

EPREUVE DE MATHÉMATIQUES N°2 DU 2^{ème} TRIMESTRE

PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES : (15 points)

EXERCICE 1 : (5 points)

Soit f_n la fonction définie sur \mathbb{R} par $f_n(x) = x^n e^{1-x}$ où $n \in \mathbb{N}$. On note (C_n) la courbe de f_n dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . (unité graphique : 2cm)

1. Etudie les variations de f_n . 1pt
2. Construis les courbes (C_1) de f_1 et (C_2) de f_2 . 1pt
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit l'intégrale I_n par : $I_0 = \int_0^1 e^{1-x} dx$, si $n \geq 1, I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} dx$.
 - (a) Calcule la valeur exacte de I_0 . 0,25pt
 - (b) A l'aide d'une intégration par parties, montre que $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} = -1 + (n+1)I_n$. 1pt
 - (c) Déduis-en la valeur exacte de I_1 , puis celle de I_2 . 0,5pt
4. Calcule l'aire \mathcal{A} exprimée en unité d'aire, de la partie du plan comprise d'une part entre les courbes (C_1) et (C_2) , d'autre part entre les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$. 0,5pt
5. Calcule l'intégrale : $I = \int_0^1 \frac{dx}{1+e^x}$. 0,75pt

EXERCICE 2 : (2,5 points)

E est un espace vectoriel dont une base est $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. f est un endomorphisme de E tel que : $f(\vec{i}) = -\vec{i} + 2\vec{k}$, $f(\vec{j}) = \vec{j} + 2\vec{k}$ et $f(\vec{k}) = 2\vec{i} + 2\vec{j}$.

1. Ecris la matrice de f dans la base \mathcal{B} . 0,25pt
2. Montre que $\ker f$ est une droite vectorielle et en donne une base \vec{e}_1 . 0,75pt
3. Détermine $\text{Im } f$ et en donne une base (\vec{e}_2, \vec{e}_3) . 0,75pt
4. Montre que $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est une base de E . 0,5pt
5. Que peux-tu dire de $\ker f$ et de $\text{Im } f$? 0,25pt

EXERCICE 3 : (2,5 points)

ATANGANA, **ESSOMBA** et **ZE** sont trois chasseurs d'adresses différentes. **ATANGANA**, le meilleur, touche son gibier 8 fois sur 10 ; **ESSOMBA** 6 fois sur 10 et **ZE** le myope ne le touche qu'une fois sur 10. Les trois chasseurs partent ensemble et tirent ensemble sur le même singe.

Calcule la probabilité de chacun des événements suivants :

1. A : « le singe est touché ». 0,75pt
2. B : « le singe est raté ». 0,5pt
3. C : « le singe est touché, mais **ZE** l'a raté ». 0,75pt
4. D : « **ZE** est le seul à avoir touché le singe ». 0,5pt

EXERCICE 4 : (5 points)

A) Pour chacune des 3 propositions suivantes, indique si elle est vraie ou fausse et donne une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

Proposition 1 : « Soit $x \in \mathbb{Z}$. $x^2 + x + 3 \equiv 0[5]$ si et seulement si $x \equiv 1[5]$. » **0,75pt**

Proposition 2 : « Si $N = \overline{aba7}^{10}$ est divisible par 7, alors $a + b$ est divisible par 7. » **0,75pt**

Proposition 3 : « Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $5^{6n+1} + 2^{3n+1}$ est divisible par 5. » **0,75pt**

B) Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{i}, \vec{j}) . Soit les points $A(-1;1)$ et $B(3;2)$.

On considère l'application φ du plan dans lui-même, qui à tout point $M(x, y)$ associe le point $M'(x'; y')$ tel que :
$$\begin{cases} x' = x + y - 1 \\ y' = x - y + 3 \end{cases}$$
. On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$.

1. Donne l'écriture complexe de φ . **0,5pt**

2. Soit M_0 le point d'affixe $z_0 = 2 - 4i$. Vérifie que $\overline{AB} \perp \overline{AM_0}$. **0,5pt**

3. On considère un point M dont les coordonnées x et y sont des entiers.

(a) Démontre que $\overline{AB} \perp \overline{AM}$ $\Leftrightarrow 5x + 3y = -2$. **0,5pt**

(b) Résous dans \mathbb{Z}^2 l'équation (E) : $5x + 3y = -2$. **0,75pt**

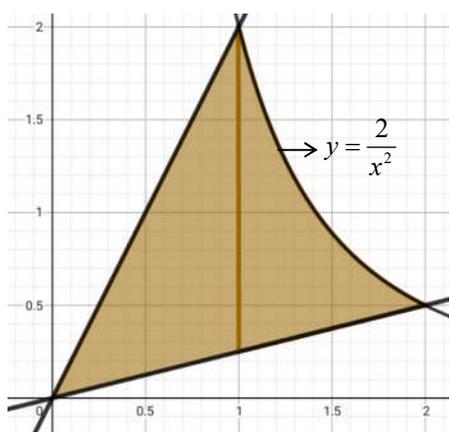
(c) Déduis-en les points M dont les coordonnées sont des entiers de l'intervalle $[-6; 6]$ tels que \overline{AB} et \overline{AM} soient orthogonaux. **0,5pt**

PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES (5 points)

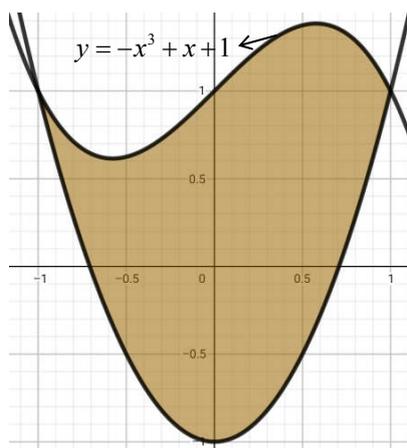
SITUATION :

Une unité d'aire est égale à $150m^2$. On prendra $\ln 3 \approx 1,1$.

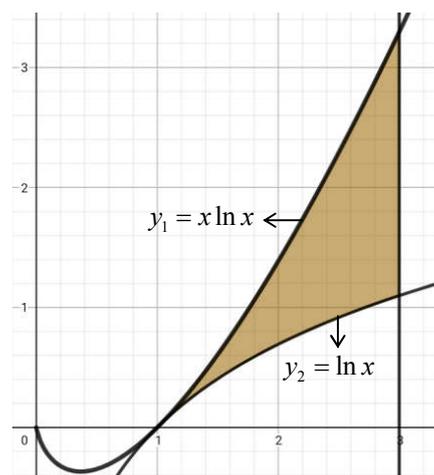
M. ATEBA, propriétaire terrien dispose de trois parcelles de terrain comme l'indique les figures ci-dessous. Il souhaite vendre chaque parcelle à raison de 3500 FCFA le mètre carré.



Parcelle 1



Parcelle 2



Parcelle 3

Tâches :

1. Détermine le prix de vente de la **parcelle 1**. **1,5pt**

2. Détermine le prix de vente de la **parcelle 2**. **1,5pt**

3. Détermine le prix de vente de la **parcelle 3**. **1,5pt**

Présentation : **0,5pt**