

EVALUATION HARMONISEE N°3 DE MATHEMATIQUES

Evaluation des ressources 15.5pts

Exercice 1 : 5pts

- I. Soit h la fonction définie sur $] -\infty, -\frac{1}{2}[$ par $h(x) = x\sqrt{1-2x}$. Déterminer les réels a, b et c pour que la fonction H définie sur $] -\infty, -\frac{1}{2}[$ par $H(x) = (ax^2 + bx + c)\sqrt{1-2x}$ soit une primitive de h . 1pt
- II. Déterminer les racines cinquièmes du nombre complexe $Z = 16\sqrt{2}(-1 + i)$ sous forme trigonométrique 1pt
- III. On considère le polynôme de la variable z défini par $P(z) = z^3 - (2 - i)z^2 + (5 - 3i)z - 2 + 6i$
1. Calculer $P(1 - i)$ 0.5pt
 2. Mettre P sous la forme $P(z) = (z - 1 + i)(z^2 + az + b)$ où a et b sont deux nombres complexes à déterminer. 0.5pt
 3. Déterminer toutes les racines de P . 0.75pt
 4. On munit le plan complexe d'un repère orthonormé et on considère les points $A(1), B(-2i), C(1 - i)$ et $D(1 + 2i)$. s désigne la similitude directe plane telle que $s(A) = B$ et $s(C) = D$
 - a. Donner une écriture complexe de s . 0.75pt
 - b. En déduire les éléments caractéristiques de s . 0.5pt

Exercice 2 : 5pts

- I. Soit g la fonction de la variable réelle défini sur \mathbb{R} par $g(x) = x^3 - 3x + 2$
1. Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation. 1pt
 2. Calculer $g(-2)$ et en déduire le signe de g suivant les valeurs de x . 1pt
- II. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^* par $f(x) = x\left(1 - \frac{1}{x}\right)^3$ (C_f) sa courbe représentative.
1. a. Montrer que $f(x) = x - 3 + \frac{3x-1}{x^2}$ puis justifier que la droite (d) d'équation $y = x - 3$ est asymptote à (C_f). 0.75pt
b. Etudier la position relative de (C_f) et de la droite (d). 0.5pt
 2. Montrer que pour tout réel x non nul, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$ et en déduire les variations de g 1pt
3. Déterminer la primitive de f qui s'annule en 1. 0.75pt

Exercice 3 : 5.5pts

- I. Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = 2x - 4 + \ln x$
1. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation. 1pt
 2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α telle que $1 < \alpha < 2$ 1pt
- II. Soit g la fonction définie sur $I = [0, 2]$ par $g(x) = 2 - \frac{1}{2}\ln x$
1. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ est équivalente à $g(x) = x$ pour tout $x \in I$. 0.5pt
 2. En déduire que α est solution de l'équation $g(x) = x$ 0.5pt
 3. Montrer que pour tout $x \in I, g(x) \in I$. 0.5pt

4. Montrer que pour tout $x \in I$, $|g'(x)| \leq \frac{1}{2}$ puis que $|g(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2} |x - \alpha|$ **0.75pt**
- III. On définit la suite (u_n) par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = g(u_n)$
1. Montrer que pour tout entier naturel n , $u_n \in I$. **0.5pt**
 2. Montrer que pour tout entier naturel n , $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$ **0.25pt**
 3. En déduire que pour tout entier naturel n , $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ **0.5pt**
 4. Déduire que la suite (u_n) converge vers α **0.25pt**
 5. Déterminer l'entier n_0 tel que $n \geq n_0$ et $|u_n - \alpha| \leq 10^{-3}$ **0.25pt**

EVALUATION DES COMPETENCES **4.5pts**

M. MOUAFFO possède trois terrains dont il veut absolument clôturer car il lui set rapporté que des personnes mal intentionnées utilisent ces espaces non occupés à des mauvais fins. **M. MOUAFFO** décide donc d'acheter du fil barbelé pour clôturer ses trois terrains. Le rouleau de 5m de fil barbelé est vendu à 3500 frs.

Le premier terrain : est formé de l'ensemble de tous les points $M(x, y)$ du plan complexe vérifiant $|2iz - 1 - 3i| = 8$.

Le second terrain quant à lui est de forme rectangulaire et dont les dimensions sont la partie réelle et la partie imaginaire solution de l'équation $(1 + 4i)z + (3 - 4i)\bar{z} = 4 - 8i$ où \bar{z} est le conjugué de z .

Le troisième terrain est formé de l'ensemble des points M d'affixe z du plan complexe tels que $Re(Z) = 0$ avec $Z = \frac{z}{z+2i}$

NB : Les distances dans tous ces terrains sont exprimés en décamètre.

1. Quel est le montant à dépenser par **M. MOUAFFO** pour l'achat du fil barbelé permettant de clôturer entièrement le premier terrain ? **1.5pt**
2. Quel est le montant à dépenser par **M. MOUAFFO** pour l'achat du fil barbelé permettant de clôturer entièrement le deuxième terrain ? **1.5pt**
3. Quel est le montant à dépenser par **M. MOUAFFO** pour l'achat du fil barbelé permettant de clôturer entièrement le troisième terrain ? **1.5pt**