# EPREUVE DE MATHÉMATIQUES

*Premier galop d'essai*

## PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES /15 points

**Exercice 1 : 3,5 points**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. La transformation plane f a pour écriture complexe $z' = (1-3i)z + 3 + 6i$. On donne les points A (1-i) et B (7+4i).

1-Déterminer l'affixe du point :

a) C = f(A) **0,5 pt**

b) D antécédent par f de B. **0,5 pt**

2-Démontrer que f admet un seul point invariant Ω dont on précisera l'affixe w. **0,5pt**

3- a) Montrer que pour tout nombre complexe **z** on a : $z' - z = -3i(z-2+i)$. **0,5pt**

b) En déduire $\frac{MM'}{\Omega M}$ et une mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{MM'}})$ . **1pt**

c) En déduire une construction de M' image de M par f. **0,5pt**

**Exercice 2 : 5 points**

Soit **n** un entier naturel non nul. La fonction $g_n$ est définie sur $I = ]0, +\infty[$ par $g_n(x) = x - n + \frac{n}{2}\ln x$. ($C_n$) est sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1- Etudier les variations de $g_n$ et dresser son tableau des variations. **1,5pt**

2- Étudier les branches infinies de ($C_n$). **0,75pt**

3- a) Montrer que $g_n$ est une bijection de I vers un intervalle J à déterminer. **0,75 pt**

b) Justifier que l'équation $g_n(x) = 0$ admet une unique solution $U_n$. **0,25pt**

4- **a)** Montrer que : $1 < U_n < e^2$ et $\ln U_n = 2 - \frac{2}{n}U_n$. **0,5pt**

b) Calculer $g_{n+1}(U_n)$ en fonction de $U_n$. **0,25pt**

5- a) Montrer que ($U_n$) est convergente. **0,5pt**

b) Calculer la limite de la suite ($U_n$). **0,5 pt**

**Exercice 3 : 3,5 points**

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On donne les points A (-1, 2, 1), B (1,-6, -1), C (2,2,2) et K (0,1,-1). Soit I le milieu de [BC].

1- Déterminer l'ensemble (F) des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MA}$. **0,75pt**

2- a) Donner les coordonnées de $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$. **0,5pt**

b) Déterminer alors une équation cartésienne du plan ( P) passant par A, B et C. **0,5pt**

**c)** Quelles sont les coordonnées du point H projeté orthogonal de K sur ( P) ?. **0,5pt**

3- **(S)** est la sphère de centre K et de rayon 3.

a) Déterminer une équation cartésienne de **( S).** **0,5pt**

b) Donner la nature et les éléments caractéristiques de **(S)** $\cap$ (P). **0,75pt**

**Exercice 4 : 3 points**

Soit (E) l'équation $x^3$-15x -4 = 0.

1- Démontrer que si u et v sont deux réels tels que $u^3 + v^3 = 4$ et uv = 5 alors :

a) u + v est solution de (E). **0,5pt**

b) $u^3$ et $v^3$ sont solutions de l'équation(G) : $z^2 - 4z + 125 = 0$. **0,5pt**

2- a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (G). **0,5pt**

b) Calculer $(2+i)^3$ et $(2-i)^3$. **0,5pt**

c) En déduire les solutions de (E). **1 pt**

## PARTIE B : ÉVALUATION DES COMPÉTENCES /5 points

Les communes X et Y ont ensemble 6192 habitants. Elles vont recevoir des ordinateurs qu'elles partageront équitablement à leurs habitants. On doit prévoir au moins 18060 ordinateurs pour ce partage qui aura lieu dans la salle de fêtes d'une société qui fabrique un produit pharmaceutique.

La capacité de production annuelle de cette entreprise ne peut dépasser une tonne. Et le coût de fabrication de x tonne de ce produit est $1 + x - xe^{1-x^2} = c(x)$. Si k est le prix de vente en milliers de francs CFA alors son bénéfice est kx-c(x).

Le portailde la barrière de cette société pharmaceutique a trois phases A, B et C. Ils lancent un signal lumineux respectivement toutes les 25 secondes, les 30 secondes et les 35 secondes. Un signal simultané se produit à 22 heures.

1-A quelle heure se produira le premier signal simultané après minuit ? **1,5 pt**

2-Déterminer la production pour laquelle le profit de cette société pharmaceutique est maximal en supposant k =1. **1,5pt**

3-Déterminer le nombre d'habitants de chacune de ces deux municipalités sachant que X a au moins 3000 habitants et Y a au moins 2500 habitants. **1,5pt**

**Présentation : 0,5 pt**