COURS DE RÉPÉTION LA SOURCE

EXERCICE 1 :

Une urne contient 2 jetons portant le numéro 1, 2 jetons portant le numéro 2, 1 jeton portant le numéro 4 et un jeton portant le numéro 3. Tous ces jetons sont indiscernables au toucher. On tire au hasard un jeton de l'urne, on note son numéro noté a porté sur le jeton, on remet le jeton tiré dans l'urne. On tire ensuite un deuxième jeton de l'urne et on note b le numéro du jeton tiré.
Soit $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ un repère orthonormal de l'espace. On considère les vecteurs $\vec{u}(a;-5;1-a)$ et $\vec{v}(1+b;1;b)$; le plan $(P): ax+by-3z+2=0$ et l'équation $(E): ax+by=5$.

1. Calculer la probabilité pour que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux.
2. Calculer la probabilité pour que le point $A(-1;2;a)$ appartienne à (P).
3. Calculer la probabilité pour que l'équation (E) admette des solutions dans $\mathbb{Z}^2$.
4. Calculer la probabilité pour que le vecteur $\vec{v}$ soit orthogonal au plan (P).
5. Pour $a=2$ et $b=1$, donner l'expression analytique de la réflexion de plan (P).

EXERCICE 2 :

On considère l'équation $(E_\theta): z^2-2z\tan\theta+1+2\tan^2\theta=0$ où $\theta\in I=\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ et $z\in\mathbb{C}$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_θ).
2. Soit le point M_θ dont l'affixe est la solution de (E_θ) d'ordonnée positive.
   Montrer que M_θ est un point de la conique $(\Gamma): -x^2+y^2=1$.
3. Déterminer la nature, un foyer et l'excentricité de (Γ).
4. Construire l'ensemble des points M_θ lorsque $\theta\in I$.

EXERCICE 3 :

Dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, on donne le point $A(12;18)$. On désigne par B un point de l'axe $\left(O;\vec{i}\right)$ et par C un point de l'axe $\left(O;\vec{j}\right)$ tels que $Mes\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=-\frac{\pi}{2}$.
On appelle x l'abscisse de B et y l'ordonné de C.

1. Démontrer que le couple (x,y) est solution de l'équation $(E): 2x+3y=78$.
2. On se propose de trouver tous les couples (B,C) de points ayant pour coordonnées des nombres entiers relatifs.
   - **(a)** Montrer que l'on est ramené à l'équation (E) avec $(x,y)\in\mathbb{Z}^2$.
   - **(b)** A partir de la définition de B et C, trouver une solution particulière $(x_0,y_0)\in\mathbb{Z}^2$ de (E).
   - **(c)** Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E).
   - **(d)** Combien y a-t-il de couples de points (B,C) ayant pour coordonnées des nombres entiers relatifs, tels que $-6\le x\le 21$ et $-5\le y\le 14$?

PROBLEME :

PARTIE A :

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x)=\int_x^{2x}\frac{e^{-t}}{t}dt \text{ si } x>0 \\ f(0)=\ln 2 \end{cases}$

$\mathscr{C}$ désigne sa courbe dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan.

1. Etudier et dresser sur $[0;+\infty[$ le tableau de variation de $g: x\mapsto 1-x-e^{-x}$.
2. **(a)** Démontrer que pour tout $t\geq 0$, on a : $t-\frac{1}{2}t^2\leq 1-e^{-t}\leq t$.

   (b) Déduire de ce qui précède que pour tout $x>0$, $1-\frac{3}{4}x\leq\frac{\ln 2-f(x)}{x}\leq 1$.

   (c) Montrer que f est dérivable à droite en 0.
3. Montrer que pour tout $x>0$, $0\leq f(x)\leq\frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}$. Calculer $\lim_{x\to+\infty}f(x)$.
4. **(a)** Montrer que f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et calculer $f'(x)$.

   (b) Dresser le tableau de variations de f, puis tracer la courbe $\mathscr{C}$ de f.
5. **(a)** Montrer que f est une bijection de $]0;+\infty[$ sur un intervalle J à préciser.

   (b) Etudier la dérivabilité de f^{-1},calculer $f^{-1}(\ln 2)$, puis tracer la courbe Γ de f^{-1}.

PARTIE B :

On considère la suite (U_n) définie par : $U_n=\int_0^2\frac{2t+3}{t+2}e^{\frac{t}{n}}dt$.

1. **(a)** Etudier les variations de la fonction f définie sur $[0;2]$ par $f(t)=\frac{2t+3}{t+2}$.

   (b) En déduire que pour tout $t\in[0;2]$, on a : $\frac{3}{2}\leq f(t)\leq\frac{7}{4}$.

   (c) Montrer que : $\frac{3}{2}n\left(e^{\frac{2}{n}}-1\right)\leq U_n\leq\frac{7}{4}n\left(e^{\frac{2}{n}}-1\right)$

   (d) Montrer que si (U_n) possède une limite l, alors $3\leq l\leq\frac{7}{2}$.
2. **(a)** Vérifier que pour tout $t\in[0;2]$, $\frac{2t+3}{t+2}=2-\frac{1}{t+2}$. Calculer $I=\int_0^2\frac{2t+3}{t+2}dt$.

   (b) Montrer que pour tout $t\in[0;2]$, $1\leq e^{\frac{t}{n}}\leq e^{\frac{2}{n}}$ et en déduire que $I\leq U_n\leq e^{\frac{2}{n}}I$.

PARTIE C :

Soit E un plan vectoriel de base $\mathscr{B}=(\vec{i},\vec{j})$. Soit g l'endomorphisme de E tel que $g(\vec{i})=\vec{i}-\vec{j}$ et $g(\vec{j})=-4\vec{i}+\vec{j}$. On pose $E_\lambda=\{\vec{u}\in E / g(\vec{u})=\lambda\vec{u}\}$ où λ est un nombre réel.

1. Montrer que E_λ est un sous-espace vectoriel de E.
2. Montrer que g est un automorphisme et que si $\lambda\neq -1$ et $\lambda\neq 3$, alors $E_\lambda=\{\overrightarrow{0_E}\}$.
3. Déterminer E_{-1} et E_3. Donner un vecteur de base $\vec{e_1}$ de E_{-1} et un vecteur de base $\vec{e_2}$ de E_3
4. Démontrer que la famille $\mathscr{B}'=(\vec{e_1},\vec{e_2})$ est une base de E.
5. Démontrer que E_{-1} et E_3 sont supplémentaires dans E.
6. En déduire la matrice de g dans la base $\mathscr{B}'$.