ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

NB : ***La clarté de la copie et la précision dans la redaction seront prises en compte.***

PARTIE A : ÉVALUATION DES RESSOURCES (15.5 points)

Exercice 1 (05.5 points)

1. Résoudre les équations, inéquations et systèmes suivants :
   (a) $\ln(2x-3)+2\ln(x+1)-\ln(x-1)=0$; (b) $\ln(5x+2)-\ln(x+2)>\ln(x-2)$. **1pt**
   (c) $\ln^2 x+\ln x-6=0$; (d) $\begin{cases} \ln xy & = & 4 \\ (\ln x)(\ln y) & = & -12 \end{cases}$ **1pt**
2. Calculer les limites suivantes : **1pt**
   (i) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x(1-\ln x)\right)$; (ii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)\right)$; (iii) $\lim\limits_{x\to-2^-}\ln\left(\frac{x-5}{x+2}\right)$.
3. Dans chacun des cas suivants, déterminer les primitives de la fonction f : **1pt**
   (a) $f(x)=\dfrac{-4x-2}{(x^2+x+1)^3}$; (b) $f(x)=\dfrac{5}{\sqrt{x^3}}+\dfrac{-2x+1}{\sqrt{3x^2-3x+5}}$
4. Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{2}\right\}$ par $h(x)=\dfrac{-3x^2+4x+5}{(2x+1)^2}$.
   (a) Déterminer trois réels a, b et c tels que $h(x)=a+\frac{b}{2x+1}+\frac{c}{(2x+1)^2}$. **0.75pt**
   (b) En déduire la primitive H de h sur $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ qui prend la valeur 1 en 0. **0.75pt**

Exercice 3 (04.5 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O,\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$.

1. On considère l'équation (E) : $z^3+(-8+i)z^2+(17-8i)z+17i=0$.
   (a) Montrer que $-i$ est solution de (E). **0.25pt**
   (b) Déterminer a, b et c tels que : $z^3+(-8+i)z^2+(17-8i)z+17i=(z+i)(az^2+bz+c)$. **0.5pt**
   (c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E). **0.5pt**
2. Soit les points A, B et C d'affixes respectives $4+i$, $4-i$ et $-i$. le point Ω est le point d'affixe 2 et S est l'image de A par la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
   (a) Calculer l'affixe de S. **0.5pt**
   (b) Démontrer que les points B, A, S et C appartiennent à un même cercle $(\mathscr{C})$. **0.5pt**
3. Soit s la similitude directe du plan complexe qui laisse invariant le point B et qui transforme le point C en A.
   (a) Démontrer que l'écriture complexe de s est : $z'=-\frac{1}{2}iz+\frac{9}{2}+i$, puis déterminer le rapport et l'angle de s. **1pt**

(b) Soit (Γ) l'ensemble des points $M(z)$ tels que $\left|z-1-2i\right| = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.
Déterminer l'image (Γ') de (Γ) par la similitude s. **0.75pt**

(c) Déterminer l'image (D') par s de la droite (D) : $x-2y+1=0$. **0.5pt**

Exercice 4 (05 points)

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

1. On considère la fonction u définie sur $]0;+\infty[$ par $u(x) = \ln(1+x) - x^2$.
   (a) Montrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in \left[\frac{1}{2};1\right]$. **0.75pt**
   (b) En déduire que α est solution de l'équation $f(x) = x$. **0.5pt**
2. On considère sur $]0;+\infty[$ la fonction g définie par : $g(x) = 1-\ln(1+x) - \dfrac{1}{x+1}$.
   (a) Dresser le tableau de variation de g sur $]0;+\infty[$ et en déduire son signe. **0.75pt**
   (b) Montrer que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$, puis déduire les variations de f sur $]0;+\infty[$. **0.5pt**
   (c) Montrer que pour tout $x \in \left[\frac{1}{2};1\right]$, $|g(x)| \leq 0.2$, puis déduire que $|f'(x)| \leq 0.8$. **0.75pt**
3. Soit (U_n) la suite définie par $U_0 = 0$ et $U_{n+1} = f(U_n)$.
   (a) Montrer que pour tout entier naturel n, $U_n \in \left[\frac{1}{2};1\right]$. **0.5pt**
   (b) Montrer que pour tout entier naturel n, $|U_{n+1}-\alpha| \leq 0.8|U_n-\alpha|$. **0.5pt**
   (c) Montrer que pour tout entier naturel n, $|U_{n+1}-\alpha| \leq \alpha(0.8)^n$ et en déduire la convergence de la suite (U_n) puis calculer sa limite. **0.75pt**

PARTIE B : ÉVALUATION DES COMPETENCES (04.5 points)

On applle couverture reseau de rayon r la surface du disque de rayon r et de centre le point de fixation d'un pilonne. Le plan terrestre est muni du repère complexe $(O, \vec{u}, \vec{v})$. La couverture reseau d'une société de téléphonie au quartier ODZA est délimité par l'ensemble (C) des points $M(z)$ tels que $|z-4-3i| = 3$. Par ailleurs dans ce quartier, le secteur BANANA est délimité par un espace triangulaire dont les sommets sont les solutions de l'équation $z^3-(5+7i)z^2-(4-25i)z-12i+30 = 0$, l'un des sommets ayant pour affixe $2i$.

A partir du 1^{er} Janvier, Jean un habitant de ce quartier a commencé à enregistrer sa consommation journalière de Megabits (données mobiles). L'évolution journalière de cette consommation est donnée par la suite (v_n) définie par $v_0 = 0$ et $v_{n+1} = \sqrt{2v_n+3}$ où v_n désigne le nombre de Megabits consommé le jour n. Le gain en millions de cette société de téléphonie en fonction des mégabits vendus est donné par la fonction $f(x) = x^2+4-2\ln x$.

Tâches :

1. Le secteur BANANA est-il entièrement couvert par le reseau de cette société ? **1.5pt**
2. Existe-t-il un nombre limite de megabits journalier que pourra consommer Jean au fil du temps ? **1.5pt**
3. Déterminer si elle existe une valeur approchée de la quantité de mégabits vendu qui peut rapporter un gain de 10 millions. **1.5pt**