Fiche de travaux dirigés en classe de première C et D

EXAMINATEUR : Nzouekeu Mbitkeu Patrice
Bachelor of Science
Email : nzouekeu.patrice@yahoo.com

Exercice 1 :
On considère les fonctions f_m définies pour tout x de $\mathbb{R}$ par $f_m(x) = (m-1)x^2 + 2mx + 1 - 3m$ où m est un paramètre réel quelconque et leurs courbes représentatives (C_m) dans un plan rapporté à un repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

1. Quel est le domaine de définition des fonctions f_m
2. Etudier suivant les valeurs de m, le sens de variation de f_m. Faire dans chaque cas un tableau de variation.
3. Démontrer que les courbes (C_m) passent par des points fixes dont on déterminera les coordonnées.
4. Combien passe-t-il de courbes (C_m) par un point donné $M_0(x_0, y_0)$ du plan.

Exercice 2 :
Soit la fonction f définie pour tout x réel par $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + x - \frac{4}{3}$ et sa courbe représentative (C).

1. Etudier cette fonction. Construire (C)
2. Discuter graphiquement l'équation $x^2 + 3x - 4 - m = 0$ où x désigne l'inconnue réelle et m un paramètre réel.

Exercice 3 :
Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. On considère les points $A(1,1)$; $B(4,1)$; $C(2,3)$.

1. Montrer que les points A,B,C sont non alignés
2. Trouver une équation du cercle (C) circonscrit au triangle ABC
3. Déterminer les points d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses.

Exercice 4 :
Etudier et tracer la fonction $f(x) = |x^3 - 6x|$

Exercice 5 :
Soit f_m la fonction de la variable réelle x définie par $f_m(x) = (m+2)x^3 - 2mx^2 - x + m$ où m est un paramètre réel.

1. Démontrer que les courbes représentatives (C_m) des fonctions f_m passent par des points fixes lorsque m varie.
2. Indiquer le sens de variation de f_m suivant les valeurs de m.
3. Donner un exemple d'étude de f_m dans chaque cas mis en évidence et construire la courbe représentative correspondante dans un système d'axes orthonormés $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
4. Quelles relations doit-il exister entre m' et m'' pour que les tangentes aux courbes représentatives $(C_{m'})$ et $(C_{m''})$ au point $A(1,1)$ soient perpendiculaires.

Exercice 6 :
Déterminer les coefficients a,b,c de la fonction f définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ pour que le sommet de la courbe représentative (P) soit le point S et qu'elle passe par A. Représenter (P). Données $S(-1,3)$ et $A(2,-3)$.

Exercice 7 :
Soit f_m la fonction de la variable réelle x définie pour tout x par $f_m(x) = \frac{1}{2}x^2 - mx + \frac{m(m+2)}{2}$ où m est un paramètre réel.(C_m) est la courbe représentative de f_m.

1. Démontrer que pour toutes valeurs de m, les courbes (C_m) sont isométriques.
2. Quel est l'ensemble L des sommets des courbes (C_m) lorsque m varie ?
3. Démontrer qu'il existe une tangente commune D à toutes les courbes (C_m).
4. Quel est l'ensemble Δ des points des courbes (C_m) où la tangente est parallèle à la droite $y+x=0$?
5. Quelle particularité présentent les ensembles L, D, Δ ? Expliquer ce résultat.

Exercice 8 :
Soit f_m la fonction de la variable réelle x définie pour tout x par $f_m(x)=x^3-mx+m-2$ où m est un paramètre réel.

1. Démontrer que les courbes représentatives (C_m) de ces fonctions passent par un point fixe lorsque m varie.
2. Etudier, suivant les valeurs de m, le sens de variation de (f_m) .
3. Ecrire l'équation de la tangente au point d'inflexion de (C_m).
4. Démontrer que cette tangente passe par un point fixe lorsque m varie.
5. Construire (C_m) pour $m \in \{-1, 0, 3\}$, sur une même figure .
6. Vérifier la propriété démontré en 4.

Exercice 9 :
Soit la fonction f_m de la variable réelle x définie pour tout x par $f_m(x)=mx^3+(2m-1)x+2$ où m est un paramètre réel.
On désigne par (C_m) la courbe représentative de f_m.

1. Démontrer que toutes les courbes (C_m) passent par un point fixe, et que ce point fixe est point d'inflexion pour chaque courbe et centre de symétrie pour la figure.
2. Ecrire l'équation de la tangente à (C_m) au point d'abscisse $+1$. Démontrer que cette droite passe par un point fixe lorsque m varie.
3. Que peut-on dire des tangentes aux courbes (C_m) aux points d'abscisse -1 ?

Exercice 10 :
Soit la fonction f_m de la variable réelle x définie pour tout x par $f_m(x)=(2m+1)x^3-mx-m+1$ où m est un paramètre réel. On appelle (C_m) la courbe représentative de cette fonction dans un plan rapporté au repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

1. Etudier le sens de variation de f_m suivant les valeurs de m
2. Démontrer que, quelque soit m, (C_m) passe par un point fixe A que l'on déterminera.
3. Déterminer les coordonnées du point d'inflexion I_m de (C_m).
4. Ecrire l'équation de la tangente en I_m à (C_m).
5. Démontrer que cette droite passe par un point fixe lorsque m varie.
6. Pour une valeur x_0 de l'abscisse, les tangentes aux courbes (C_m) sont parallèles entre elles lorsque m varie. Déterminer les valeurs possibles de x_0.
7. Deux courbes (C_m) distinctes ont-elles des points communs autre que A ?
8. Construire sur une même figure les courbes (C_m) correspondant à $m \in \{-1, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{4}, 0, 1\}$.

Exercice 11 :
Soit la fonction f_m de la variable réelle x définie pour tout x par $f_m(x)=(m-1)x^3-m+2$ où m est un paramètre réel.
Cette fonction f_m admet une courbe représentative (C_m).On désigne par $\mathfrak{F}$ l'ensemble des courbes (C_m).

1. Démontrer que (C_m) passe par un point fixe lorsque m varie.
2. Quel est le sens de variation de f_m suivant les valeurs de m ?
3. Démontrer que la droite d'équation $y = 1$ est un axe de symétrie pour $\mathfrak{F}$.
4. Déterminer m pour que (C_m) passe par $A(2, 0)$.
5. Déterminer m pour que (C_m) passe par $M_0(x_0, y_0)$. Discuter.

Exercice 12 :
Soit la fonction f_m de la variable réelle x définie pour tout x par $f_m(x) = x^3 + mx^2$ où m désigne un paramètre réel.
Etudier cette famille de fonctions lorsque m varie, ainsi que leurs courbes représentatives.

Exercice 13 :
On considère les fonctions f_m définies par $f_m(x) = (m+1)x^3 - 2mx^2 - (m-2)x + 2m - 3$ où m désigne un paramètre réel.

1. Démontrer que les courbes représentatives (C_m) de f_m passent par des points fixes lorsque m varie.
2. Pour quelles valeurs de m la fonction f_m est-elle croissante dans $\mathbb{R}$?
3. Etudier et construire f_m pour $m \in \{-2, -1, 0, 2\}$.
4. On coupe (C_{-2}), (C_0) et (C_2) par une droite (D) d'équation $x = x_0$. On obtient respectivement les points A, B, C. Soit M un point quelconque de (D). Calculer $\overline{MA} - 2\overline{MB} + \overline{MC}$.
5. Quelle conséquence géométrique peut-on en tirer pour les courbes (C_{-2}), (C_0) et (C_2) ?

Exercice 14 :
Soit les fonctions f_m définies par $f_m(x) = (-2m+1)x^4 - 2x^3 + (m-1)x^2$, où m désigne un paramètre réel.

1. Démontrer que les courbes représentatives (C_m) correspondantes passent par des points fixes lorsque m varie.
2. Les fonctions f_m peuvent-elles admettre un seul extremum ?
3. Déterminer la valeur de m pour que la fonction f_m correspondante admette un minimun pour $x = 1$.
4. Etudier la fonction ainsi déterminée et construire sa courbe représentative.
5. Etudier la fonction correspondant à $m = \frac{5}{8}$ et construire sa courbe représentative sur la même figure que précédement.

Exercice 15 :
On considère les fonctions f_m définies par $f_m(x) = (m+1)x^4 - 2mx^2 - 1$, où m désigne un paramètre réel.

1. Démontrer que les courbes représentatives (C_m) des fonctions f_m passent par des points fixes lorsque m varie.
2. Etudier le sens de variation de f_m lorsque m prend toutes les valeurs réelles possibles.On trouvera trois types principaux de fonctions que l'on désignera par A, B, C.
3. Quel est le nombre de courbes (C_m) passant par un point donné $M_0(x_0, y_0)$ du plan ? Discuter. On précisera quel est le type de fonction représentée par la courbe correspondant à M_0, suivant la position de M dans le plan.
   On illustrera cette discussion en construisant plusieurs courbes de la famille $\{C_m\}$ envisagée.

Exercice 16 :

1. Etudier suivant les valeurs du paramètre réel m la fonction $f_m(x) = \frac{(m-3)x+m+2}{x-2m}$
2. Démontrer que (C_m) courbe représentative de la fonction f_m passe par un point fixe lorsque m varie.

Exercice 17 :
On considère les fonctions f_m définies par $f_m(x) = \frac{-x+m}{x+m^2}$ où m est un paramètre réel.

1. Déterminer suivant les valeurs de m, le sens de variation de la fonction f_m
2. Construire les courbes représentatives (C_m) de f_m lorsque $m \in \{-2, \frac{-1}{2}, -1, 1, 0\}$
3. Quel est l'ensemble des points d'intersection des asymptôtes de (C_m) lorsque m varie ?

Exercice 18 :
Soit les fonctions f_m définies par $f_m(x) = \frac{2mx-1}{-x+m}$ et leurs courbes représentatives (C_m) où m est un paramètre réel.

1. Démontrer que (C_m) passe par des points fixes lorsque m varie .
2. Quel est le sens de variation de ces fonctions f_m ?
3. Quel est l'ensemble des points d'intersection des asymptôtes de (C_m) lorsque m décrit $\mathbb{R}$?
4. Pour quelles valeurs de m la courbe (C_m) rencontre-t-elle la droite d'équation $y = x$ en deux points M' et M'' distincts ou confondues ?
5. Quel est l'ensemble des milieux de $[M', M'']$ lorsque m varie ?

Exercice 19 :
Soit les fonctions f_m définies par $f_m(x) = \frac{(m+1)x-3}{(1-m)x+2}$

1. Quel est le sens de variation de f_m, suivant les valeurs réelles de m ?
2. On appelle (C_m) la courbe représentative de f_m.Soit (D) la droite d'équation $y-x = 0$. Lorsqu'ils existent, les points d'intersection de (D) et (C_m) sont appellés M' et M''. Quelle particularité présente la figure lorsque m varie ?
3. Démontrer que (C_m) courbe représentative de la fonction f_m passe par des points fixes lorsque m varie. Les déterminer.
4. Chaque courbe (C_m) admet un centre de symétrie S_m. Quel est l'ensemble des points S_m lorsque m varie ?
5. Combien passe-t-il de courbes C_m par un point donné $M_0(x_0, y_0)$ du plan. Discuter

Exercice 20 :
Soit les fonctions f_m définies par $f_m(x) = \frac{mx-2-m}{x-3m+1}$

1. Quel est le sens de variation de f_m, suivant les valeurs réelles de m ?
2. Soit (C_m) la courbe représentative de f_m. Soit (D) la droite d'équation $y - x = 0$. Lorsqu'ils existent, les points d'intersection de (D) et (C_m) sont appellés M' et M''. Démontrer qu'il existe deux points fixes A et B de (D) tels que (A, B, M', M'') soit une division harmonique, quel que soit m.
3. Démontrer que (C_m) courbe représentative de la fonction f_m passe par des points fixes lorsque m varie. Les déterminer.
4. Chaque courbe (C_m) admet un centre de symétrie S_m. Quel est l'ensemble des points S_m lorsque m varie ?

Exercice 21 :
Résoudre les systèmes suivants :

1. (a) $\begin{cases} x^2+y^2 = & 13 \\ xy = & 6 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x+y = & 4 \\ x^3+y^3 = & 12 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} x+y+xy = & -5 \\ x^2+y^2 = & 10 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} x^2y+xy^2 = & 20 \\ xy = & -20 \end{cases}$
2. (a) $\begin{cases} x^2y+xy^2 = & 5 \\ x^3+y^3 = & -9 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x^2 = & ax+by \\ y^2 = & bx+ay \end{cases}$ (c) $\begin{cases} \frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2} = & 85 \\ \frac{1}{x}-\frac{1}{y} = & 5 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} x^3 = & ax+by \\ y^3 = & bx+ay \end{cases}$
3. (a) $\begin{cases} x-y=6 \\ (x^2+y^2)(x^3-y^3) = & 1440 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x+y = & 1 \\ x^5+y^5 = & 31 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} \frac{1}{(x+1)^3} = & \frac{7}{x+1}+\frac{3}{y-2} \\ \frac{1}{(y-2)^3} = & \frac{7}{y-2}+\frac{3}{x+1} \end{cases}$
4. (a) $\begin{cases} 2x=3y=-z \\ x+y+z=7 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} \frac{x-1}{3}=\frac{y+4}{2}=\frac{2z-1}{-2} \\ 3x-y+6z-4=0 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} -x+y+z = & 0 \\ x-y+z = & 2 \\ x+y-z = & 4 \end{cases}$
5. Discuter le système suivant : (S) : $\begin{cases} \lambda x+y+z = & a \\ x+\lambda y+z = & b \\ x+y+\lambda z = & c \end{cases}$ On prendra $s = x+y+z$ pour inconnue auxiliaire.

Exercice 22 :

On considère la fonction f qui, à tout nombre réel x, fait correspondre le nombre réel

$$y = f_\alpha(x) = \frac{(1-x^2)\cos 2\alpha + 2x\sin 2\alpha}{1+x^2}$$

où α désigne un paramètre satisfaisant à $0 \leq \alpha < \pi$.

1. Etudier le sens de variation de cette fonction pour $\alpha = 0$ et construire la courbe représentative dans un repère orthonormé d'axes $x'Ox$ et $y'Oy$.
2. (a) On choisit α tel que $\tan\alpha = \frac{1}{2}$. Ecrire $f_\alpha(x)$ dans ce cas particulier ; étudier ses variations et tracer sa courbe représentative (Γ) dans le même repère orthonormé.
   (b) Comment faut-il choisir h pour qu'une parallèle à l'axe $x'Ox$ d'équation $y = h$ coupe la courbe (Γ) en deux points distincts M et N dont les projections orthogonales sur $x'Ox$ sont notées respectivement M' et N'.
   (c) Démontrer que lorsque h varie dans les limites permises, les points M' et N' restent conjugués harmoniques par rapport à deux points fixes que l'on déterminera.
   (d) Déterminer et construire dans le repère précédent l'ensemble des milieux I des segments $[M, N]$ lorsque h varie.
3. Démontrer que quel que soit α $(0 \leq \alpha < \pi)$ et quel que soit x, on a $|y| \leq 1$.

LE RAISONNEMENT MATHÉMATIQUE N'EST JAMAIS PUREMENT CONTEMPLATIF. IL EST ACTIF ET CONSTRUCTIF ET C'EST L'ACTIVITÉ CONSTRUCTIVE DE L'ESPRIT QUI FAIT APPARAÎTRE UN RÉSULTAT NOUVEAU.

EDMOND GOBLOT, TRAITÉ DE LOGIQUE