

COLLEGE PRIVE LAÏC L'EDUCATEUR B.P : 7192 Tel : 656055717				DATE DE PASSAGE		EVALUATION 3	
EPREUVE		CLASSE		DUREE		Coef.	
MATHÉMATIQUES		T <sup>le</sup> D		3h		HORAIRE :	
				04		2020-2021	

EPREUVE DE MATHÉMATIQUE

**PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES (15.5points)**

Exercice 1 : 04.75pts

1. On considère la suite de nombre complexes  $(Z_n)$  définie par:

$$\begin{cases} Z_0 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ Z_{n+1} = (1 - i\sqrt{3})Z_n \end{cases} \text{ Pour tout entier naturel } n ; \text{ On pose } r_n = |Z_n| \text{ et } \theta_n = \text{Arg}(Z_n).$$

- Déterminer le module et un argument principal de  $1 - i\sqrt{3}$ . 0.5pt
- Montrer que la suite  $(r_n)$  est géométrique, préciser la raison et le premier terme.
- Montrer que la suite  $(\theta_n)$  est arithmétique, préciser la raison et le premier terme.
- Exprimer  $r_n$  et  $\theta_n$  en fonction de  $n$  et en déduire  $Z_n$  en fonction de  $n$ . 1pt

2. Calculer les limites suivantes: 1.5pt

a.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 \sin x + 3}{x-1}$     b.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + \sqrt{x^2 - 1})$ .    c.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x+6}-3}$ .

d.  $\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{\frac{x^2 - x + 2}{x^2 + x}}$ .

3. On considère la fonction  $g(x) = \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$

- Déterminer l'ensemble de définition de  $g$ . 0.25pt
- Montrer que la fonction  $g$  admet un prolongement par continuité 0.5pt

Exercice 2: 03.75pts

On considère dans l'ensemble  $\mathbb{C}$  des nombres complexes, l'équation

$$(E) : z^3 + (1 - 2i\sqrt{3})z^2 - 2(2 + i\sqrt{3})z - 3 + i\sqrt{3} = 0.$$

- Montrer que (E) admet une solution imaginaire pure que l'on précisera. 0.5pt
- Résoudre l'équation (E) et exprimer les solutions  $z'$  et  $z''$  en fonction des nombres complexes  $a = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$  et  $b = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ . ( $z'$  et  $z''$  étant les solutions de parties réelles non nulles) 1pt
- Mettre  $a$  et  $b$  sous la forme trigonométrique, puis représenter leurs points images respectifs  $A$  et  $B$  dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  1pt
  - En déduire une construction simple des points  $M'$  et  $M''$  images des nombres complexes  $z'$  et  $z''$  respectivement. 1pt
- Mettre  $z'$  et  $z''$  sous la forme trigonométrique et en déduire les valeurs exactes de  $\cos \frac{11\pi}{12}$  et  $\sin \frac{11\pi}{12}$  1pt

### **Exercice 3:** 07pts

I. Soit la fonction  $f$  définie sur  $] -1,1[$  par:  $f(x) = -1 + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ .

1. Etudier les variations de  $f$  et dresser son tableau de variation. 1pt
2. Montrer que l'équation  $f(x) = x$  admet dans  $] -1,1[$  une solution unique  $\alpha$  et que  $\alpha > \frac{4}{5}$
3. En déduire le signe de  $f(x) - x$ . 0.5pt
4. Montrer que  $f$  réalise une bijection de  $] -1,1[$  sur  $\mathbb{R}$ . 0.75pt
5. Montrer que pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$  on a:  $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{\sqrt{1+(x+1)^2}}$ . 0.75pt

II. Soit la suite  $(u_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par:  $\begin{cases} u_0 \in [0; \alpha] \\ u_{n+1} = f^{-1}(u_n) \end{cases}$ .

1. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 < u_n < \alpha$ . 0.75pt
2. Montrer que la suite  $(u_n)$  est croissante et conclure. 0.75pt
3. Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$  on a:  $|(f^{-1})'(x)| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}$ . 0.75pt
4. Montrer que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$  on a:  $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} |u_n - \alpha|$ . 0.5pt
5. En déduire que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$  on a  $|u_{n+1} - \alpha| \leq (\frac{1}{2\sqrt{2}})^n |u_0 - \alpha|$  et déduire sa limite

### **PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES 4.5points**

On admet que la recette  $R(x)$  (en millions) d'un délégué médical, résultant de la vente de  $x$  centaines de litres de gel hydro-alcoolique, est définie sur  $[1; 5]$  par  $R(x) = 17x$ . Le fournisseur « D » livre ce gel au délégué médical pour ses clients, au cout  $C(x) = x(-x^2 + 29) - 16$  (en millions). Le délégué requiert votre expertise pour signer le contrat de représentation avec « D » qui est réputé être honnête.

#### **Tâches :**

- 1-Expliquer au délégué médical qu'on ne perd jamais dans ce commerce de gel. 1.5pt
- 2-Expliquer au délégué médical qu'il peut espérer rembourser sa dette de 81 millions s'il vend bien. 1.5pt
- 3-Expliquer au délégué médical que tout bénéfice entre 1 million et 5 millions correspond à deux volumes de gel vendus dont l'un est inférieur à 200 litres. 1.5pt