



CONTRÔLE CONTINU N°4

EXAMINATEUR : NZOUEKEU MBITKEU PATRICE

PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES

[15 POINTS]

Exercice 1. (5 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation

$$(E) : z^2 + (-7 + i)z + 12 - 16i = 0$$

et g l'application du plan dans le plan qui à tout point $M(z)$ associe le point $M(z')$ tel que

$$z' = 2iz + \frac{5}{2} - \frac{15}{2}i$$

1. (a) Calculer $(5 + 5i)^2$ [0,25 point]

(b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) [0,75 point]

2. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de g . [1 point]

3. Soient A et B les points d'affixes respectives $z_A = 1 - 3i$ et $z_B = 6 + 2i$

(a) Calculer

$$\frac{z_O - z_B}{z_O - z_A}$$

et en déduire la nature du triangle OAB [0,75 point]

(b) Calculer l'affixe z_I du point I milieu de $[AB]$ [0,25 point]

4. Soit (Γ) l'ensemble des points M d'affixe z tel que

$$\left| z - \frac{7}{2} + \frac{1}{2}i \right| = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

(a) Dire si chacune des propositions suivantes est vraie ou fausse : [0,5 point]

i) $O \in (\Gamma)$

ii) $A \in (\Gamma)$

iii) $B \in (\Gamma)$

(b) Donner la nature et une équation cartésienne de (Γ) et construire (Γ) . [1 point]

(c) Construire (Γ') image de (Γ) par g . [0,5 point]

Exercice 2. (2,5 points)

On considère la suite numérique (u_n) définie $\forall n \in \mathbb{N}$ par

$$\begin{cases} u_0 = \sqrt{2} \\ u_{n+1} = 2 + \frac{1}{2}u_n \end{cases}$$

1. Déterminer les valeurs exactes de u_1 et u_2 . [0,5 point]
2. (a) Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq 4$. [0,75 point]
 (b) Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est croissante. [0,75 point]
3. Dédire que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite. [0,5 point]

Exercice 3. (7,5 points)

1. Soit g la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par

$$g(x) = 1 - x + x \ln x$$

- (a) Calculer la dérivée de g et étudier le sens de variations de g sur $]0; +\infty[$. [1,25 point]
- (b) Dresser le tableau de variations de g . [0,75 point]
- (c) En déduire le signe de $g(x)$ sur $]0; +\infty[$. [0,5 point]

2. On considère la fonction numérique f définie sur $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = 3 - \frac{1}{x^2} - \frac{2 \ln x}{x}$$

et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 1 cm)

- (a) Calculer les limites de f en 0^+ et en $+\infty$ et donner une interprétation géométrique des résultats. [1 point]
- (b) i. Montrer que $\forall x \in]0; +\infty[$

$$f'(x) = \frac{2g(x)}{x^3}$$

[0,75 point]

- ii. Montrer que f est croissante sur $]0; +\infty[$ et dresser son tableau de variations. [1 point]
- (c) Tracer dans le repère la courbe $(\mathcal{C})$ [1,25 point]
- (d) Déterminer la primitive F de la fonction f qui prend la valeur 0 en 1. [1 point]
 (c'est-à-dire que $F(1) = 0$)

PARTIE B : EVALUATION DES COMPÉTENCES

[5 POINTS]

A l'instant $t = 0$ (t exprimé en heures), un médecin injecte à un patient une dose de 1,4 mg d'une substance médicamenteuse qui n'est pas présente dans le sang. On note $Q(t)$ la quantité de substance (en mg) présente dans le sang à l'instant t ($t \geq 0$). On admet que la fonction Q est définie par

$$Q(t) = 1,4e^{-0,115t}$$

Pour une efficacité optimale de ce médicament sa quantité dans le sang doit être comprise entre 0,7mg et 1,4mg.

1. Démontrer que la substance médicamenteuse injectée par le médecin est progressivement éliminée du sang au fur et à mesure que le temps passe. [1,5 point]
2. Déterminer l'instant t (arrondi à l'unité) où la quantité de substance présente dans le sang est de 0,7 mg. [1,5 point]
3. Expliquer pourquoi le médecin prescrit à ce patient une injection de 0,7 mg chaque 6 heures. [1,5 point]

PRÉSENTATION :

[0,5 point]