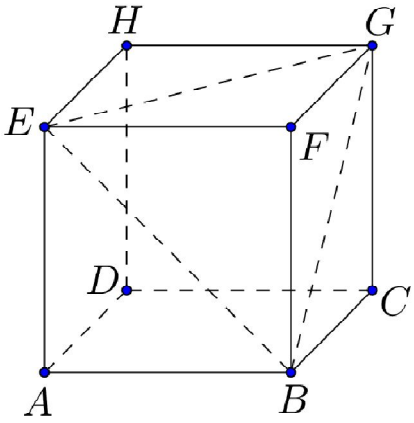
ORTHOGONALITE DANS ESPACE

Exercice n°1

1°) Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{FGB}$

2°) a)Donner la nature du triangle BEG. Justifier votre réponse

b)Donner la mesure de l'angle $\widehat{EBG}$

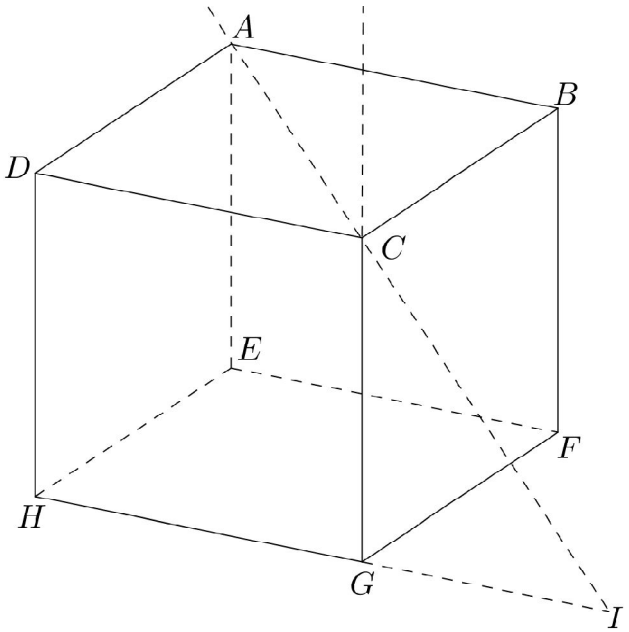


Exercice n°2

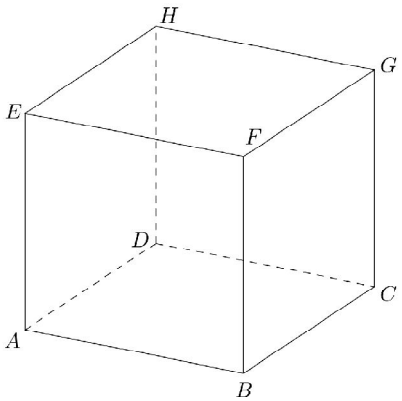
Dans l'espace, on considère le cube ABCDEF GH dont la représentation est donnée ci-dessous :

Dans la représentation suivante, I est un point appartenant
à la droite (GH) et J appartient à la droite (AB).
Quatre affirmations sont proposées ci-dessous. Dire si chacune de ces propositions est vrai ou fausse en justifiant votre réponse.

Le triangle EHD rectangle en H.
2. Les droites (AC) et (GH) sont sécantes en I
3. Le quadrilatère BCHE est un rectangle.
4. J est le point d'intersection de (CG) et (AB)



Dans les exercices 3 à 9 , on considère un cube ABCDEFGH (figures à f aire à la règle)



Exercice n°3
Les droites (AB) et (FG) sont-elles sécantes ?
Quelles sont leurs parallèles passant par E ?
Dans quel plan ces parallèles sont-elles contenues ?
Dans ce plan, que peut-on en dire ?
2°) Reprendre le 1°) avec les mêmes droites en remplaçant E par C.
3°) Reprendre le 1°) en remplaçant E par A

Exercice n°4
1°) Que peut-on dire des droites (AE) et (BC) ? de (AE) et (GH) ?
2°) La propriété : « Si deux droites sont orthogonales à une même droite, alors elles sont parallèles » est vraie dans le plan mais reste-t-elle vraie dans l'espace ?

Exercice n°5
Soit P le plan contenant les points B, C, E, H.
Citer deux droites contenues dans le plan P qui sont orthogonales à (BF).
La droite (BF) est-elle orthogonales à P ?

Exercice n°6
Démontrer que (BF) $\perp$ (AC).
Méthode : chercher un plan contenant (AC) orthogonal à (BF)

Exercice n°7
1°) Que peut-on dire des droites (EB) et (EH) ? Justifier.
2°) Quelle est la nature du quadrilatère EBCH ? Justifier.
3°) Que peut-on dire de (EB) et (CH) ? Pourquoi ?
4°) Que peut-on dire de (EB) et (AF) ? (AF) et (CH) ?
Exercice n°

Exercice n°8
Dans chaque cas, indiquer si les droites sont orthogonales non coplanaires ou perpendiculaires (justifier) : (AB) et (CG) ; (EB) et (AF) ; (AE) et (BD) ; (AC) et (CG)

Exercice n°9
1°) Démontrer que (BD) $\perp$ (AE).
2°) Que peut-on dire des droites (AC) et (BD) ? Justifier.
3°) À l'aide des questions précédentes, que peut-on dire de la droite (BD) et du plan (AEC) ?

Exercice n°10
Dans chaque cas, trouver une droite perpendiculaire à chacune des deux droites (faire une figure dans chaque cas sur laquelle on tracera les deux droites en rouge et la perpendiculaire commune en vert) : (AE) et (BC) ; (AB) et (FH) ; (EF) et (BG).

Exercice n°11
Soit O le centre de la face EFGH et P le plan contenant les points D, B, F, O, H.
1°) Démontrer que (HF) $\perp$ (EG).
2°) Démontrer que (BF) $\perp$ (EG).
3°) Que représente le plan P pour le segment [EG] ?
4°) Démontrer que (DF) $\perp$ (EG) et que (BH) $\perp$ (EG).

Exercice n°12

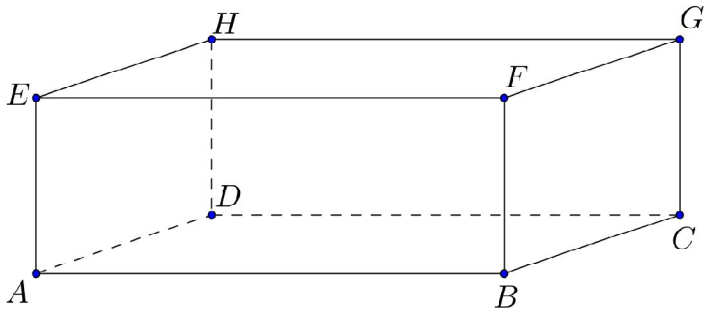
Soit ABCD un tétraèdre régulier.
On note I le milieu de [AB].
Faire une figure en perspective cavalière.
1°) Démontrer que le plan médiateur du segment [AB] est le plan (ICD).
2°) En déduire que (AB) $\perp$ (CD).

Exercice n°13

Soit ABCDEFGH un cube.
Faire une figure en perspective cavalière.
1°) Démontrer que (DF) $\perp$ (AH).
2°) Démontrer que (DF) $\perp$ (CH).
3°) En déduire que (DF) $\perp$ (ACH).

Exercice n°14

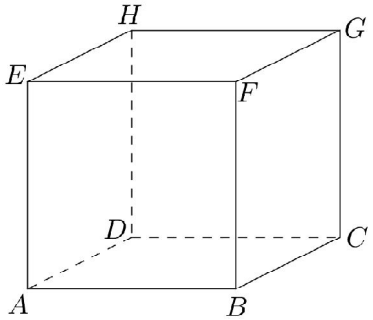
ABCDEFGH est un pavé droit.



1) Démontrez que la droite (AE)est parallèle au plan (BFHD).
2) Démontrez que la droite (EH)est parallèle au plan (BFGC).
3) a) Démontrez que la droite (EB) est parallèle au plan (DCGH).
b) Démontrez que la droite (AF)est parallèle au plan (DCGH).
c) La propriété « si deux droites sont parallèles au même plan alors ces deux droites sont parallèles» est-elle vraie ?
4) Soit O le centre de la face ABCD et O' le centre de la face EFGH.
a) Démontrez que la droite (BF) est parallèle au plan (BFHD).
b) Démontrez que la droite (BF) est parallèle au plan (AEGC).
c) Démontrez que la droite (BF) est parallèle à la droite (OO').

Exercice n°15(De l'exercice 15 à 18, on considère ce cube)

Déterminer la droite intersection des plans :
1) (ABF) et (BCH) :
2) (EFG) et (ABC) :
3) (ACE) et (BFH) :
4) (ADE) et (BCH) :
5) Montrer que les droites (EB) et (DG) sont orthogonales
6) Montrer que les droites (HF) et (AC) sont orthogonales
7) Montrer que les droites (AE) et (FH) sont orthogonales
Calcul de volumes : On suppose que ABCDEFGH est un cube d'arête mesurant 5 cm.
8) Calculer le volume V de la pyramide de sommets A, B, D, E :
9) Calculer le volume V' du prisme de sommets A, B, F, H, D, E :



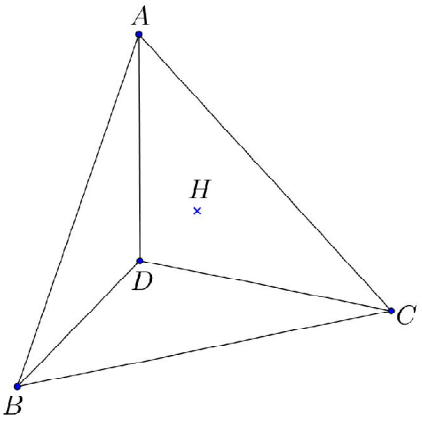
Exercice n°16
Montrer que les droites (AC) et (BF) sont orthogonales.

Exercice n°17
1) Montrer que la droite (HF) est orthogonale au plan (ACGE).
2) Conclure.

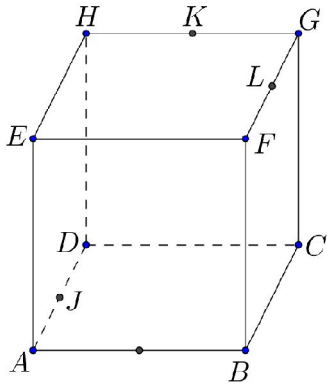
Exercice n°18
Montrer que les droites (CH) et (AG) sont orthogonales.

Exercice n°19
ABCD est un tétraèdre, ABD est isocèle en A et BCD est isocèle en C. I est le milieu de [BD].
1) Faire une figure
2) Montrer que les droites (BD) et (AC) sont orthogonales.

Exercice n°20
Soit ABCD un tétraèdre tel que la droite(AD) est orthogonale au plan BCD.
On désigne par H l'orthocentre du triangle ABC.
Démontrer que les droites (DH) et (BC) sont orthogonales.

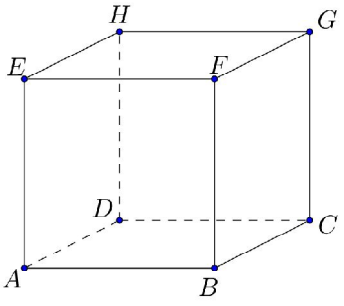


Exercice n°21
On considère le cube ci-dessous où les points I , J , K et L sont les milieux respectifs des segments [AB], [AD], [HG] et [GF].



1.Justifier que les droites (IJ) et (BD) sont parallèles.
2. a. Justifier que les points H, D, B et F sont coplanaires.
b. Justifier que les droites (HF) et (DB) sont parallèles.
c. Démontrer que les points I , J , K, L sont coplanaires.
3. Quel est la nature du quadrilatère IJKL ?

Exercice n°22
On considère le cube ABCDEFGH de côté 5 cm représenté ci-dessous :
1. Montrez que le plan (ABC) est orthogonal à la droite (AE)
2. Calculez la longueur de la diagonale [EC].



Exercice n°23
ABCDEF GH est un cube. La droite (d) fait partie du plan (ADE). M est un point de la droite (DC).
Dessiner la section du cube par le plan passant par la droite (d) et le point M .

Exercice n°24
ABCDEF GH est un cube. M est un point du segment [CF]. N est un point du segment [EF]. P est un point du segment [AH].
Dessiner la section du cube par le plan (MNP).

Exercice n°25
On considère un tétraèdre ABCD.
K est un point du plan (ABD).
L est un point du plan (DBC).
On suppose (IJ) et (KL) non parallèles.
Quel est le point d'intersection du plan (ABC) avec la droite (KL) ?

Exercice n°26
ABCDEF GH est un cube.
1) Les droites (EC) et (BD) sont-elles orthogonales ?
2) Les droites (EC) et (BG) sont-elles orthogonales ?

Exercice n°27
La pyramide SABCD est à base rectangulaire.
On appelle I le milieu de [SA] et J le milieu de [SB].
Déterminer l'intersection des plans (DIJ) et (SAC).

Exercice n°28
Soit un pavé ABCDEF GH .
On prend un point I distinct de H sur la droite (HD) et un point J sur la face EF GH n'appartenant pas à [GH].
Déterminer la section du pavé par le plan (IHJ).

Exercice n°29
Déterminer la section du tétraèdre ABCD par le plan (MNP), sachant que :
– M est un point du plan (ABC),
– N est un point du plan (ACD),
– P est un point du plan (ABD).

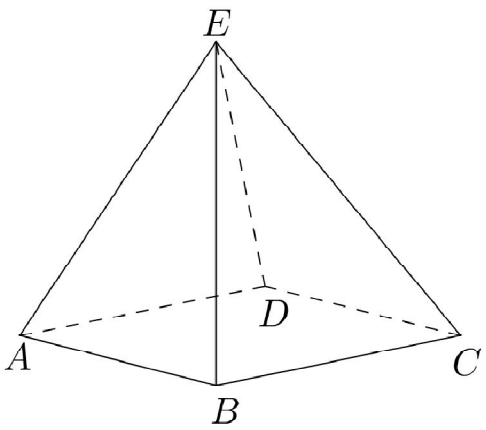
Exercice n°30
Déterminer la section du tétraèdre ABCD par le plan (MNP), sachant que :
– M est un point du segment [AB],
– P est un point du segment [AC],
– N est un point du plan (ACD)

Exercice n°31
ABCDEF GH est un cube. M est un point du segment [CD]. N est un point du segment [EF]. P est un point du segment [AH].
Dessiner la section du cube par le plan (MNP).

Exercice n°32
ABCDEF GH est un cube. M est un point du segment [HE]. N est un point du segment [GF]. P est un point du segment [CD].
Dessiner la section du cube par le plan (MNP).

Exercice n°33
ABCDEF GH est un cube. M est un point du segment [AB]. N est un point du segment [CD]. P est un point du segment [EF].
Dessiner la section du cube par le plan (MNP).

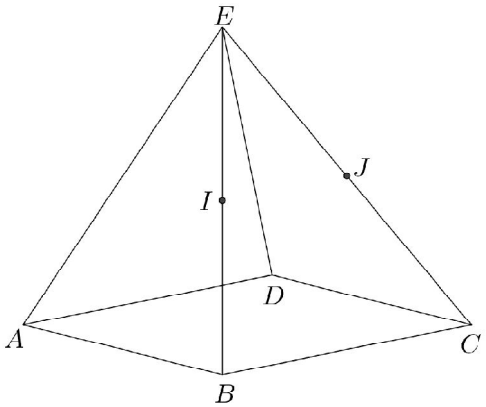
Exercice n°34
On considère la pyramide ABCDE, représentée ci-dessous, à base carrée :



1. Déterminer la position de la droite (d) intersection des plans (ABE) et (CDE).

2. Représenter la droite (d).

Exercice n°35
La figure ci-dessous représente la pyramide ABCDE à base carrée ; les points I et J représentent les milieux respectifs des arêtes [BE] et [CE].



1. Justifier que les points A, D, I , J sont coplanaires.

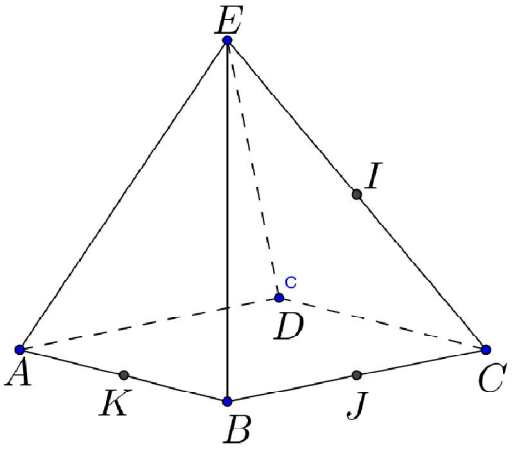
2. a. Justifier que les droites (AI) et (DJ) sont sécantes.

b. On note M leur point d'intersection. Placer le point M dans la figure ci-dessus.

3. En déduire la droite d'intersection des plans (ABE) et (CDE).

Exercice n°36

On considère la pyramide ABCDE à base carrée représentée ci-dessous. Les points I , J , K sont les milieux respectifs des arêtes [CE], [BC], [AB] :



1. a. Justifier que les droites (BE) et (IJ) sont parallèles.

b. Préciser la position de la droite (d) d'intersection des plans des plans (ABE) et (IJK). Puis, effectuer le tracé de la droite (d).

On note L le point d'intersection des droites (d) et (AE).

On remarquera que le point L appartient au plan (IJK).

2. Dans cette question, nous allons étudier l'intersection du plan (IJK) avec l'arête [ED] :

a. Déterminer l'emplacement du point T intersection du plan (IJK) avec la droite (AD).

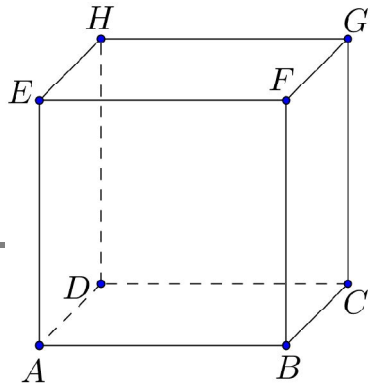
b. Justifier que la droite (LT) appartient au plan (ADE).

c. En déduire la position du point M intersection du plan (IJK) avec l'arête [ED].

3. Représenter la section de la pyramide ABCDE avec le plan (IJK).

Exercice n°37

Dans l'espace, on considère le cube ABCDEF GH représenté ci-dessous :



1. Justifier que les droites (EF) et (GC) sont orthogonales.
2. Justifier que les droites (AD) et (HF) ne sont pas orthogonales.
3. 3. Les droites (AG) et (BG) sont-elles orthogonales ?

Exercice n°38

ABCDEFGH est un cube de l'espace, I et J sont les milieux respectifs de [EG] et[BG].

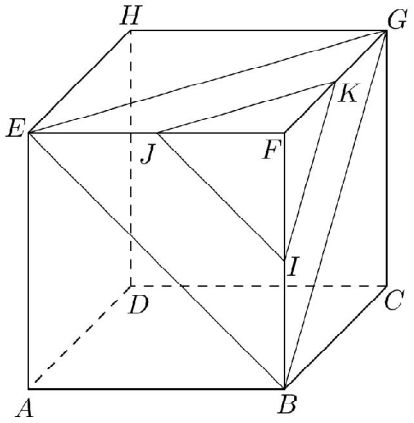
1. (a) Montrer que les droites (IJ) et (EB) sont parallèles.

(b) En déduire que $(\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{AF}, \overrightarrow{EH})$ est une base orthogonale .

2. (a) Montrer que la droite (FC) est orthogonale au plan (ABG).

(b) En déduire que (BH) et (FC) sont orthogonales .

3. O est le centre de gravité du triangle BEG. Déterminer les coordonnées des points A, B, C, D, E, F, G, H et O dans le repère orthonormal (A, $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}$) et démontrer que les points. F, D et O sont alignés.



Exercice n°39

Soit ABCDEFG un cube et I, J, K les milieux des arêtes [FB], [FE] et [FG].

Démontrer que les plans (IJK) et (BEG) sont parallèles.

Exercice n°40

Soit ABCDS une pyramide régulière à base carrée ABCD.

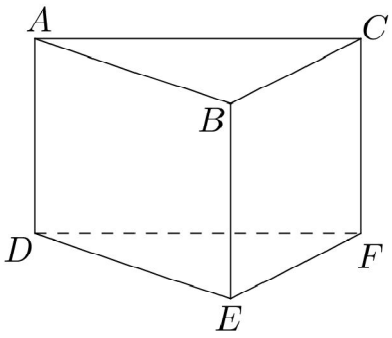
Démontrer que l'intersection des plans (SAB) et (SCD) est une droite parallèle au plan (ABC)

Exercice n°41

ABCDEF est un prisme droit tel que ABC est un triangle rectangle en B.

Démontrer que la droite (AB) est orthogonale au plan (CEF).

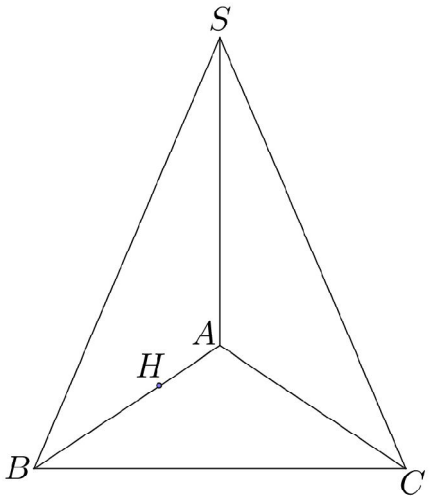
Démontrer que la droite (AD) est orthogonale au plan (DEF).



Exercice n°42

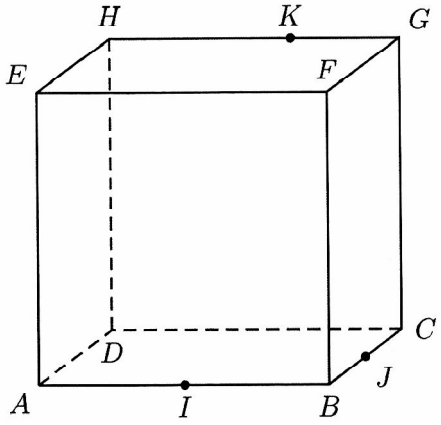
SABC est un tétraèdre, la droite (SA) est orthogonale au plan (ABC), le triangle ABC est
rectangle en B (voir figure ci-dessous).

1. Démontrer que les droites (BC) et (SA) sont orthogonales.
2. Démontrer que le triangle SBC est rectangle en B.
3. H est un point de l'arête [AB]. On trace par H le plan P orthogonal à (AB). Ce plan coupe
(AC) en I, (SC) en J et (SB) en K. Le but de la question est de tracer I, J et K.
(a) Démontrer que (HI) et (BC) sont parallèles.
(b) En utilisant le théorème du toit, en déduire que (HI) et (KJ) sont parallèles.
(c) On admet que, par un raisonnement analogue, (HK) et (IJ) sont parallèles. En déduire
que HIJK est un rectangle.
(d) Compléter la figure.



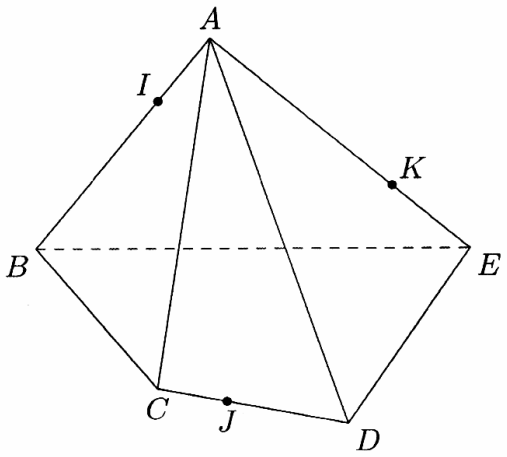
Exercice n°43

Tracer la section par le plan (IJK).



Exercice n°44

Tracer la section par le plan (IJK).

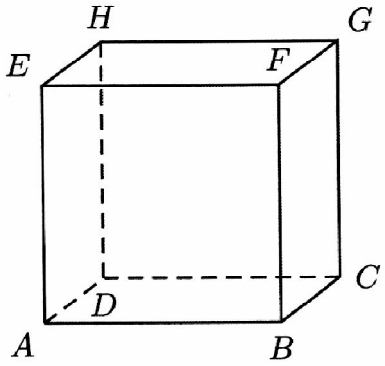


Exercice n°44

Soit ABCDEFGH un cube.

1. Montrer que $(EF) \perp (BG)$
2. En déduire que $(EC) \perp (BG)$
3. Prouver que la droite (EC) est perpendiculaire au plan (BDG).

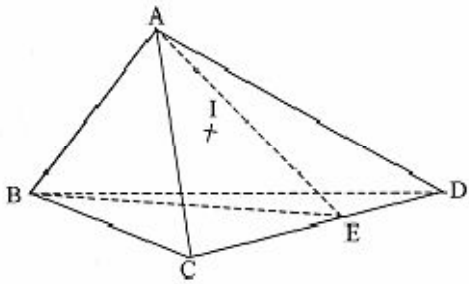
Indication : on pourra étudier la position de (BD) par rapport au plan (EAC).



Exercice n°45

On considère le tétraèdre ABCD, E un point de [CD] et le point I du plan (ABE) comme le montre la figure ci-dessous.

1. Déterminer l'intersection de la droite (AI) avec le plan (BCD).
2. Déterminer l'intersection des plans (ADI) et (BCD), puis des plans (ADI) et (ABC).
3. En déduire l'intersection de la droite (DI) avec le plan (ABC).



Exercice n°46

SABCD est une pyramide de sommet S, de base un parallélogramme ABCD. Les points M et N sont les milieux respectifs des arêtes [SC] et [SB].

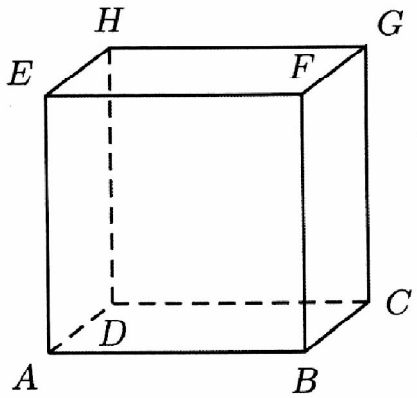
1. Faire une figure en perspective.
2. Que peut-on dire des droites (MN) et (AD) ?
3. Montrer que les droites (AN) et (DM) sont coplanaires. Soit P leur point d'intersection.
4. Quelle est l'intersection des plans (SAB) et (SDC) ?
5. Montrer que les droites (SP) et (AB) sont parallèles.

Exercice n°47

Cet exercice est un QCM. Une seule des réponses proposées est exacte.

ABCDEFGH est un cube d'arête 1. I est le centre de la face BCGF, K et J sont les milieux respectifs de [DC] et [BC].

(a) Le plan (EGJ) coupe le segment (AB] en son milieu.
(b) La droite (KH) coupe le plan (EGJ) en un point.
(c) Le triangle DIB est rectangle en B.
(d) Les droites (EF) et (DI) ne sont pas coplanaires.



Exercice n°48

Soit $ABCD$ un tétraèdre régulier, c'est – à – dire tel que ses six arêtes ont la même longueur a. On note I, J, K et L les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[CD]$, $[BC]$ et $[BD]$. Le point A' est le centre de gravité du triangle BCD.

1) Montrer que les arêtes opposées de ce tétraèdre sont orthogonales.

2) a) Montrer que la droite (IJ) est orthogonale aux droites (AB) et (CD). b) En utilisant le triangle ABJ, calculer la distance IJ.

3) a) Montrer que la droite (AA') est la hauteur issue de A dans le tétraèdre $ABCD$

b) Calculer la distance AA', puis le volume du tétraèdre $ABCD$.

4) a) Montrer que les plans (ICD) et (JAB) sont perpendiculaires.

b) Le plan (ICD) est – il perpendiculaire au plan (ABC) ?

Exercice n°49

1. Voici un cube et un octaèdre régulier. Dans chacun des cas suivants, déterminez la position relative des deux droites (précisez s'il y a orthogonalité ou non et justifiez).

a) MK et HF

b) DF et EG

c) KL et ME

d) MG et KE

e) BH et CE

f) KJ et EF

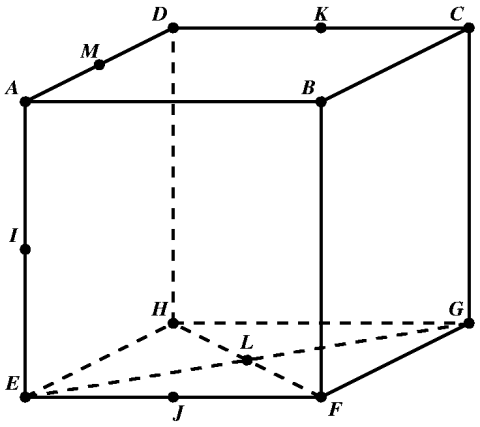
g) KJ et HG

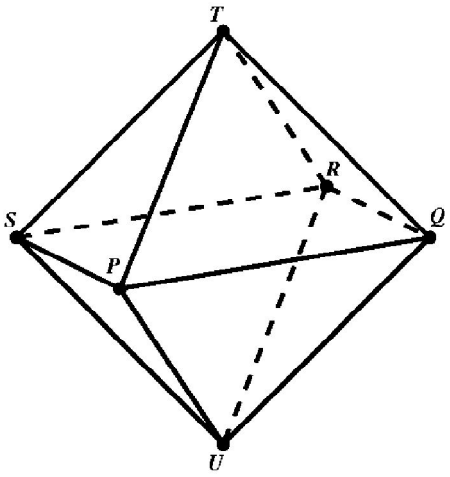
h) MI et AB

i) ST et RU

j) SQ et TU

k) TP et RU





Exercice n°50

Dans le cube, démontrez que la droite DF est perpendiculaire au plan BEG .
Justifiez ensuite que les plans DBF et BEG sont perpendiculaires.

Exercice n°51

Dans l'octaèdre régulier, démontrez que la droite SQ est perpendiculaire au plan PTR . Justifiez ensuite que les plans SQR et PTR sont perpendiculaires.

Exercice n°52

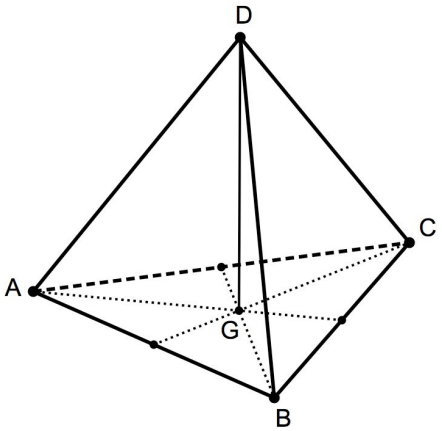
Dans l'octaèdre régulier, démontrez que les plans STQ et PTR sont perpendiculaires. Quelle est leur droite d'intersection ?

Exercice n°53

Dans l'octaèdre régulier, démontrez que les plans SRU et PQT sont parallèles. (revoyez votre cours de quatrième).

Exercice n°54

Voici un tétraèdre régulier ABCD . Ses quatre faces sont des triangles équilatéraux.
Soit G le centre de gravité de la face ABC .
Démontrez que la droite DG est perpendiculaire au plan ABC .



Exercice n°55

Dans un cube, construisez la perpendiculaire commune aux droites DB et AE (justifiez). Même question pour les droites DI et BG .

Exercice n°56

Soit un plan π . Soit une droite d incluse dans π , et un point P appartenant à π mais n'appartenant pas à d . Par le point P , on élève une droite a perpendiculaire à π . Sur cette droite a , on place un point Q n'appartenant pas à π . Enfin, par le point Q , on mème une droite perpendiculaire à d , coupant celle-ci au point R . Réalisez une figure et démontrez que la droite PR est perpendiculaire à d .

Exercice n°57

Dans le tétraèdre régulier de l'exercice 54, soit M le milieu de l'arête $[AB]$.

a) Démontrez que la droite AB est perpendiculaire au plan CMD .

b) Démontrez que les droites AB et CD sont orthogonales.

c) Démontrez que les droites AB et DG sont orthogonales.

d) En suivant une démarche analogue à celle des points (a) et (c) , démontrez que les droites AC et DG sont orthogonales.

e) Déduisez-en que la droite DG est perpendiculaire au plan ABC .

Exercice n°58

Dans le cube de l'exercice 49, soit O le point d'intersection de la droite CE et du plan AFH . Démontrez que les points A , O et L sont alignés.