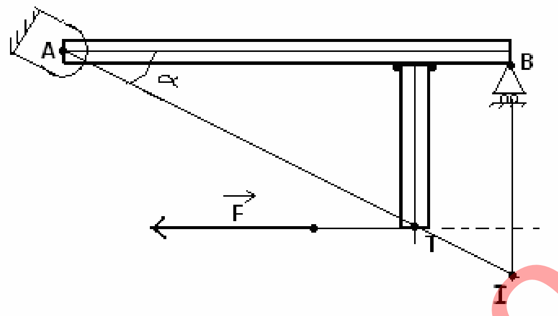


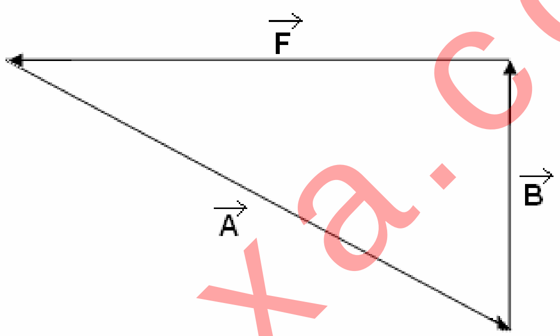
Application 2 :

Solide soumis à l'action de trois forces coplanaires et non parallèles :

Le support ci-dessous articulé en A est en équilibre grâce à l'effort $\vec{F}$ exercé en T par le biais d'une corde inextensible.

On donne : $\|\vec{F}\| = 80N$ et Echelle des forces : 1cm→1N.





Dynamique des forces

Par simple mesure, on a : $\vec{B}$: 40 cm→ $\|\vec{B}\| = 40N$

Et $\|\vec{A}\| = 562,5N$ $\vec{A}$: 89,44 cm→ $\|\vec{A}\| = 89,44N$

Remarques :

- Lorsqu'un solide en équilibre est soumis à l'action de trois forces concourantes, la construction du funiculaire est inutile. Il suffit de construire le dynamique des forces ou triangle des forces. Ainsi, en respectant la dimension de la force connue et les angles du triangle, on ferme le dynamique et on mesure les dimensions des forces inconnues qu'on applique à l'échelle.
- Lorsqu'une force est entièrement inconnue (Articulation), le rayon polaire passe par son point d'application.
- La méthode graphique donne des résultats avec une marge d'erreur d'environ 5 %.

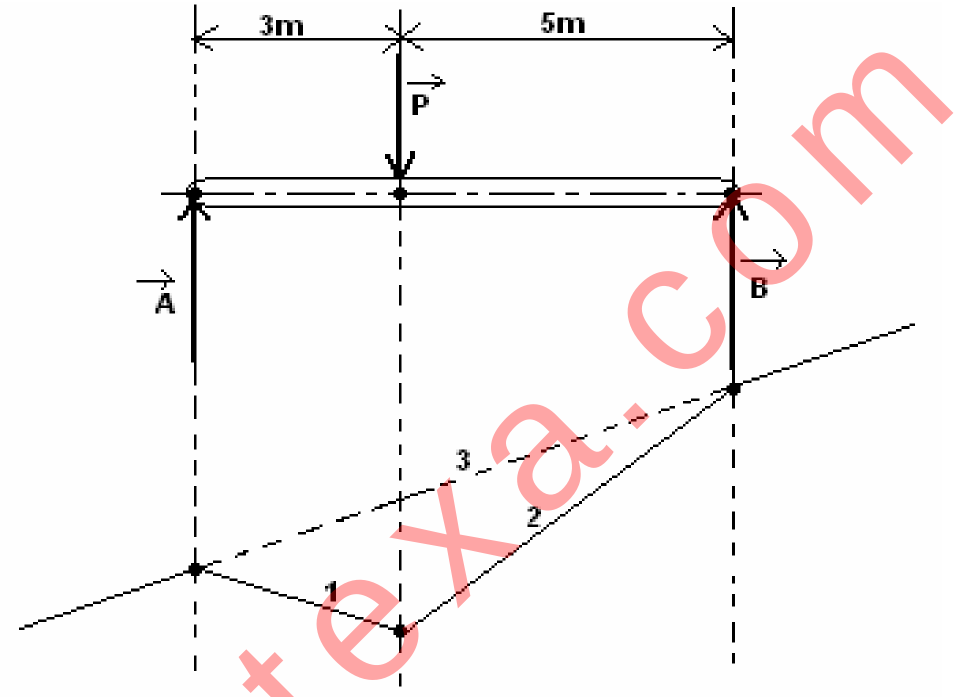
Application 3 :

Solide soumis à l'action de trois forces parallèles :

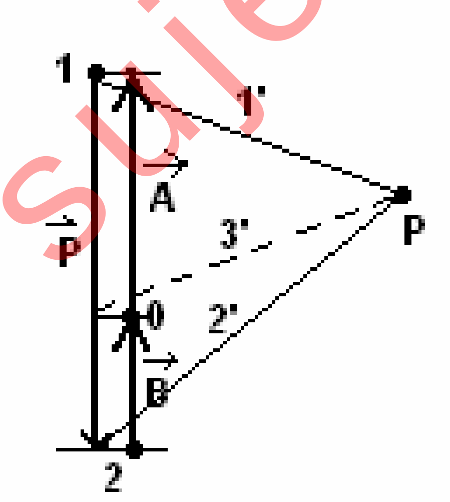
Soit une poutre AB de poids négligé, reposant sur deux appuis en A et en B ; et subissant une charge $\vec{P}$ d'intensité 1000N. Echelle des forces : 1 cm→250N.

Déterminer graphiquement les actions aux appuis en A et en B.

On a : $\vec{A}+\vec{P}+\vec{B}=0 \Rightarrow \overrightarrow{01}+\overrightarrow{12}+\overrightarrow{20}=\vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{12}+\overrightarrow{20}+\overrightarrow{01}=\vec{0}$



Funiculaire des forces.



$\vec{B}$: 1,75cm$\Rightarrow \boxed{\|\vec{B}\|=437,5N}$

$\vec{A}$: 2,25cm$\Rightarrow \boxed{\|\vec{A}\|=562,5N}$

Dynamique des forces.

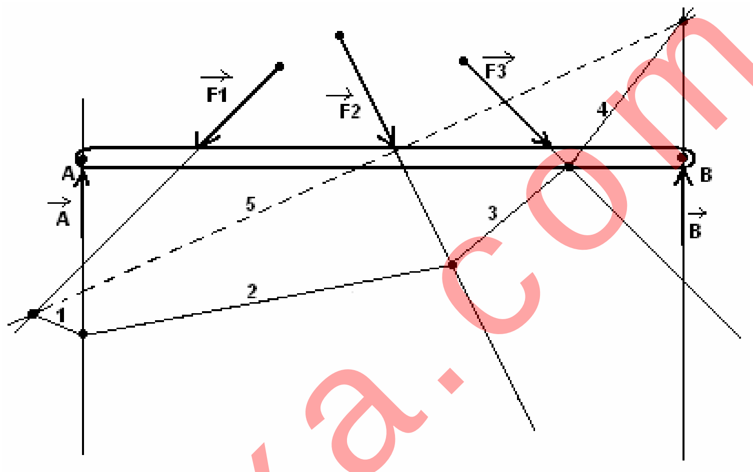
Application 4:
Solide soumis à l'action de plus de trois forces non toutes parallèles :

Soit une poutre AB de poids négligé qui subit des actions $\vec{F}_1$; $\vec{F}_2$ et $\vec{F}_3$ comme l'indique la figure à l'échelle.

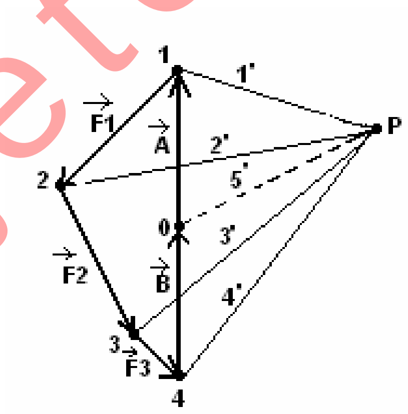
Déterminer graphiquement les actions aux appuis en A et B.

On donne : $F_1 = F_2$ =900 daN et F_3 = 300daN.

Echelle des forces : 1 cm → 300N.



__Funiculaire des forces__



__Dynamique des forces__

$$\vec{A} + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{B} = \vec{0} \qquad \Rightarrow \overrightarrow{01} + \overrightarrow{12} + \overrightarrow{23} + \overrightarrow{34} + \overrightarrow{40} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{12} + \overrightarrow{23} + \overrightarrow{34} + \overrightarrow{40} + \overrightarrow{01} = \vec{0}.$$

Après une simple mesure, on a :

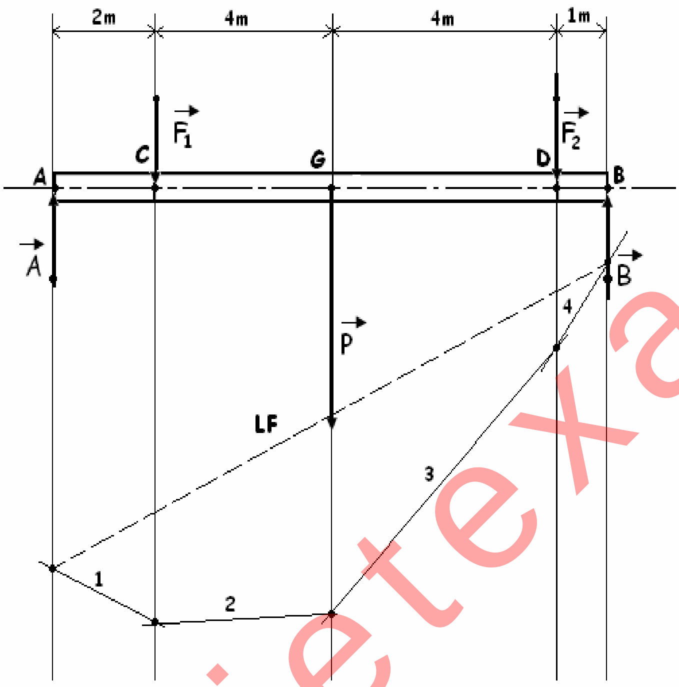
$\vec{B}$: 3 cm et $\vec{A}$: 3 cm $\qquad \Rightarrow \|\vec{A}\| \simeq \|\vec{B}\| = 900N$

Application 4

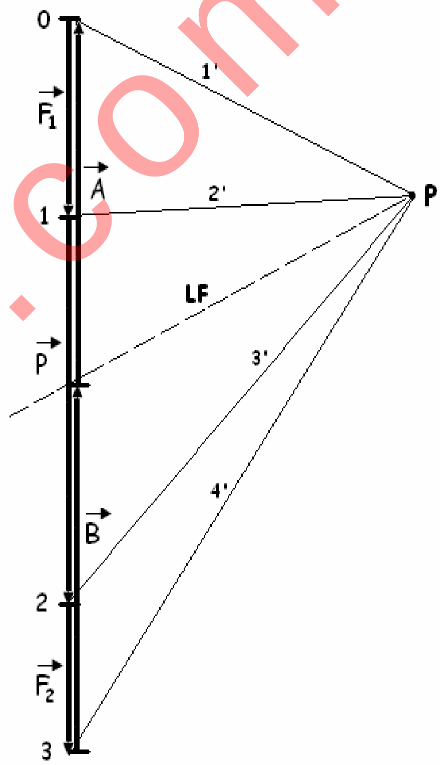
Solide soumis à l'action de plus de trois forces toutes parallèles :

Soit une poutre AB horizontale, de poids négligé et supportant des charges verticales d'intensités F_1 = 10000N ; P = 20000N et F_2 = 15000N comme l'indique la figure. Déterminer les actions de contact en A et B des appuis sur la poutre. Echelle des forces : 1 cm →5000 N.

$$\vec{F}_1+\vec{P}+\vec{F}_2+\vec{B}+\vec{A}=\vec{0} \Rightarrow \quad 01+12+23+34+40=00$$



Funiculaire des forces



Dynamique des forces

Après une simple mesure, on a : $\vec{A} \equiv \vec{B} \equiv 4,5cm$

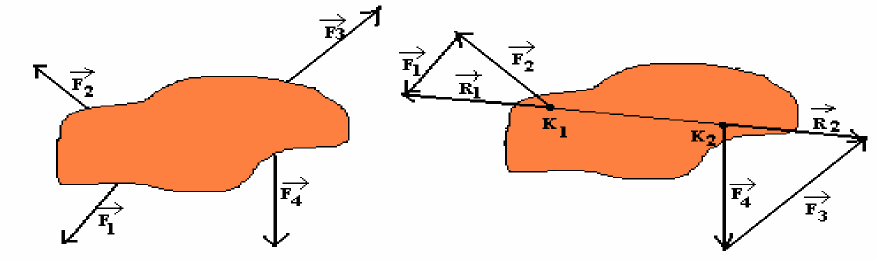
Donc : $\|\vec{A}\| = \|\vec{B}\| = 22500N$

3- Méthode de Culman :

Elle s'applique aux solides en équilibre sous l'action de quatre forces dont une est entièrement connue et les trois autres connues seulement en direction.

Dans le cas d'espèce ci-dessous, seule $\vec{F_1}$ est connue en direction et intensité. F_1 = 2000 N. Sur la droite de Culman (K_1K_2) tracée au préalable, on reporte $\vec{F_1}$ telle que

$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{R}_1$; puis on reporte $\vec{R}_2 = \vec{F}_3 + \vec{F}_4$ sachant que $\|\vec{R}_1\| = \|\vec{R}_2\|$ et que ces deux résultantes de forces s'opposent en direction.
Echelle des forces : 1 cm $\rightarrow$ 1000N

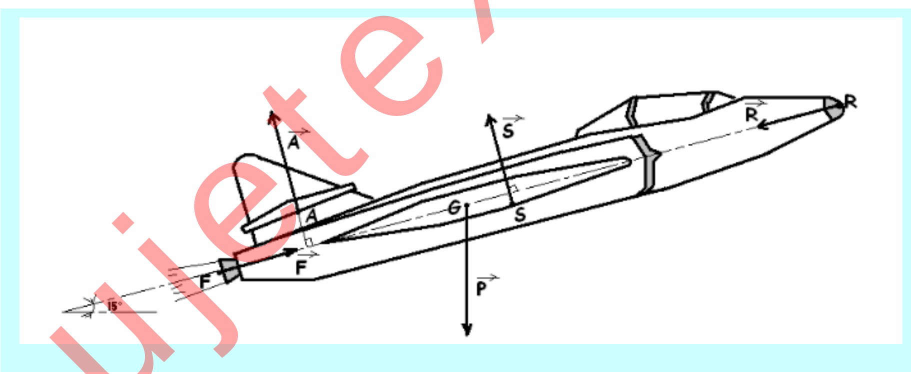


On peut ainsi mesurer les forces connues seulement en direction et appliquer l'échelle des forces pour connaître leurs intensités : On a après simple mesure :

F_2 = 1500 N	F_3 = 2250 N	F_4 = 1750 N

Application Avion de combat

DESCRIPTION, FONCTIONNEMENT, HYPOTHESES ET DONNEES :



L'avion de chasse ci-dessus, en phase ascensionnelle, a un poids P = 3000daN et est incliné d'un angle de 15° par rapport à l'horizontale.L'appareil évolue à vitesse constante sous l'action de la poussée F = 1200daN des réacteurs. Pendant son mouvement, l'avion est soumis à l'action de la résistance de l'air. Cette action est schématisée par la résultante $\vec{R}$. L'action $\vec{S}$ représente la résultante des actions de sustentions exercées par l'air sur les ailes. L'action $\vec{A}$ schématise la résultante des actions stabilisatrices de l'air sur l'aileron arrière.

QUESTIONS :

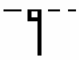
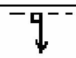
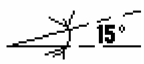
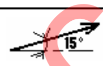
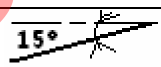
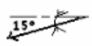
1- Faire le bilan des forces extérieures qui s'appliquent sur l'avion.

2- Déterminer complètement graphiquement les actions $\vec{A}$; $\vec{S}$ et $\vec{R}$.

Prendre l'échelle des forces : 0.5cm↔1000 daN.

SOLUTION :

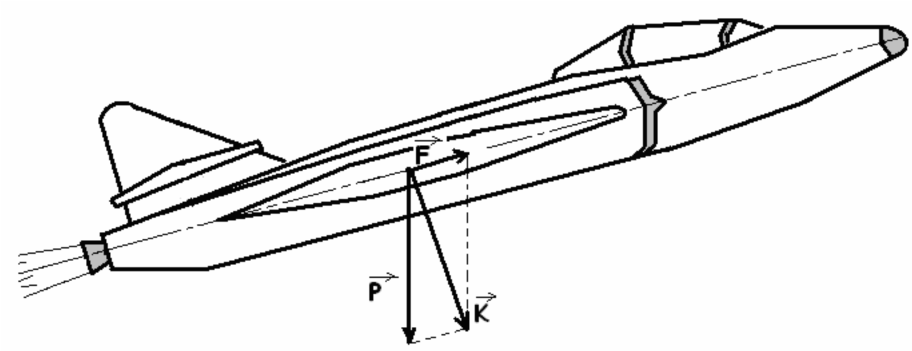
1- Bilan des forces extérieures :

Forces ext	**Point d'Appl**	**Direction**	**Sens**	**Intensité**
$\vec{P}$	G			30000daN
$\vec{F}$	F			12000daN
$\vec{A}$	A			?
$\vec{S}$	S			?
$\vec{R}$	R			?

2- Principe de résolution :

L'avion est soumis à l'action de 5 forces :

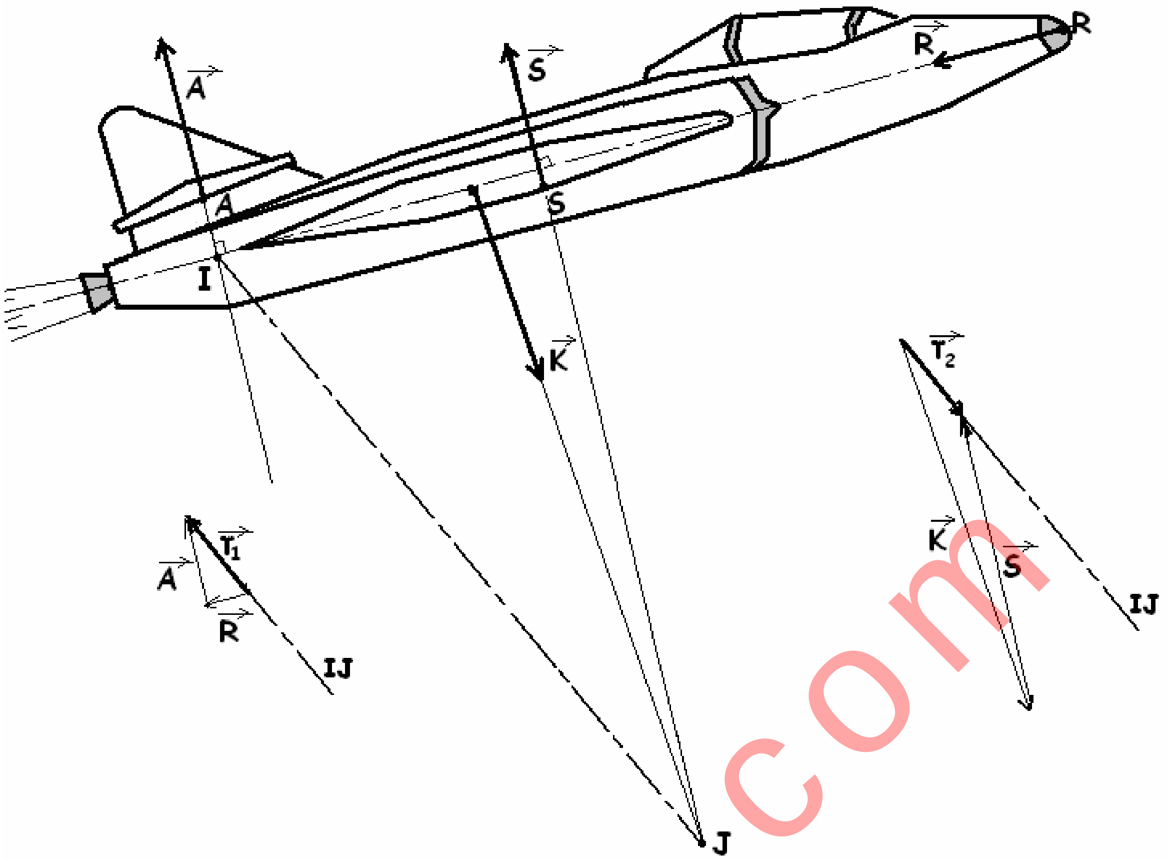
- Ramener le système de forces extérieures à un système de 4 forces dont une est connue entièrement et les 3 autres connues seulement en direction. Pour cela il faut faire la somme des deux forces connues entièrement, notamment $\vec{P}$ et $\vec{F}$. On peut aisément poser que $\vec{K} = \vec{P} + \vec{F}$; $\vec{K}$ passant par le point de concours des directions de $\vec{P}$ et $\vec{F}$.



Ainsi trouve t-on **K = 29000daN**.avec

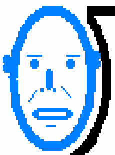
$K = \sqrt{P^2 + F^2}$

- D'après le PFS on a : $\vec{A} + \vec{S} + \vec{R} + \vec{K} = \vec{0}$, groupons alors les forces deux à deux : $\vec{T_1} = \vec{A} + \vec{R}$ et $\vec{T_2} = \vec{S} + \vec{K}$; $\vec{T_1}$ et $\vec{T_2}$ étant les résultantes des groupes des deux forces. Ces deux résultantes sont égales et directement opposées. : C'est **la méthode de Culman.**
- Cherchons le point I, point de concours de $\vec{A}$ et $\vec{R}$; puis le point J, point de concours de $\vec{S}$ et $\vec{K}$. on obtient une droite IJ : C'est **la droite de Culman**. Cette droite indique la direction des deux résultantes.
- La force $\vec{K}$ étant connue en direction, sens et intensité, appliquons l'échelle des forces et représentons la ; puis à partir de la direction de la droite IJ et celle de la force $\vec{S}$, trouvons graphiquement $\vec{T_2}$ et $\vec{S}$ en appliquant l'échelle des forces.
- Représentons $\vec{T_1}$ égale à $\vec{T_2}$ et directement opposée à celle-ci. Puis à partir de la direction de $\vec{A}$ et $\vec{R}$, trouvons graphiquement $\vec{A}$ et $\vec{R}$ en appliquant l'échelle des forces.



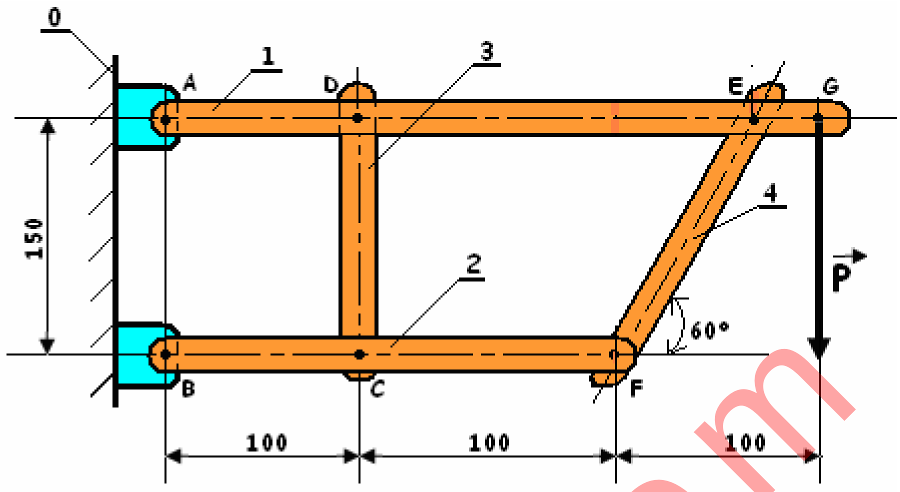
Après simple mesure et application à l'échelle des forces, on trouve :

S = 22500daN; A = 6300daN; R = 4200daN



L'ESSENTIEL

Problème résolu :



La structure plane ci-dessus comprend quatre barres repérées 1, 2,3, et 4 et articulées en A, B, C, D, E et F.

Les frottements sont négligés aux articulations et les poids propres des barres sont aussi négligés.

La barre 1 supporte une charge de poids p = 2000 N prenant son application en G.

1- Proposer un ordre d'isolément des barres.

2- Les barres 3 et 4 étant isolées, y appliquer le Principe Fondamental de la Statique pour donner les supports des actions

$$\vec{C}_{2/3} \;;\; \vec{E}_{1/4} \;;\; \vec{D}_{1/3} \;;\; \vec{F}_{2/4} .$$

3- La barre 2 étant isolée, compléter le tableau du bilan des forces extérieures et y appliquer le Principe Fondamental de la Statique pour déduire les trois équations d'équilibre y relatives.

4- La barre 1 étant isolée, compléter le tableau du bilan des forces extérieures et y appliquer le Principe Fondamental de la Statique pour déduire les trois équations d'équilibre y relatives.

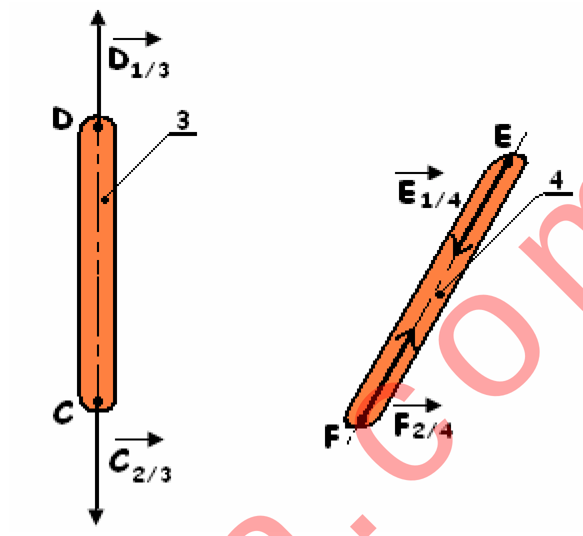
5- En déduire les modules de toutes les actions de contact en A, B, C, D, E et F.

6- Déterminer indépendamment graphiquement toutes les actions de contact en A, B, C, D, E et F.
Echelle 1 cm =100 N.

Solution :

1- Ordre d'isolément : 4 – 3 – 2- 1.

2-



- PFS au solide 3 : $\Sigma\vec{F}ext = \vec{0} \Rightarrow \vec{D}_{1/3} + \vec{C}_{2/3} = \vec{0}$

$$\Rightarrow \vec{D}_{1/3} = -\vec{C}_{2/3}$$
$$\Rightarrow \left\|\vec{D}_{1/3}\right\| = \left\|\vec{C}_{2/3}\right\|$$

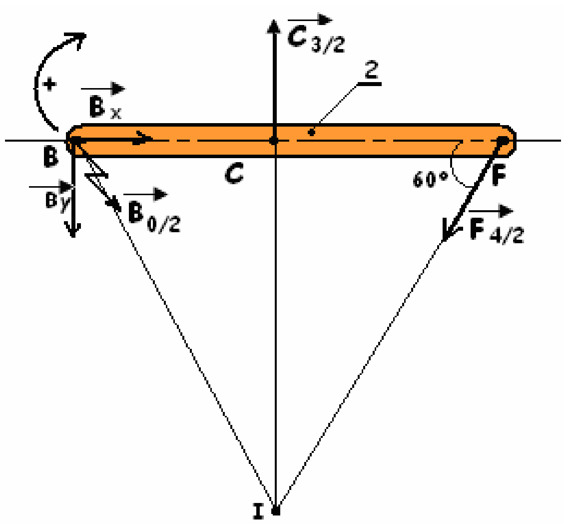
Donc : $\vec{D}_{1/3}$ et $\vec{C}_{2/3}$ ont même sens et même support; la droite (DC).

- PFS au solide 4 : $\Sigma\vec{F}ext = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}_{2/4} + \vec{E}_{1/4} = \vec{0}$

$$\Rightarrow \vec{F}_{2/4} = -\vec{E}_{1/4}$$
$$\Rightarrow \left\|\vec{F}_{2/4}\right\| = \left\|\vec{E}_{1/4}\right\|$$

Donc : $\vec{F}_{2/4}$ et $\vec{E}_{1/4}$ ont même sens et même support ; la droite (EF).

3- Système : barre 2 :



- Bilan des forces extérieures

Forces ext.	Point d'appll	Direction	Sens	Intensité
$\vec{B}_{0/2}$	B	?	?	?
$\vec{C}_{3/2}$	C	|	↑	?
$\vec{F}_{4/2}$	F	60°	60°	?

- PFS :

$$\begin{cases} \vec{B}_{0/2}+\vec{C}_{3/2}+\vec{F}_{4/2}=\vec{0} \\ \vec{\mathfrak{M}}_{(B)}\vec{B}_{0/2}+\vec{\mathfrak{M}}_{(B)}\vec{C}_{3/2}+\vec{\mathfrak{M}}_{(B)}\vec{F}_{4/2}=\vec{0} \end{cases}$$

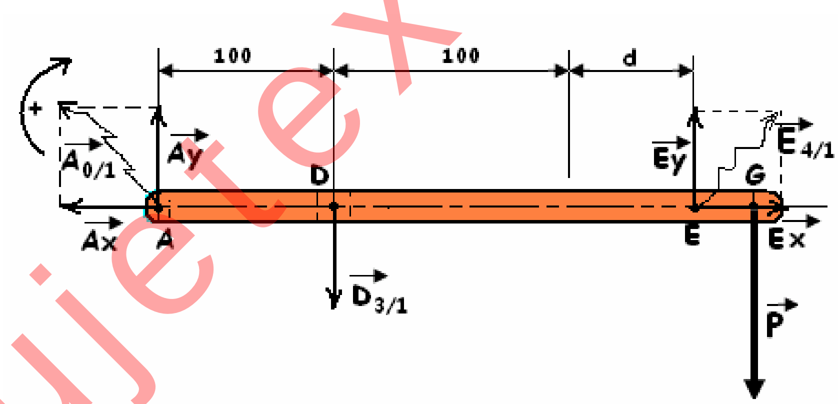
/x : $Bx-F_{4/2}.\cos 60°=0$ (1).

/y : $-By+C_{3/2}-F_{4/2}.\sin 60°=0$ (2).

/z : (moment) $-100.C_{3/2}+200.F_{4/2}.\sin 60°=0$

$\Rightarrow 2.F_{4/2}.\sin 60°-C_{3/2}=0$ (3)

4- Système : barre 1.



- PFS :

$$\begin{cases} \vec{A}_{0/1}+\vec{D}_{3/1}+\vec{E}_{4/1}+\vec{P}=\vec{0} \\ \vec{\mathfrak{M}}_{(A)}\vec{A}_{0/1}+\vec{\mathfrak{M}}_{(A)}\vec{D}_{3/1}+\vec{\mathfrak{M}}_{(A)}\vec{E}_{4/1}+\vec{\mathfrak{M}}_{(A)}\vec{P}=\vec{0} \end{cases}$$

/x : $-Ax+E_{4/1}.\cos 60°=0$ (4)

/y : $Ay-D_{3/1}+E_{4/1}.\sin 60°-P=0$ (5)

/z : $0+100.D_{3/1}-(200+d)E_{4/1}.\sin 60°+300.P=0$

Or $\tan 30°=\dfrac{d}{150}$ et $d=150.\tan 30°$

D'où

$100.D_{3/1}-(200+150.\tan 30°)E_{4/1}.\sin 60°+300.P=0$

$D_{3/1}-(2+1,5.\tan 30°)E_{4/1}.\sin 60°+3.P=0$ (6)

5- En sachant que $F = E$ et que $C = D$, modules des actions de contact en D, C, F et E et en remplaçant la relation (3) dans (6) ;

On a : **C = D = 13856,4 N**

D'autres part : **F = E = 8000 N**

- $Ax = E_{4/1}.\cos 60°$ (4)

$\Rightarrow$ Ax = 4000 N

- $Ay = D_{3/1} + E_{4/1}.\sin 60° - P$

$\Rightarrow$ Ay = 8928,2 N

Or $A = \sqrt{Ax^2 + Ay^2}$;

d'où **A = 9783,3 N**

ET :

- $Bx = F_{4/2}.\cos 60°$

$\Rightarrow$ Bx = 4000 N

- $By = C_{3/2} - F_{4/2}.\sin 60°$

$\Rightarrow$ By = 6928,2 N

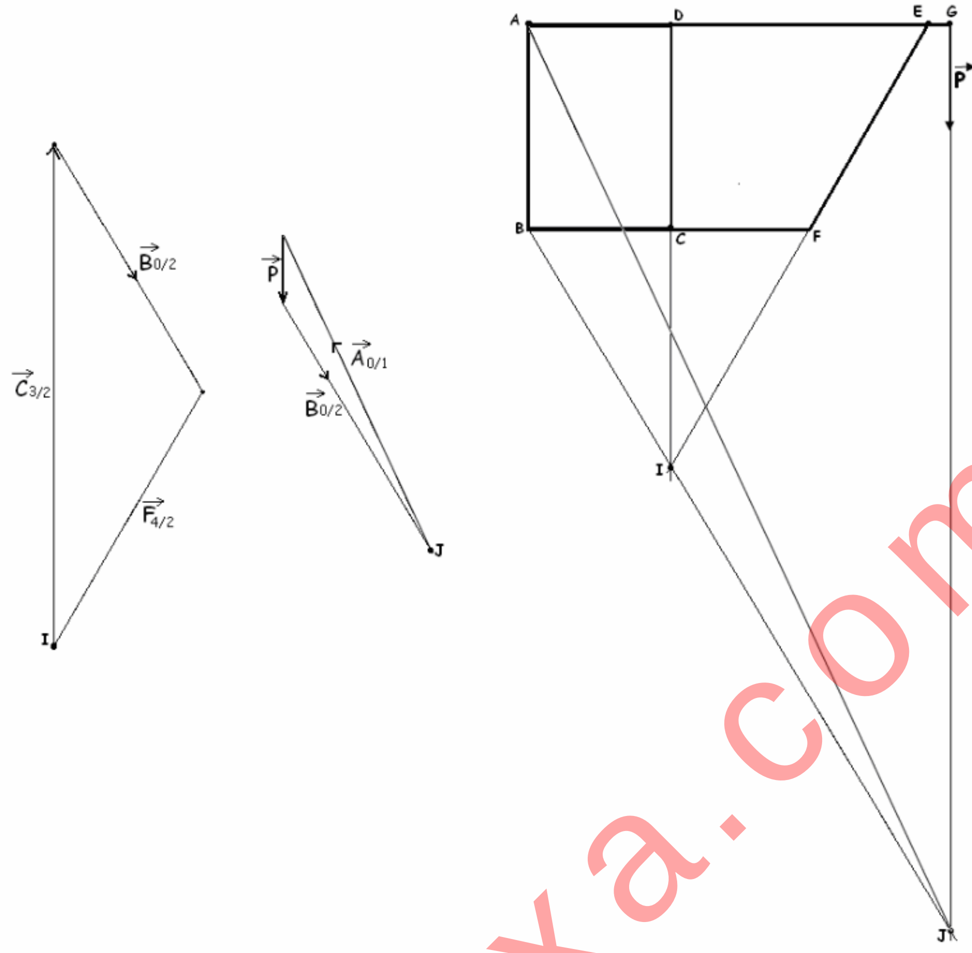
Or $B = \sqrt{Bx^2 + By^2}$;

d'où **B = 8000 N**

6- Résolution graphique :

- Etudions d'abord l'équilibre de la barre 2 soumise à trois forces et trouvons le point de concours I des actions qui la sollicitent. (voir schéma ci-dessous)
- Etudions ensuite l'équilibre de l'ensemble du système 1+2+3+4 soumis à trois forces et trouvons le point de concours J des actions qui le sollicitent. (voir schéma ci-dessous)

On aura deux dynamiques des forces : Celle donnée par le point I et celle donnée par le point J.



Avec l'échelle, par simple mesure, on a :

- A= 9750 N
- B = 8000 N
- C = D = 14000 N
- F = E = 8100 N

L'ESSENTIEL

Problème à résoudre N°1

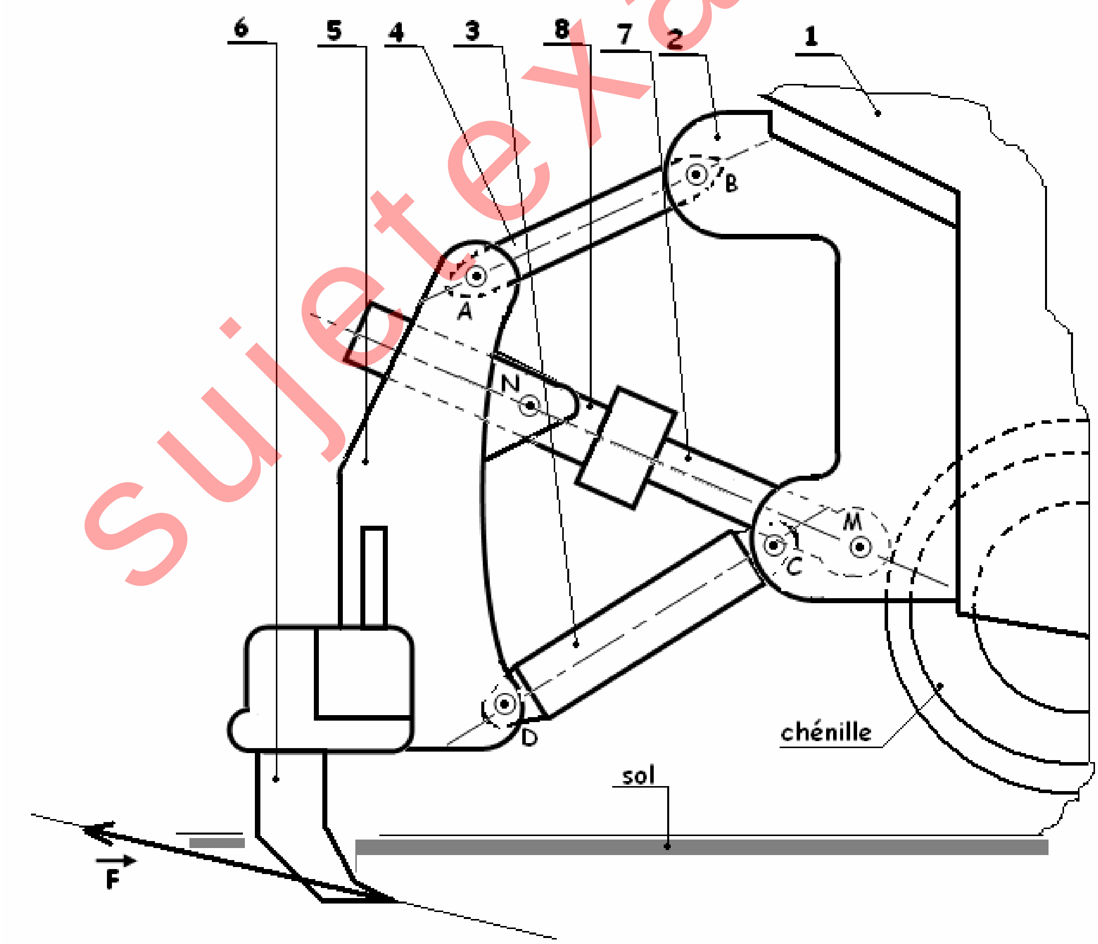
THEME : Ripper.

DESCRIPTION ET FONCTIONNEMENT :

Le ripper proposé à l'échelle réduite sur la figure ci-dessous est monté à l'arrière des bouteurs. Il est utilisé pour défoncer les sols trop durs.

Le ripper se compose de six lames **6** solidaires du bâti **5**. Cet ensemble est maintenu en A par deux biellettes **4** et en D par deux biellettes **3**. Les biellettes sont liées en B et C à l'arrière **1+2** du bouteur.

Le réglage de la position des lames est réalisé par le vérin hydraulique **7+8**. Celui-ci est articulé en M sur le châssis et en N sur le bâti porte lames. Les liaisons en A, B, C, D, M et N sont des liaisons pivots dont les centres portent le même nom.



HYPOTHESES ET DONNEES :

L'ensemble st en équilibre dans la position de la figure ci-dessous. L'étude est faite dans le plan de symétrie de l'appareil.

Les poids propres des pièces du mécanisme sont négligés, les frottements sont négligés, la force $\vec{F}$ de 10000 daN schématise l'action du sol sur les lames.

QUESTIONS :

1- Quelle est la nature de la sollicitation dans chacune des pièces **4** et **3** ?

2- Les solides **4** et **3** étant isolés, appliquer le PFS et déterminer les supports des actions mécaniques qui les sollicitent.

3- L'ensemble **7+8** étant isolé, appliquer le PFS et déterminer les supports des actions mécaniques qui les sollicitent.

4- L'ensemble **5+6** étant isolé, faire le bilan des actions mécaniques qui les sollicitent et déterminer graphiquement complètement les actions exercées en A, D, et N.

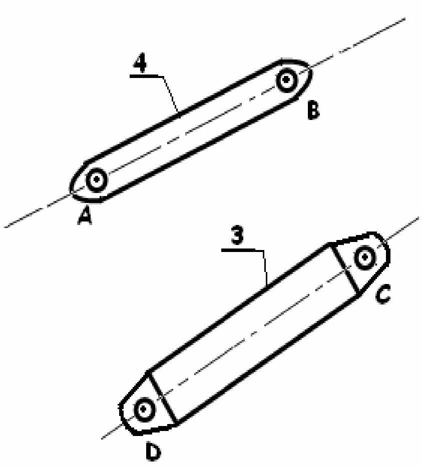
Solution :

1-

- Nature de la sollicitation de la pièce 4 :..
- Nature de la sollicitation de la pièce 3 :..

2-

PFS :..
....
....
....
....
....
....
....
....



3-

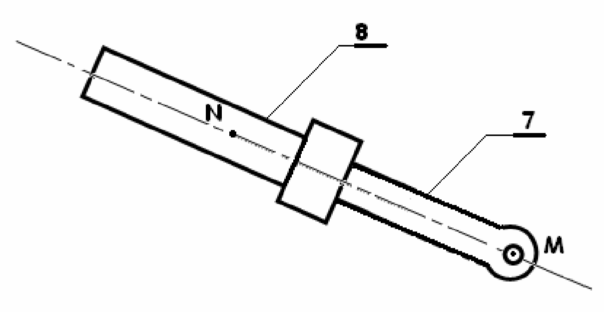
PFS :……………………………

……………………………

……………………………………

……………………………………

……………………………………



4- Bilan des actions mécaniques

Forces	Pt. d'Appl.	Direction	Sens	Module

- Détermination des actions de contact en A, D et N :

……………………………………

……………………………………

……………………………………

……………………………………

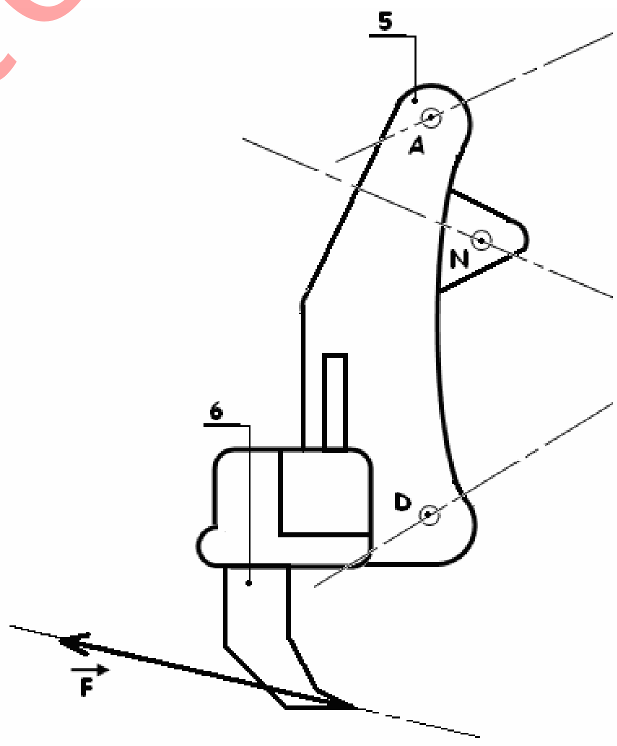
……………………………………

……………………………………

……………………………………

……………………………………

……………………………………

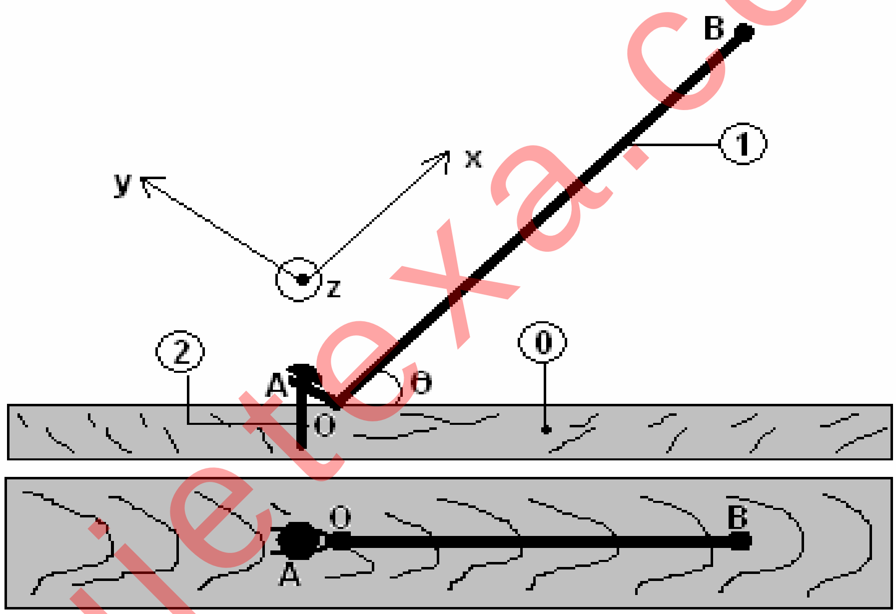


Problème à résoudre N°2

THEME : Le pied de biche ou arrache clou.

DESCRIPTION ET FONCTIONNEMENT :

Le pied de biche (1) ci-dessous sert à extraire le clou (2) d'une planche (0). Il est constitué de deux parties OA et OB coudées en O. Le manœuvre doit exercer en B une force $\vec{B}_{M/1}$ perpendiculairement à OB. Le pied de biche est supposé alors pivoter autour d'un axe fixe (Δ) passant par O.



HYPOTHESES ET DONNEES :

- $\vec{B}_{M/1}$ a pour intensité 150N
- La force avec laquelle le clou est extrait de la planche est perpendiculaire à OA.
- A l'équilibre, juste avant que le clou ne saute, OB fait un angle θ = 30° avec la planche. La masse du pied de biche est négligée.
- OA= 3 cm et OB= 30 cm.

QUESTIONS :

1- Le pied de biche étant isolé, faire le bilan des forces extérieures qui le sollicitent.

2- Déterminer en fonction de $A_{2/1}$ les composantes du vecteur moment $\vec{\mathfrak{M}}_{(0)}\vec{A}_{2/1}$.

3- Sachant que (Δ) a pour vecteur unitaire $\vec{k}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$,

déduire en fonction de $A_{2/1}$ le moment $\mathfrak{M}_{(\Delta)}\vec{A}_{2/1}$

4- Déterminer les composantes du vecteur moment $\vec{\mathfrak{M}}_{(o)}\vec{B}_{M/1}$.

5- En dédire le moment $\mathfrak{M}_{(\Delta)}\vec{B}_{M/1}$.

6- Appliquer le Principe Fondamental de la Statique et calculer la force avec laquelle le clou est extrait de la planche.

7- Comparer cette force à $B_{M/1}$ et conclure.

8- Représenter la réaction de la planche en O, $\vec{O}_{0/1}$.

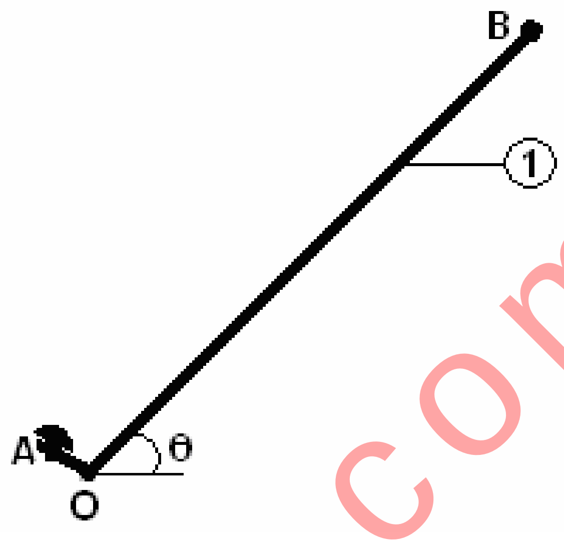
9- Appliquer le Principe Fondamental de la Statique et déterminer les composantes de $\vec{O}_{0/1}$ dans le plan $(O,\vec{i},\vec{j})$

10- En déduire l'intensité de $\vec{O}_{0/1}$ et le coefficient de frottement entre l'arrache clou et le bois.

11- Trouver graphiquement la force avec laquelle le clou est extrait de la planche. Les conditions restent inchangées et prendre l'échelle des forces : 1 cm = 50 N

FEUILLE REPONSES

1- Bilan des forces extérieures qui sollicitent le pied de biche :



Forces ext	Point d'Appl	Direction	Sens	Intensité

2- Déterminons en fonction de $A_{2/1}$ les composantes du vecteur moment $\vec{\mathfrak{M}}_{(0)}\vec{A}_{2/1}$:

....

....

....

3- Sachant que (Δ) a pour vecteur unitaire $\vec{k}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$,

Déduisons en fonction de $A_{2/1}$, $\mathfrak{M}_{(\Delta)}\vec{A}_{2/1}$:

....

....

....

....

4- Déterminons les composantes du vecteur moment $\vec{\mathfrak{M}}_{(o)}\vec{B}_{M/1}$:

....

....

....

....

5- Déduisons le moment $\mathfrak{M}_{(\Delta)}\vec{B}_{M/1}$:

....

....

....

....

6- Appliquons le Principe Fondamental de la Statique et calculons la force avec laquelle le clou est extrait de la planche :

....

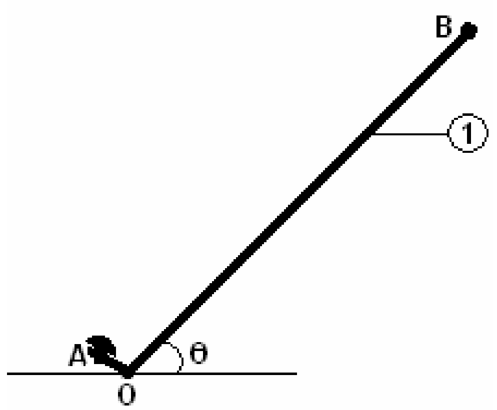
....

....

7- Comparons cette force à $B_{M/1}$:

Conclusion : ....

8- Représentons la réaction de la planche en O :



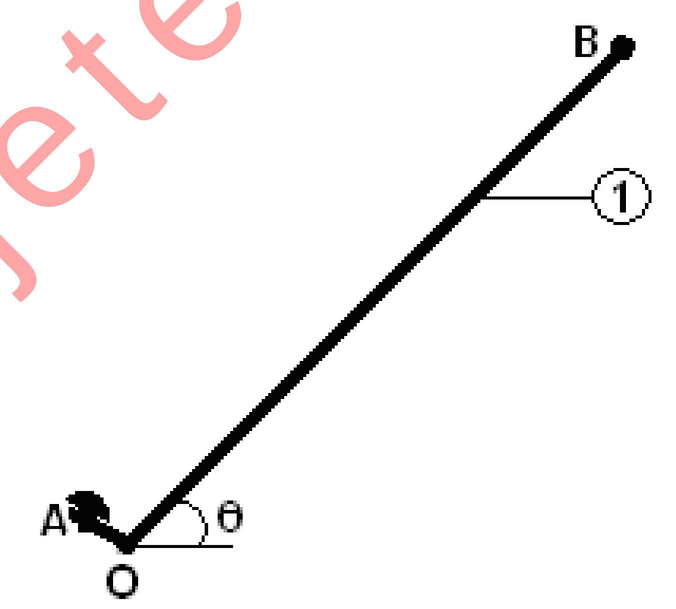
9- Appliquons le Principe Fondamental de la Statique et déterminons les composantes de $\vec{O}_{0/1}$ dans le plan $(O,\vec{i},\vec{j})$:

....
....
....
....

10- Déduisons l'intensité de $\vec{O}_{0/1}$:

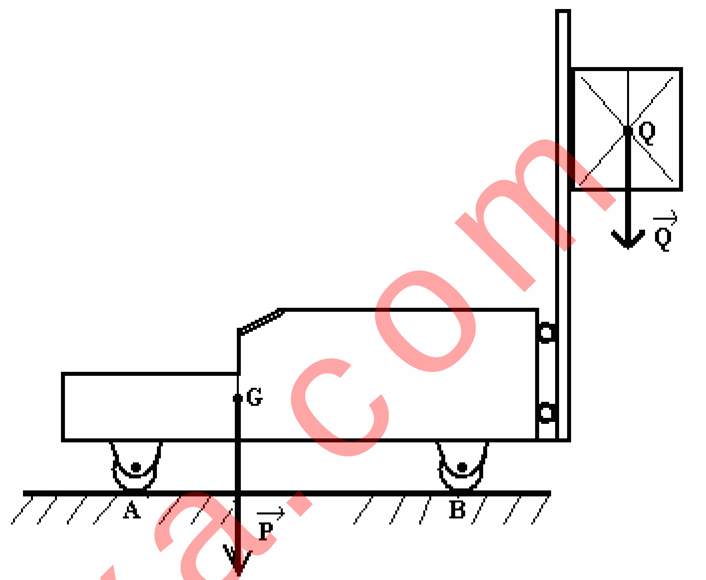
....
....
....
....

Graphiquement : Echelle des forces : 1 cm = 50 N



Problème à résoudre N°3

Un élévateur à fourche, donné par le schéma, soulève une charge $\vec{Q}$ d'intensité 2000N. Le poids du chariot et du conducteur a pour valeur P = 6000N. O néglige tous les frottements.



1- Trouver par la statique graphique la résultante des deux forces $\vec{P}$ et $\vec{Q}$.

2- Déterminer graphiquement les actions de contact des rails sur les roues en A et en B.

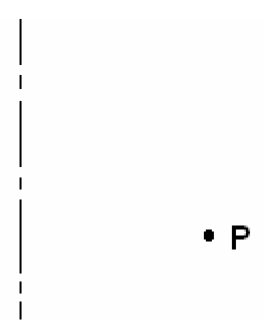
On donne :

Echelle des longueurs : 0,5m $\rightarrow$1 cm

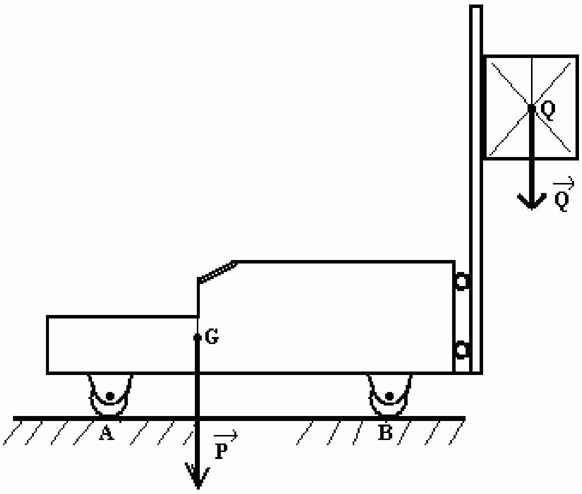
Echelle des forces : 1cm $\rightarrow$1000N.

Solution :

1 -

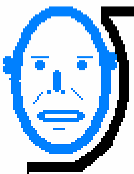


2- Déterminons graphiquement les actions en A et B :



Funiculaire des forces

Dynamique des forces



L'ESSENTIEL

Chapitre 7 | Equilibre statique avec adhérence et frottement

Objectif : Résoudre les problèmes de statique où les surfaces en contact ne sont pas parfaitement lisses.

1- Définitions :

1.1- Phénomène d'adhérence :

Lorsque deux surfaces tendent à glisser mais **ne se déplacent pas** l'une par rapport à l'autre, on dit qu'il y'a adhérence.

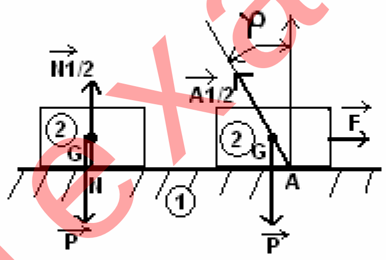
1.2- Phénomène de frottement :

Lorsque deux surfaces imparfaitement polies **se déplacent** l'une par rapport à l'autre, on dit qu'il y'a frottement.

2- Etude expérimentale de l'adhérence et du frottement

2.1- Le solide repose sur un plan horizontal :

2.1.1- Mise en évidence du phénomène d'adhérence :



Soit un solide (2) simplement posé sur une table (1) : Le système est en équilibre sous l'action de $\vec{P}$ et $\vec{N}_{1/2}$.

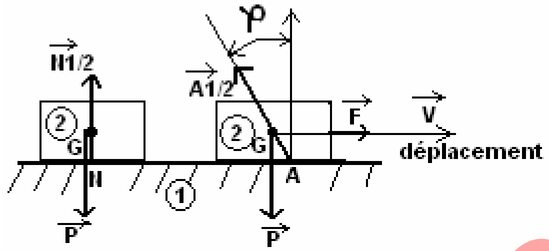
On applique sur (2) une petite force horizontale $\vec{F}$: Le solide reste en équilibre tant que $\vec{F}$ n'a pas atteint une certaine valeur limite F_A telle que $F \leq F_A$: C'est le phénomène d'adhérence.

- Le point d'application de $\vec{N}_{1/2}$ est légèrement déporté vers l'avant en $\vec{A}_{1/2}$
- La droite d'action de $\vec{N}_{1/2}$ est inclinée de φ et devient celle de $\vec{A}_{1/2}$.
- φ est appelé angle d'adhérence.
- $\tan\varphi = f_a$ est le coefficient d'adhérence.

Remarque :

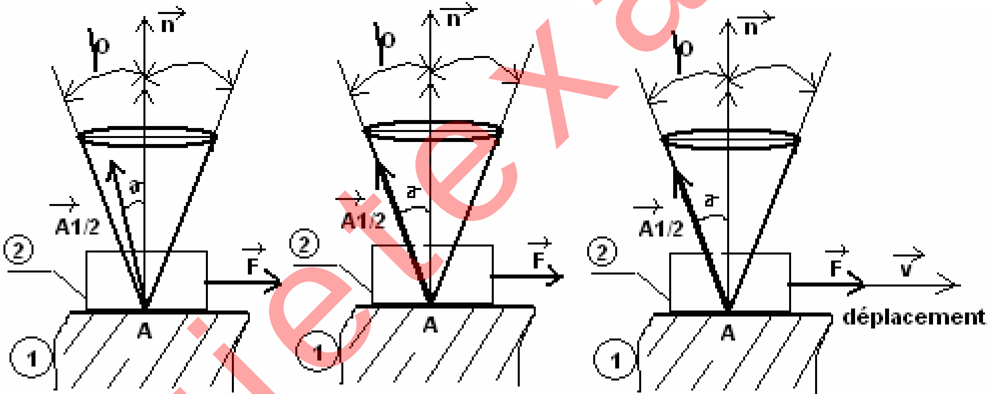
Si la force $\vec{F}$ tire le solide (2) jusqu'à ce qu'il soit sur le point de le mettre en mouvement, on parle d'équilibre strict. Il y'a **adhérence stricte.**

2.1.2- Mise en évidence du phénomène de frottement :



Le solide se déplace à présent sur la table : φ est appelé maintenant angle de frottement : On dit aussi qu'il y'a **glissement.**

2.1.3- Cône de frottement et cône d'adhérence :



<u>**Cas N° 1 :**</u> <u>**Cas N° 2 :**</u> <u>**Cas N° 3 :**</u>

a) Cas N° 1 :

La droite d'action de $\vec{A}_{1/2}$ est entièrement contenue à l'intérieur du cône d'adhérence et $\alpha \leq \varphi$:**Il y'a adhérence.**

b) Cas N° 2 :

La droite d'action de $\vec{A}_{1/2}$ est située sur le cône d'adhérence et $\alpha = \varphi$: **Il y'a adhérence stricte.**

c) Cas N°3 :

Le solide se déplace par rapport à la table : **Il y'a glissement ou frottement,** Attention ! Ici, la droite d'action de $\vec{A}_{1/2}$ ne pourra jamais être situé à l'intérieur du cône de frottement car **l'angle de frottement est la limite de l'angle d'adhérence lorsque le mouvement se produit**.

2.2- Le solide repose sur un plan incliné :

Cas N° 1 **Cas N° 2**

Pour le premier cas, en l'absence de la petite force de traction, il y'a adhérence et le solide (2) commence à glisser si : $\alpha = \varphi$

- Pour le deuxième cas, en présence de la petite force de traction, il y'a adhérence ou frottement si l'angle d'adhérence est $\alpha + \varphi$

2.3- Notion d'arc-boutement :

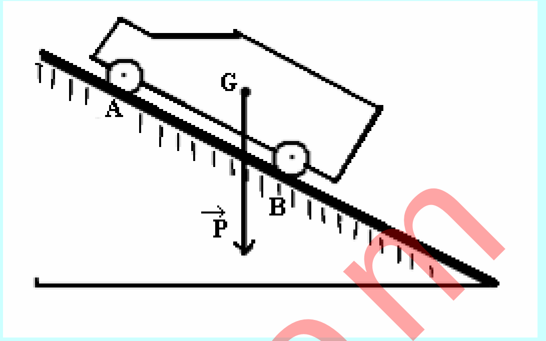
Soit un solide soumis à l'action de n forces extérieures. **On dit qu'il y'a arc-boutement** chaque fois que le phénomène d'adhérence provoque une impossibilité de mouvement (donc l'équilibre) quelque soit l'intensité des forces mises en jeu.

Pour plus de visibilité, les problèmes de l'arc-boutement seront traités dans la partie consacrée à la statique graphique.

Application

Application N° 1 :

La voiture tout terrain ci-contre est à l'arrêt sur une pente de 20%. Le frein à main est actionné et seules les roues avant sont freinées ; les roues arrières restant libres. Le poids de la voiture est

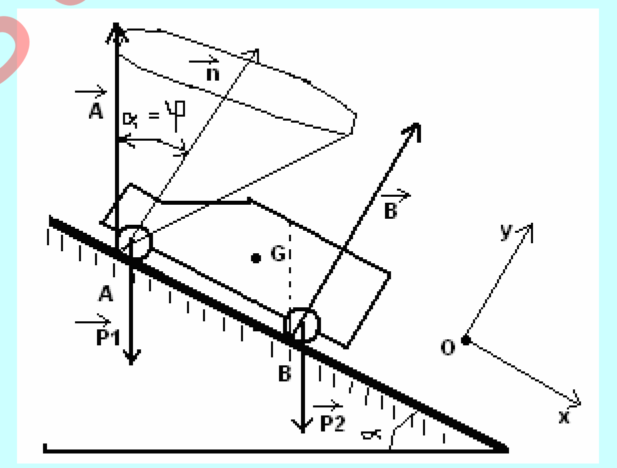


P =935 daN, supposé être reparti équitablement sur les roues avant A et sur les roues arrières B. Les frottements en B sont négligés tandis que ceux en A ne sont pas négligés et le coefficient d'adhérence en est 0,5.

- **a)** Représenter les actions de contact en A et B.
- **b)** L'équilibre de la voiture est-il possible ?
- **c)** A partir de quelle pente y'a-il glissement en A ?
- **d)** Isoler la voiture dans sa position ci-contre et déterminer algébriquement les actions de contact en A et B.

Solution Application N° 1 :

a) Voir figure ci-dessous :



b) L'équilibre de la voiture est possible si $\vec{A}$ se trouve dans le cône d'adhérence ; c'est à dire si $\varphi \leq \alpha$

On a : $\sin\alpha = \frac{20}{100} = \frac{1}{5} \Rightarrow \alpha = 11{,}53°$

Et $\tan\varphi = 0{,}5 \Rightarrow \varphi = 26{,}56°$

On constate que $\alpha < \varphi$.

Donc **la voiture est en équilibre**.

c) Il y'a glissement en A à partir de $\varphi = \alpha$; soit : $\varphi = 11{,}53°$

d) Isolons la voiture :

- Projetons suivant les axes du repère que nous avons nous mêmes choisi les vecteurs forces constituant les équations vectorielles d'équilibre :

$$\vec{A}\begin{vmatrix} -A.\sin\alpha \\ A.\cos\alpha \end{vmatrix} ; \vec{P_1}\begin{vmatrix} P/2.\sin\alpha \\ -P/2.\cos\alpha \end{vmatrix}$$

Et

$$\vec{P_2}\begin{vmatrix} P/2.\sin\alpha \\ -P/2.\cos\alpha \end{vmatrix} ; \vec{B}\begin{vmatrix} 0 \\ B \end{vmatrix}$$

$$\vec{A} + \vec{P_1} = \vec{0} \Rightarrow \begin{vmatrix} -A.\sin\alpha + \frac{P}{2}.\sin\alpha = 0 \\ A.\cos\alpha - \frac{P}{2}.\cos\alpha = 0 \end{vmatrix} \Rightarrow A = \frac{P}{2}$$

$$\vec{P_2} + \vec{B} = \vec{0} \Rightarrow \begin{Vmatrix} P/2.\sin\alpha = 0 \\ P/2.\cos\alpha = B \end{Vmatrix}$$

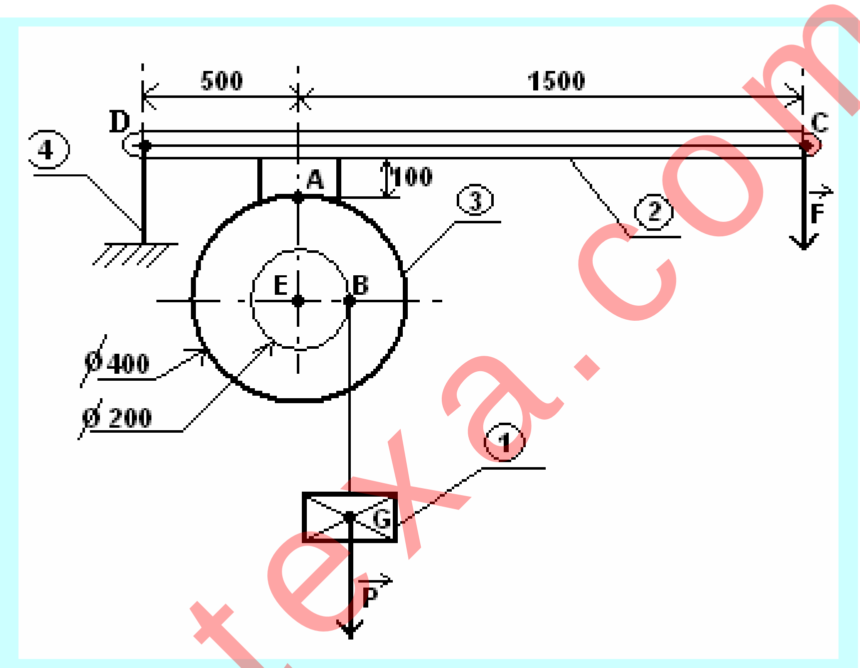
A=467,5daN

$$B = P/2.\cos\alpha$$

B = 458,065

Application N°2 :

Un frein à tambour est composé d'un levier (1) de longueur L, d'un sabot de frein et d'un cylindre (tambour).Il sert à arrêter une charge en cours d'élévation. Les poids du tambour et du levier sont négligés devant ceux de la charge de poids $\vec{P}$. On donne : P = 1000daN et le coefficient d'adhérence en A est 0,3.

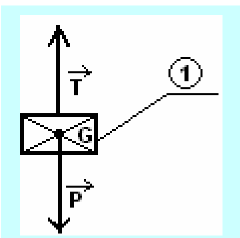


1- Isoler le tambour (3), faire le bilan des forces extérieures et déterminer les actions de contact en A et B, puis en E.
2- Isoler le levier (2) et déterminer les actions de contact au niveau de l'articulation en D, ainsi que l'effort $\vec{F}$.

Solution :

1-

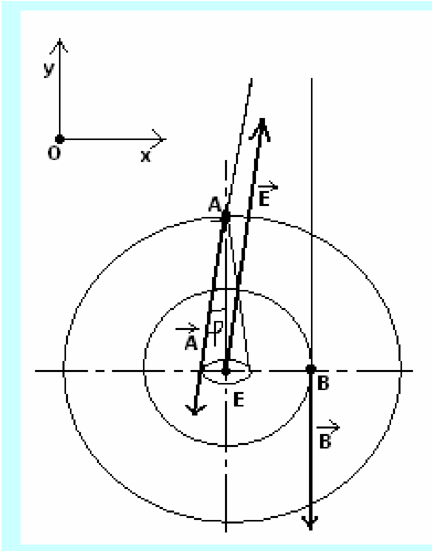
- Avant d'isoler le tambour (3), il est nécessaire d'isoler a priori le corps (1) :



$$\vec{P}+\vec{T}=\vec{0} \Rightarrow T-P=0 \Rightarrow T=P=B_{1/3}=1000daN$$

Donc : B=1000daN

- Isolons à présent le tambour (3) :



Bilan des forces extérieures :

Forces ext.	Point d'appll.	Direction	Sens	Intensité
$\vec{B}$	B	|	↓	1000 daN
$\vec{A}$	A	16.7°	↓	?
$\vec{E}$	E	?	?	?

Il est important de remarquer que $\vec{B}$ et $\vec{A}$ concourent au point I et par conséquent, $\vec{E}$ aussi concoure en ce même point.

- Projetons suivant les axes du repère que nous avons nous mêmes choisi les vecteurs forces constituant les équations vectorielles d'équilibre :

$$\vec{B}\begin{vmatrix}0\\-B\end{vmatrix};\vec{A}\begin{vmatrix}-A.\sin\varphi\\-A.\cos\varphi\end{vmatrix};\vec{E}\begin{vmatrix}Ex\\Ey\end{vmatrix}$$

- Appliquons le PFS au système matériel :

* $\vec{B}+\vec{A}+\vec{E}=\vec{0}$

$$\Rightarrow\begin{cases}0-A.\sin\varphi+Ex=0\\-B-A.\cos\varphi+Ey=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}Ex=A.\sin\varphi\\Ey=B+A.\cos\varphi\end{cases}$$; Or $B=1000daN$ et $\tan\varphi=0{,}3\Rightarrow\varphi=16{,}7°$;

D'où : $$\begin{cases}Ex=0{,}287A(1)\\Ey=1000+0{,}957A(2)\end{cases}$$

$* \ \vec{\mathfrak{M}}_{(E)}\vec{B} + \vec{\mathfrak{M}}_{(E)}\vec{E} + \vec{\mathfrak{M}}_{(E)}\vec{A} = \vec{0}$

$\Rightarrow -200B + 400A.\sin\varphi = 0$; suivant l'axe (Oz).

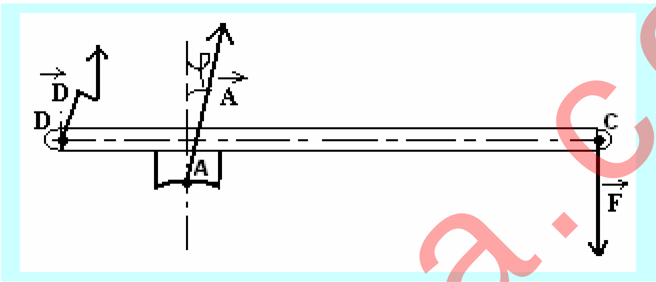
$$\Rightarrow A = \frac{200B}{400.\sin\varphi} = \frac{B}{2.\sin\varphi} = \frac{1000}{2.\sin 16{,}7} = 1740daN$$

Donc : **A=1740 daN**

D'où (1) : Ex=500daN et Ey=2666,61daN

$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} \Rightarrow$ **E=2713,08daN**

2- Isolons le levier (2) :



Forces ext.	Pt d'appl	Direction	Sens	Intensité
$\vec{D}$	D	?	?	?
$\vec{A}$	A	16.7°	↑	1740daN
$\vec{F}$	C	V	↓	?

- Projetons suivant les axes du repère que nous avons nous mêmes choisi les vecteurs forces constituant les équations vectorielles d'équilibre :

$$\vec{F}\begin{vmatrix} 0 \\ -F \end{vmatrix} ; \vec{A}\begin{vmatrix} A.\sin\varphi \\ A.\cos\varphi \end{vmatrix} ; \vec{D}\begin{vmatrix} Dx \\ Dy \end{vmatrix}$$

- Appliquons le PFS au système matériel

$$* \ \vec{F} + \vec{A} + \vec{D} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} 0 + A.\sin\varphi + Dx = 0 \\ -F + A.\cos\varphi + Dy = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Dx = -A.\sin\varphi = -500daN \\ Dy = F - A.\cos\varphi = -1225daN \end{cases}$$

$* \ \vec{\mathfrak{M}}_{(D)}\vec{D} + \vec{\mathfrak{M}}_{(D)}\vec{A} + \vec{\mathfrak{M}}_{(D)}\vec{F} = \vec{0}$

$\Rightarrow$ Suivant Oz, $2000F - 100A.\sin\varphi - 500A.\cos\varphi = 0$

$\Rightarrow$ $F = 441{,}65daN$

Chapitre 8 | Centre de Gravité, Poids et Masse.

Objectif : Partir de la forme et de la masse d'un solide pour pouvoir déterminer son centre de gravité et en déduire les caractéristiques de son Poids.

1- Masse d'un corps :

La masse d'un corps est une grandeur physique proportionnelle à la quantité de matière que renferme ce corps.

Elle ne varie pas quelque soit le lieu.

$$M = \varphi . v$$

M : Masse du corps en Kg.

φ : Masse volumique du corps en Kg/m^3.

V : Volume du corps en m^3.

La masse d'un corps est aussi liée à la densité de ce corps selon que le corps est solide, liquide ou gazeux :

- Pour un corps solide ou liquide :

$$d = \frac{\varphi_c}{\varphi_{eau}} = \frac{M_c}{M_{eau}}$$

- Pour un corps gazeux (qui respecte la loi des gaz parfaits) :

$$M_c = 29.d$$

2- Poids d'un corps :

Le poids ou action de pesanteur notée $\vec{P}$ est la force qu'exerce le centre de la terre sur tout corps. Ses caractéristiques sont :

- Le point d'application : son centre de gravité G ;
- La direction : Verticale ;
- Le sens : Descendant (du haut vers le bas) ;
- Son intensité $\boxed{\|\vec{P}\| = m.g}$; avec m=masse du corps en Kg et g=accélération de la pesanteur en N/Kg.

3- Notion de centre de gravité :

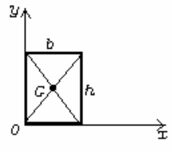
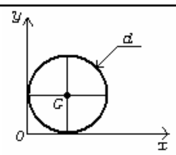
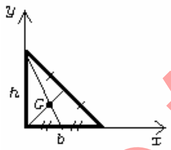
3.1- Définitions :

- On appelle centre de gravité de tout système matériel (S) le point d'application G du poids ou du vecteur poids de ce système matériel.

- On appelle centre de masse le point central de l'ensemble de toutes les masses constituant un système ou un ensemble matériel.

Remarque : Le centre de masse est confondu au centre de gravité lorsque le corps est homogène.

3.2- Centres de gravité des surfaces planes élémentaires :

Désignations	Schéma	Abscisses	Ordonnées	Coordonnées du centre de gravité
Rectangle		$x_G = \frac{b}{2}$	$y_G = \frac{h}{2}$	$G\left(\frac{b}{2};\frac{h}{2}\right)$
Cercle		$x_G = \frac{d}{2}$	$y_G = \frac{d}{2}$	$G\left(\frac{d}{2};\frac{d}{2}\right)$
Triangle rectangle		$x_G = \frac{b}{3}$	$y_G = \frac{h}{3}$	$G\left(\frac{b}{3};\frac{h}{3}\right)$

3.3- Centre de gravité des surfaces planes complexes homogènes :

Pour déterminer le Centre De Gravité (cdg) des surfaces planes complexes homogènes, il faut :

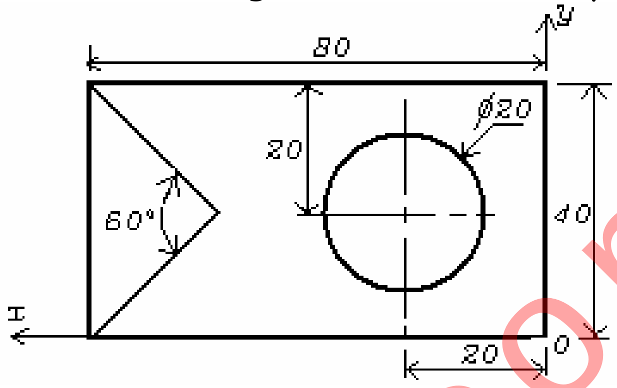
- Découper les surfaces complexes en surfaces élémentaires ;
- Fixer un repère si ce n'est pas imposé et trouver le cdg de chaque surface élémentaire ;
- Calculer les différentes surfaces élémentaires S_i ;

Le poids étant proportionnel à la surface, appliquer les formules :

$$x_G = \frac{\sum x_i . S_i}{\sum S_i} \qquad y_G = \frac{\sum y_i . S_i}{\sum S_i}$$

Application

Soit la plaque ci-contre munie d'un trou. Calculer les coordonnées du centre de gravité G dans le repère (O, x, y)

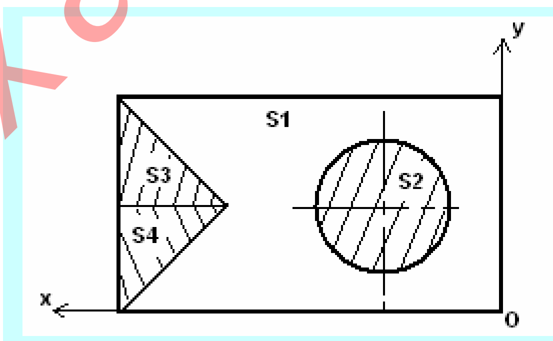


Solution :

Décomposons la plaque en surfaces simples :

On a :

- **S1 = 40x80 = 3200**
- **S2 = 3,14x10² = 314**
- S3 = S4 = $\frac{20.b}{2}$; et tan



30° = $\frac{20}{b} \Rightarrow$ b = $\frac{20}{\tan 30°}$

= $\frac{20}{\frac{\sqrt{3}}{3}}$ = $\frac{20\sqrt{3}}{3}$ = 34,641.

D'où: **S3 = S4 =346,41**

D'autre part

- **x_1 = 40** **y_1 = 20**
- **x_2 = 20** **y_2 = 20**
- $x_3 = x_4 = 80-\frac{b}{3}$, soit **$x_3$ = x_4 = 68,453**

Et, $y_3 = 20+\frac{20}{3} = 26{,}66$; $y_4 = 2.\frac{20}{3} = 13{,}33$; soit **y_3 = 26,66** et **y_4 = 13,33**

En comptant les surfaces des vides négatives, on a :

- $x_G = \dfrac{\sum x_i.S_i}{\sum S_i} = \dfrac{40(3200)+20(-314)+68,453(-346,41)+68,453(-346,41)}{3200-314-346,41-346,41} = 33,87$

Soit **X_G = 33,87**

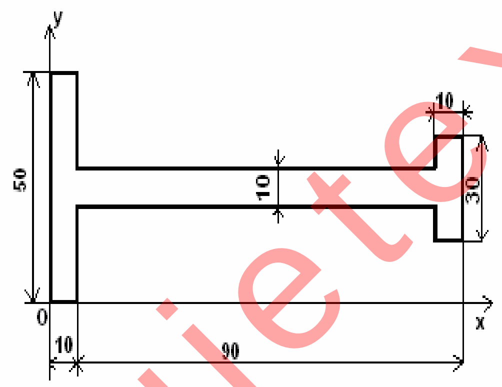
- $y_G = \dfrac{\sum y_i.S_i}{\sum S_i} = \dfrac{20(3200)+20(-314)+26,26(-346,41)+13,33(-346,41)}{3200-314-346,41-346,41} = 20$

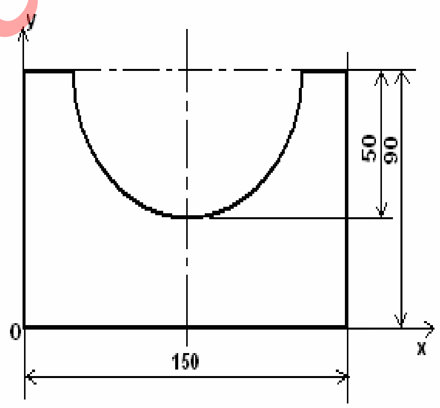
Soit **y_G = 20**

Donc : $G\begin{pmatrix}33,87\\20\end{pmatrix}$

CONSOLIDATION

Déterminer par calcul les coordonnées du centre de gravité des objets plans représentés ci-dessous.





L'ESSENTIEL

Chapitre9

Généralité sur la résistance des matériaux

Objectif :
Maîtriser de manière sommaire les paramètres qui interviennent lors du choix d'un matériau.

1- But de la RDM :

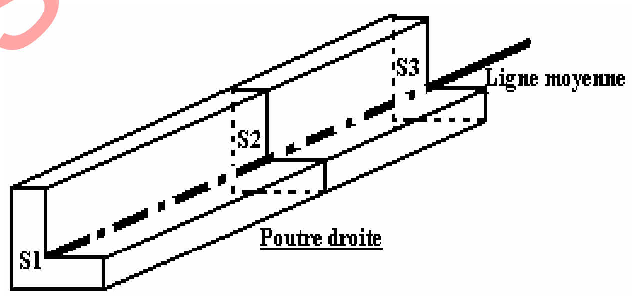
La RDM a pour but de déterminer la limite de résistance d'un solide et de définir sa résistance constante d'élasticité. En effet, tout solide même indéformable comme on le voit en statique se déforme en réalité et peut se rompre. C'est pourquoi en construction mécanique, on ne tolère pas les petites déformations. La RDM nous permet grâce aux calculs d'évaluer la résistance et les déformations.

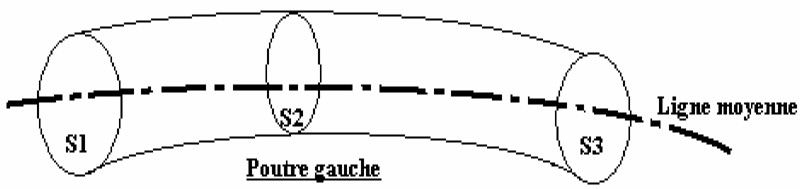
2- Définition de la poutre :

On appelle poutre en RDM, le solide engendré par une surface plane dont le centre de gravité se déplace sur une courbe appelée **ligne moyenne**.

- Si la ligne moyenne est une droite, **la poutre est dite droite**.
- Si la ligne moyenne est une courbe, **la poutre est dite gauche**.

Exemples :





Remarques :

- On considère généralement qu'un solide est en poutre lorsque la plus grande dimension longitudinale dépasse au moins de 10 fois la plus grande dimension transversale. **L** $\geq$ **10d**
- Pour une poutre, les sections planes (S_1 ; S_2 ; S_3) sont toujours perpendiculaires à la ligne moyenne ou **fibre neutre** et ne doivent varier que progressivement.
- Les matériaux sont supposés **homogènes (même matière en tout point de la structure)** et **isotrope (mêmes caractéristiques mécaniques en tout point du matériau).**
- Les déformations dans une poutre sont en général faibles, de l'ordre du mm.

3- Contraintes dans une poutre :

3.1- Définition :

Soit une poutre que l'on coupe en deux tronçons (1) et (2) ; chaque portion restant en équilibre. Dans cette section, s'exerce une force de cohésion $\vec{F}$ destinée à l'équilibre des actions du tronçon (2). Considérons une section élémentaire (ΔS) de centre M sur laquelle s'applique une force élémentaire de cohésion $\Delta\vec{F}$. On appelle contrainte en M de centre ΔS , la grandeur $\vec{C}_m$ définie par :

$$\vec{C}_m = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta\vec{F}}{\Delta S} = \frac{d\vec{F}}{dS}$$

$\vec{C}_m$ admet des composantes dans le repère (G_1, x,y,z):

$$\vec{C}_m = \vec{\sigma}_n + \vec{T}x + \vec{T}y$$

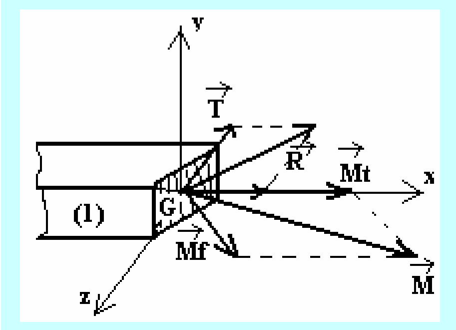
3.2- Unités des contraintes :

L'unité conventionnelle de la contrainte est le **Pascal** (Pa) mais nous utilisons souvent les unités telles que le méga Pascal (MPa). En effet :

- **1 Pa = 1 N/m² ;**
- **1 MPa = 1 N/mm² ;**
- **1 bar = 10^5 Pa = 0,1 Mpa.**

4- Etude des sollicitations :

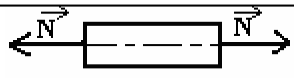
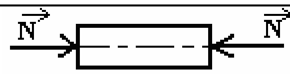
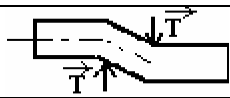
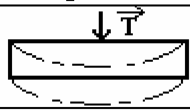
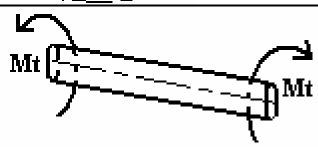
4.1- Eléments de réduction dans une section :



Soit une poutre sectionnée en deux parties : les éléments de réduction dans la section S_1 de gauche sont $\vec{R}$ et $\vec{M}$:

- Les composantes de $\vec{R}$ sont :
  - * $\vec{N}$ = effort normal porté par x.
  - * $\vec{T}$ = effort tranchant dans le plan (G, y, z).
- Les composantes de $\vec{M}$ sont :
  - * $\vec{Mt}$ = moment de torsion porté par (G, x)
  - * $\vec{Mf}$ = moment de flexion dans le plan (G, y, z).

4.2- Tableau récapitulatif des sollicitations :

Sollicitations	Efforts				Illustrations
	N	T	M t	M f	
Traction simple	> 0	0	0	0	
Compression simple	< 0	0	0	0	
Cisaillement simple	0	$\neq 0$	0	0	
Flexion simple	0	$\neq 0$	0	$\neq 0$	
Torsion simple	0	0	$\neq 0$	0	

CONNAISSANCE DU COURS

1- Donner l'importance de la RDM.
2- Définir la notion de poutre.
3- Donner la différence entre poutre droite et poutre gauche.
4- Répondre par vrai ou faux :
   a) la contrainte dans une poutre est le rapport entre la force élémentaire de cohésion et la section élémentaire sur laquelle s'applique cette force.
   b) La déformation dans une poutre est de l'ordre du centimètre.
   c) L'unité conventionnelle de la contrainte est le N/m^2
5- Citer les formes de sollicitations simples.
6- Quelle différence y'a-t-il entre la flexion simple et le cisaillement simple ?
7- Quelle différence y'a-t-il entre la traction simple et la compression simple ?

L'ESSENTIEL

Chapitre10

Traction - Compression

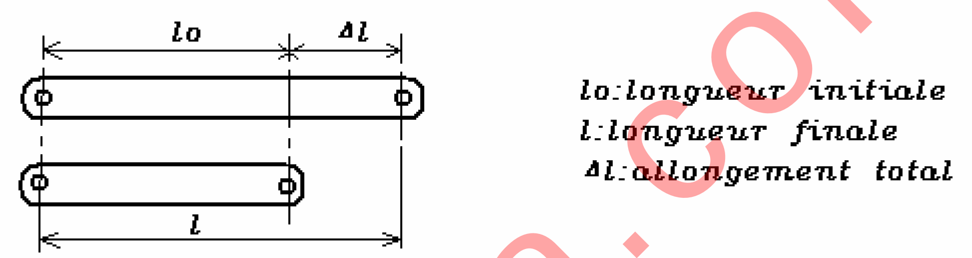
Objectif :

Dimensionner les poutres soumises aux sollicitations simples de traction et de compression.

1- Essai de traction :

1.1- Allongement relatif : ε

Une poutre est sollicitée en traction chaque fois que les actions exercées aux extrémités se réduisent à deux forces égales et opposées de direction la ligne moyenne.



L'allongement relatif ε est une constante telle que :

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{lo} = \frac{l - lo}{lo}$$

- Les expériences d'essais montrent que les **allongements sont proportionnels aux longueurs initiales.**
- ε n'a pas d'unité.

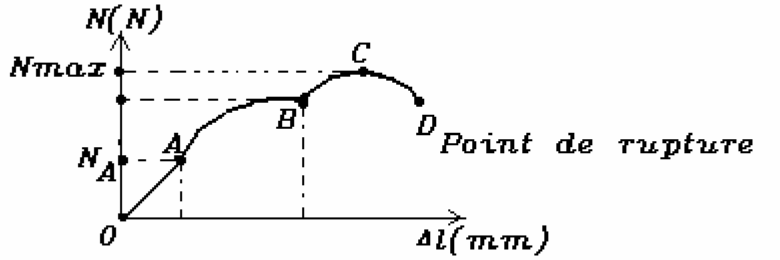
1.2- Contrainte normale : σ

Dans le cas général de la traction, sauf phénomène particulier de concentration de contrainte, nous admettons que toutes les contraintes sont uniformément reparties et identiques sur la section droite So :

$$\sigma = \frac{N}{So}$$

N en Newton (N) et So en m² ou en mm² ;
σ **en N/m² (Pa) ou en N/mm² (Mpa).**

1.3- Courbe des essais :



- OA : zone de déformation élastique : **domaine élastique**
- AB : zone de transition : **domaine de transition**
- BC : zone de déformation plastique : **domaine plastique.**
- N_A : Force limite d'élasticité
- Nmax : Force maximale avant la rupture.

1.4- Loi de Hooke :

Dans la zone OA (zone de déformation élastique), l'effort N de traction est proportionnel à l'allongement Δl :
Le rapport de proportionnalité est le **module d'élasticité longitudinal (ou module de Young)** noté E.

$\sigma = E.\varepsilon$ Or $\sigma = \frac{N}{So}$ Et $\frac{N}{So} = E\frac{\Delta l}{lo}$

$$\Rightarrow \quad \Delta l = \frac{N.lo}{E.So}$$

1.4.1- Résistance Pratique élastique (à l'extension) :

- La Résistance élastique est : $\sigma_e = \mathrm{Re} = \frac{N_A}{So}$

- La Résistance Pratique élastique est donc : $Rpe = \frac{\mathrm{Re}}{s} = \frac{\mathrm{Re}}{n}$

s = n = coefficient de sécurité.

1.4.2- Résistance à la rupture :

Par convention, la résistance à la rupture est Rr telle que :

$$Rr = \frac{N\max}{So}$$

2- Condition de résistance:

Pour des raisons de sécurité, la contrainte normale ($\sigma = \frac{N}{So}$) doit rester inférieure ou égale à la contrainte limite admissible appelée Résistance Pratique à l'Extension ($Rpe = \frac{Re}{s} = \frac{Re}{n}$)

$$\frac{N}{S} \leq Rpe \Rightarrow S \leq \frac{N}{Rpe} \Rightarrow \qquad \boxed{S\min = \frac{N}{Rpe}}$$

Avec $Rpe = \frac{Re}{s} = \frac{Re}{n}$ et s = n = coefficient de sécurité.

Remarque :

La condition de résistance d'une poutre soumise à la traction est la même pour une poutre soumise à la compression.

Applications

Application N°1 :

Soit une poutre de la charpente métallique du hangar de la maison du parti de Douala. La poutre est en acier E24, la limite à la rupture est Rr= 38 daN/mm². La limite élastique est de 24 daN /mm². La poutre est soumise à l'effort de traction de 120000daN. Le module d'élasticité longitudinal est 2.10^5N/mm² et le coefficient de sécurité est n = 6.

a) La section est tubulaire de diamètre extérieur 400mm et d'épaisseur e. déterminer l'épaisseur « e » admissible pour la construction.

b) La longueur de la poutre est 3,5m pour la partie tubulaire. Déterminer son allongement et son allongement pour cent.

c) Dans le cas où la section de la poutre serait cylindrique et pleine, déterminer son diamètre.

d) Déterminer l'effort au delà duquel la poutre peut rompre.

Solution :

a) Condition de résistance :

$$\frac{N}{S} \leq Rpe \Rightarrow S \geq \frac{N}{Rpe} \text{ et } S\min = \frac{N}{Rpe} \text{ ; or } Rpe = \frac{Re}{s} = \frac{Re}{n}$$

et Re = 24 daN/mm² ; n = 6

$\Rightarrow$Rpe = 4daN /mm².

D'où $S = \frac{\pi D^2}{4} - \frac{\pi d^2}{4} \geq \frac{120000}{4} \Rightarrow \pi\left(D^2 - d^2\right) \geq 120000$

$$\Rightarrow D^2 - d^2 \geq \frac{12000}{\pi} \Rightarrow -d^2 \geq \frac{120000}{\pi} - D^2 \text{ et } d \leq \sqrt{D^2 - \frac{120000}{\pi}}$$

$\Rightarrow d \leq 349mm$ d'où $d\min = 349mm$

Or : $e = \frac{D-d}{2}$ $\Rightarrow e = \frac{400-349}{2}$

Donc : $e = 26mm$

b) Allongement de la poutre : $\Delta l = \frac{N.lo}{E.So}$

Avec : $So = \pi\frac{D^2}{4} - \pi\frac{d^2}{4} = 30001{,}42$ mm²

$$\Delta l = \frac{120.3{,}5}{2.10^5.30001{,}42}$$

Donc : $\Delta l = 7.10^2 mm$

c) Si la poutre est cylindrique, pleine et de diamètre d, on a :

$$\frac{N}{S} \leq Rpe \Rightarrow S \geq \frac{N}{Rpe} \Rightarrow \frac{\pi d^2}{4} \geq \frac{N}{Rpe} \qquad \Rightarrow d \geq \sqrt{\frac{4N}{\pi.Rpe}}$$

$$\Rightarrow d = \sqrt{\frac{4.120}{3{,}14.4.10^{-3}}}$$

Donc : d = 195,5mm

d)

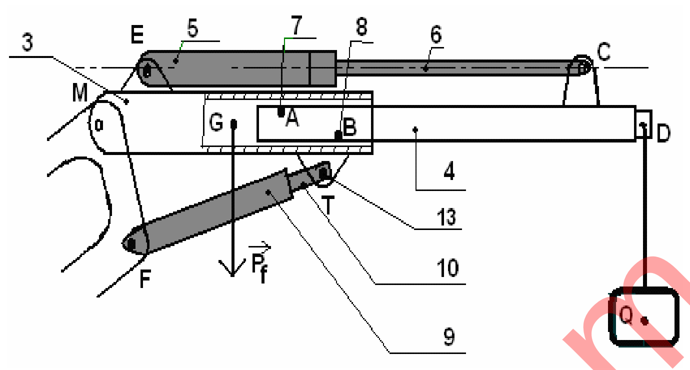
On a : $Rr = \frac{N\max}{So}$ $\Rightarrow$ $N\max = Rr.So$

$\Rightarrow$ $N\max = 38{,}30001 \times 42$

Donc ; Nmax = 1140053,96 daN

Application N° 2 :

Soit le dispositif ci-dessous :



On veut déterminer la déformation subie par la tige 10.

Hypothèse et données :

- La tige **10** est en acier de module de Young $E = 2{,}4.10^{4}$ daN /mm^2
- Poussée de l'huile de la tige **10** $\|\vec{T}\| = 13500$daN
- Diamètre de la tige **10** $d_{10} = 75$ mm
- Longueur de la tige **10** : L =650 mm
- L'étude est faite à la phase de levage comme sur la figure ci-dessus.

1- Donner la nature de la sollicitation dans la tige **10**.

2- Déterminer la déformation subie par la tige pendant cette phase .

Solution :

1- Nature de la sollicitation dans la tige **10** :

Compression

2- Déformation subie par la tige pendant cette phase :

On a : $\Delta l = \dfrac{N.lo}{E.So}$; Or $S_0 = \pi.\dfrac{d_{10}^2}{4} \Rightarrow \Delta l = \dfrac{N.lo}{E.\pi.\dfrac{d_{10}^2}{4}} \Rightarrow \Delta l = \dfrac{4.N.lo}{E.\pi.d_{10}^2}$

$\Rightarrow \Delta l = \dfrac{4.13500.650}{2{,}4.10^4.3{,}14.75^2}$; Donc : $\Delta l = 8{,}28.10^{-2}\,mm$

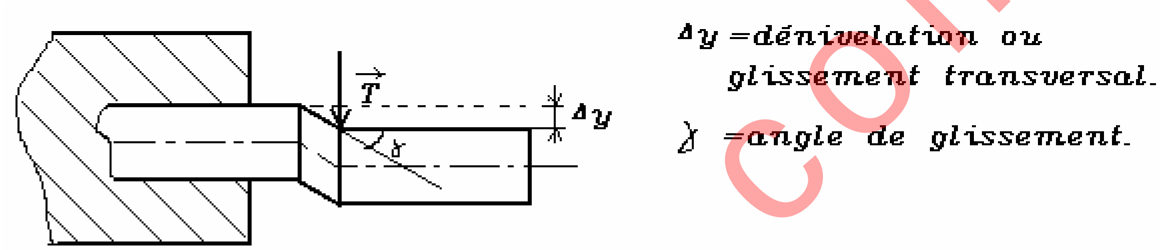
Chapitre11 — Le cisaillement simple

Objectif:
Dimensionner les poutres soumises au cisaillement simple.

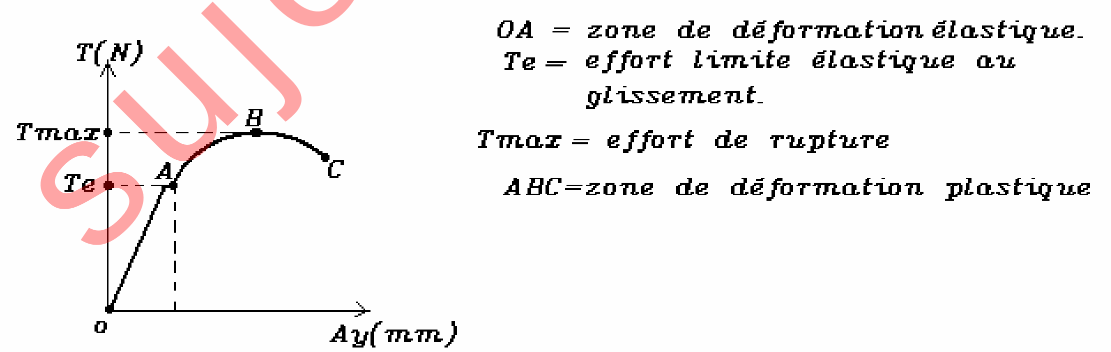
1- Définition:

Une poutre est sollicitée au cisaillement simple lorsqu'elle est soumise à deux forces directement opposées qui tendent à la cisailler.

2- Essai de cisaillement:



- L'éprouvette est une poutre avec une section bien connue.
- La machine d'essai est semblable à une cisaille.
- L'éprouvette est encastrée à une de ses extrémités.
- On applique le plus près possible de la section encastrée un effort tranchant $\vec{T}$ perpendiculaire à l'axe de la poutre.
- On fait croître progressivement cet effort et on mesure chaque fois le glissement Δy produit et on trace la courbe.



3- Contraintes de cisaillement :

- On admet que les contraintes de cisaillement à l'intérieur de la poutre sont uniformes sur toute la section cisaillée :

$$\tau = \frac{T}{S}$$

$$\begin{cases} T = \text{effort tranchant} \\ S = \text{Aire de la section droite} \\ \tau = \text{contrainte de cisaillement, en Pa, MPa ou en } N/mm^2 \end{cases}$$

- La contrainte à la rupture est : $\tau.\max = \dfrac{T\max}{S}$

4- Condition de résistance :

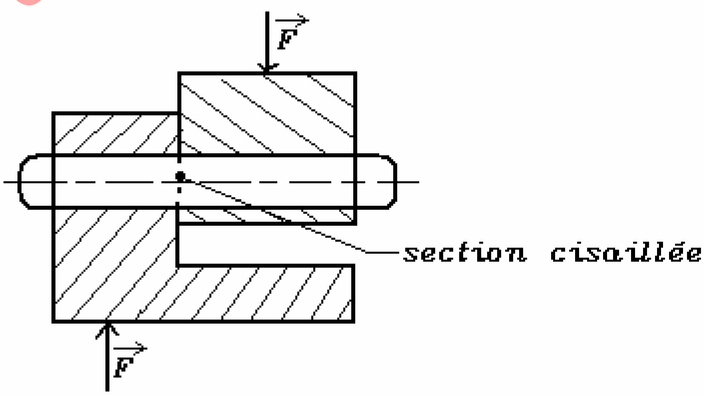
Rpg = résistance pratique de cisaillement (glissement).
Reg= résistance de cisaillement.
s = n = coefficient de sécurité.
S = section admissible.

$$\tau \le Rpg \Rightarrow \frac{T}{S} \le \frac{\operatorname{Re}g}{s} = \frac{\operatorname{Re}g}{n}$$

Applications

Application N° 1 :

Soit le dispositif ci-contre :
On donne : F = 10000daN et Rpg = 50 N /mm².
Déterminer le diamètre admissible pour que cet axe cylindrique supporte les charges.



Solution:

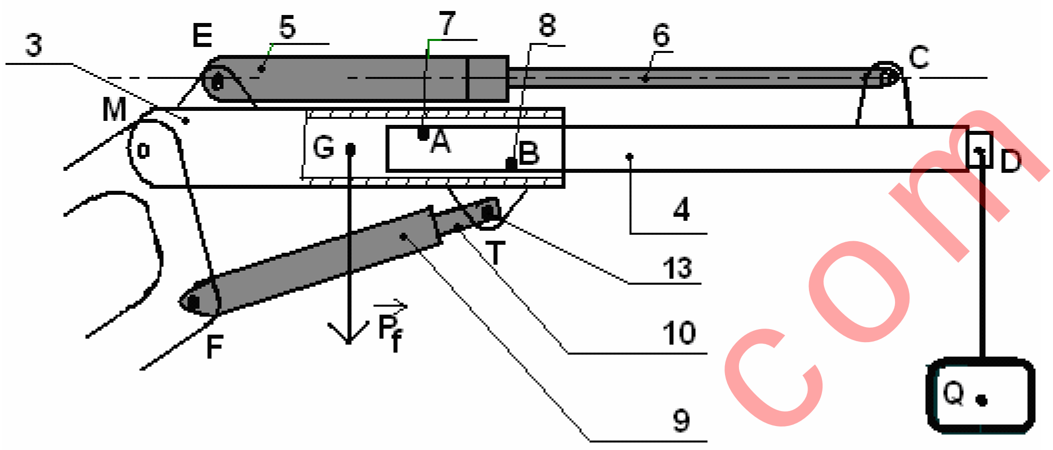
$\tau = \dfrac{F}{S}$ et $S = \dfrac{\pi d^2}{4}$

Condition de résistance : $\tau \le Rpg \Rightarrow \dfrac{4F}{\pi d^2} \le Rpg$

$\Rightarrow$ $d \ge \sqrt{\dfrac{4F}{\pi .Rpg}}$ Donc : $d = 5{,}047mm$

Application N° 2 :

Soit le dispositif ci-dessous :



On veut déterminer l'épaisseur admissible e de l'axe 13.

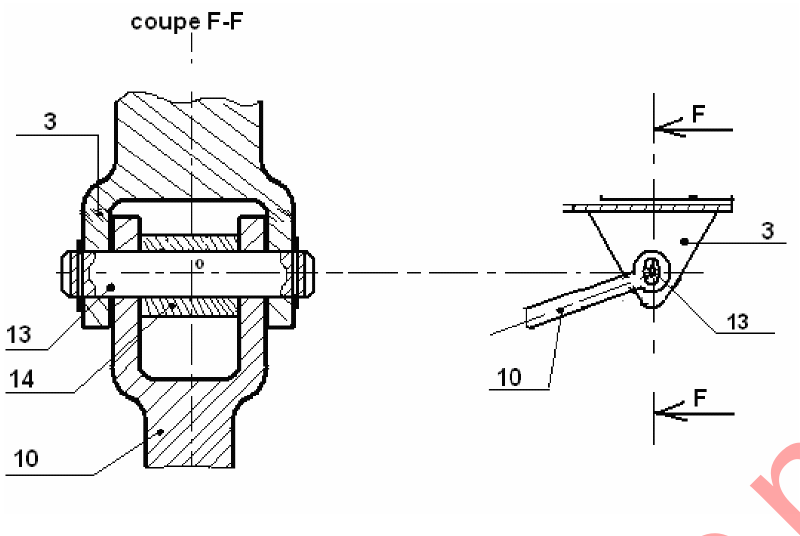
Hypothèse et données :

- L'axe **13** est en acier de résistance limite élastique σ_e = 240 N/mm². Pour cette nuance d'acier, on a $\sigma_{eg} = 0{,}7\sigma_e$
- Poussée de l'huile de la tige **10** $\|\vec{T}\|$ = 13500daN
- coefficient de sécurité adopté s = 6
- L'étude est faite à la phase de levage comme sur la figure ci-dessus.

1- Quelle est la nature de la sollicitation de l'axe **13** ?

2- Déterminer la section admissible sollicitée et en déduire l'épaisseur admissible e de cet axe.

Solution :



1- Nature de la sollicitation de l'axe **13** :

Cisaillement simple.

2-

- Section admissible sollicitée :

Condition de résistance :

$$\tau \leq \sigma_{pg} \text{ or } \sigma_{pg} = \frac{\sigma_{eg}}{s} \Rightarrow \tau \leq \frac{0,7\sigma_e}{s} \text{ ; Or } \tau = \frac{T}{S}$$

$$\Rightarrow \frac{T}{S} \leq \frac{0,7\sigma_e}{s}$$

Pour la section admissible, $\frac{T}{S} = \frac{0,7\sigma_e}{s} \Rightarrow S = \frac{T.s}{0,7\sigma_e}$

$$\Rightarrow S = \frac{1350.6}{0,7.240}$$

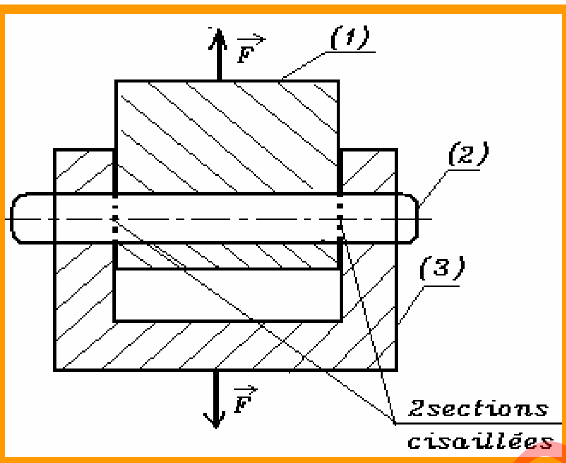
Donc : $S = 48,21mm^2$

- Epaisseur admissible e de cet axe.

$$S = \frac{\pi.d^2}{4} \Rightarrow d = \sqrt{\frac{4.S}{\pi}} \Rightarrow d = \sqrt{\frac{4.48,21}{3,14}}$$

Donc : $d = 7,836mm$

CONSOLIDATION



Soit l'articulation en chape ci-dessus, L'axe (2) subit deux efforts identiques appliqués symétriquement sur le solide (1) et sur le solide (3).

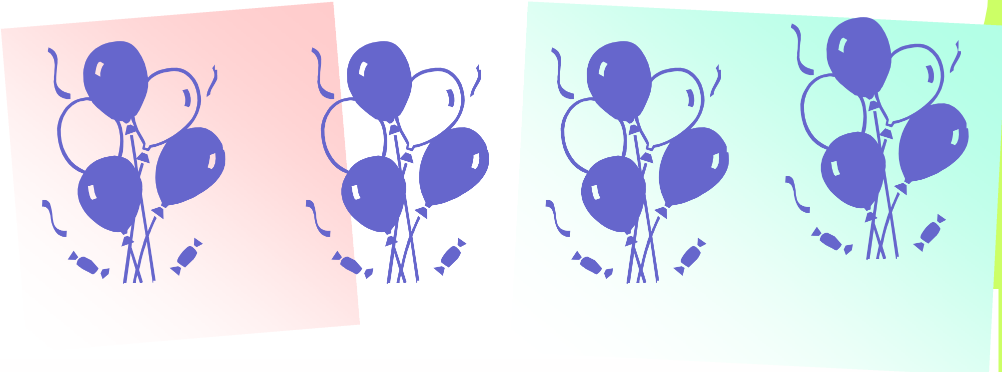
On donne : F = 15000daN ; Reg = 120N/mm²

s = 4 : Coefficient de sécurité.

1- Quelle est la nature de la sollicitation dans l'axe (2) ?

2- Déterminer le diamètre admissible pour cet axe.

L'ESSENTIEL



Par le même auteur :

- L'ABAQUE - Dessin et Technologie de Construction Mécanique 2nd
- L'ABAQUE - Mécanique Appliquée Première Tome1
- L'ABAQUE - Mécanique Appliquée Première Tome2
- L'ABAQUE - Construction Mécanique Premières

Riches en éléments de cours complets, en exercices d'applications souples et en exercices de consolidations bien sélectionnés, ces supports didactiques sont adaptés pour faciliter l'apprentissage, la recherche et surtout la préparation du probatoire de BT et du BT.

L'élève et même le pédagogue y trouveront en outre quelques sujets d'examen inédits et corrigés pour une bonne imprégnation.