EPREUVE DE MATHÉMATIQUES

PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES [15.5 pts]

EXERCICE 1 [04.25 pts]

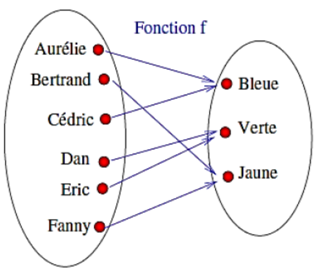
1. Calculer $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$. **[0.25pt]**
2. On considère l'équation $(E) : 4x^2 + 2(\sqrt{3}+\sqrt{2})x + \sqrt{6} = 0$ et l'inéquation $(I) : 4x^2 + 2(\sqrt{3}+\sqrt{2})x + \sqrt{6} > 0$.
   (a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation E. **[0.75pt]**
   (b) En déduire dans $\mathbb{R}$ les solutions de l'inéquation (I). **[0.5pt]**
3. On considère l'équation $(E') : -4\sin^2(x) + 2(\sqrt{3}+\sqrt{2})\cos(x) + \sqrt{6} + 4 = 0$ et l'inéquation $(I') : -4\sin^2(x) + 2(\sqrt{3}+\sqrt{2})\cos(x) + \sqrt{6} + 4 > 0$.
   (a) En déduire dans l'intervalle $[0; 2\pi]$ les solutions de l'équation (E'). **[1.25pt]**
   (b) En déduire dans l'intervalle $[0; 2\pi]$ les solutions de l'inéquation (I'). **[0.75pt]**
4. (a) Placer les images des solutions de (E') sur le cercle trigonométrique. **[0.5pt]**
   (b) Quelle est la nature du polygone obtenu ? **[0.25pt]**

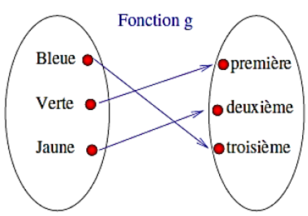
EXERCICE 2 [04.25 pts]

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, I; J)$. Soient f et g deux fonctions définies par :

$$f : \begin{array}{rcl} [-1; +\infty[& \longrightarrow & [-2; +\infty[\\ x & \longmapsto & x^2 + 2x - 1 \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} \setminus \{-2\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{2x+3}{x+2} \end{array}$$

1. (a) Ecrire $f(x)$ sous forme canonique. **[0.25pt]**
   (b) Montrer que f admet un minimum et préciser la valeur en laquelle ce minimum est atteint. **[0.5pt]**
2. (a) Montrer que f est une application bijective et expliciter sa bijection réciproque. **[0.75pt]**
   (b) La fonction g est-elle surjective ? Justifer. Dans le cas où elle ne l'est pas, determiner le plus grand ensemble pour lequel il y a surjection. **[0.75pt]**
   (c) Déterminer les ensembles de définitions des fonctions $f \circ g$ et $g \circ f$. **[1pt]**
   (d) Expliciter $(f \circ g)(x)$ et $(g \circ f)(x)$. **[0.5pt]**
3. Soit l'ensemble des prénoms d'un groupe d'amis qui participent à un tournoi sportif. Soit B la couleur des équipes et C le classement à l'issue des matchs.
   On appelle f la fonction qui à chaque personne fait correspondre la couleur de son équipe. On appelle g la fonction qui à chaque équipe fait correspondre son classement. $g \circ f$ sera donc la fonction qui a chaque personne fait correspondre son classement. A l'aide des diagrammes de f et de g, tracer le diagramme de $g \circ f$. **[0.5pt]**





EXERCICE 3 [04 pts]

L'unité de longueur est le centimètre. ABC est un triangle tel que $AB = AC = 5cm$ et $BC = 6$. I est le milieu de $[BC]$ et G le centre de gravité du triangle.

1. (a) Faire une figure. **[0.5pt]**
   (b) Démontrer que G est le barycentre des points pondérés $(A; 1)$ et $B; 2$. **[0.5pt]**

2. (a) Calculer les longueurs : AI, GA et GI. **[1pt]**

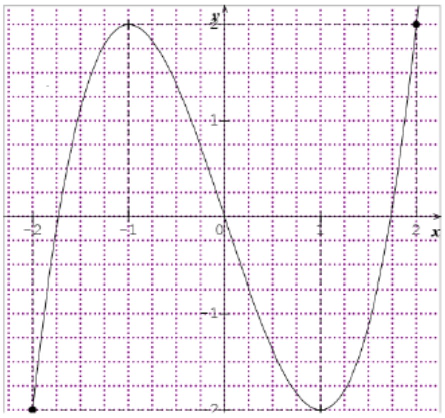
   (b) Démontrer que pour tout point M du plan : $MA^2 + 2MI^2 = 3MG^2 + \frac{32}{3}$. **[0.75pt]**

   (c) Déterminer l'ensemble (E) des points M du plan tels que : $MA^2 + 2MI^2 = 32$. **[0.5pt]**

3. Soit (F) l'ensemble des points M du plan tels que : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MI} - MA^2 = 0$. Déterminer (F). **[0.75pt]**

EXERCICE 4 [03 pts]

La courbe ci-dessous est celle d'une fonction f définie de $[-2;2]$ vers $[-2;2]$.



1. (a) Déterminer l'image directe de 0, de $[-\frac{3}{2};\frac{3}{2}]$. **[0.5pt]**

   (b) Déterminer l'image réciproque de 1, de $[-1;1[$. **[0.5pt]**

2. Préciser le signe de $f(x)$ sur $[-2;2]$. **[0.5pt]**
3. Donner, en justifiant votre réponse, la parité de f. **[0.5pt]**
4. Dire si la fonction f est injective, surjective ou bijective. **[0.25pt]**
5. Construire sur votre feuille la courbe de la fonction g telle que $g(x) = f(x-1) + 1$. **[0.75pt]**

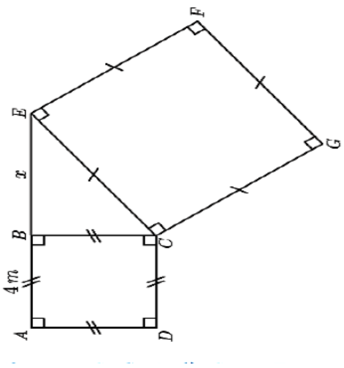
PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES [04.5 pts]

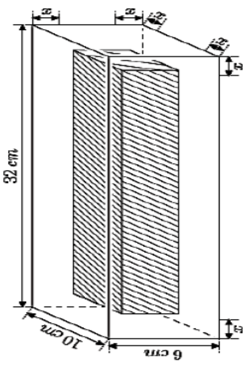
Situation :

M. IKSE possède un champ composé de deux carrés $ABCD$ et $CEFG$ et d'un triangle BCE rectangle en B.

En faisant des marches d'inspections sur son champ, M. IKSE trouve un bloc de marbre de forme parallélépipédique de $32cm$ de long, $10cm$ de profondeur et de $6cm$ de hauteur. Il apporte ce bloc de marbre à un atelier de menuiserie où il souhaite récupérer le « cœur » de ce bloc pour en faire un objet de décoration. Pour se faire, on rabote chaque côté de ce pavé droit d'une épaisseur de xcm.

A côté de l'atelier de cette menuiserie se trouve un carrefour de quatre routes perpendiculaires assimilé à un plan muni du repère orthogonal dont l'origine est le carrefour. Un taximan ramène M. IKSE chez lui où il parcourt l'une de ces routes serpentées assimilée à la courbe de la fonction numerique f de la variable réelle x définie par $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ où a, b et c sont des réels.





Tâches :

Tâche 1 Déterminer la valeur de la longueur x du côté du triangle BCE afin que l'aire totale du champ soit de $200m^2$. **[1.5pt]**

Tâche 2 Pour quelle valeur de x, le volume de la partie rabotée est égale au volume du « cœur » de cette pièce. **[1.5pt]**

Tâche 3 Déterminer l'expression de l'équation de la trajectoire de cette route lorsque ce taximan rencontre trois nids de poules (trous) en des points $A(-2;6)$, $B(-1;4)$ et $C(\frac{1}{2};-\frac{7}{8})$ de cette route. **[1.5pt]**