Ministère des Enseignements Secondaires
Lycée Technique d'Edéa
Département de Mathématiques
Samedi, 16 novembre 2019

Année Scolaire : 2019-2020
Classe : T^les industrielles
Epreuve : Mathématiques
Durée : 3h Coefficient : 4

EVALUATION DE FIN DU 1^ER TRIMESTRE

EXERCICE 1 : 5 Points

On considère l'application P de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par : $P(z) = 9z^4 - 24z^3 + 50z^2 - 24z + 41$.

1. Montrer que si z_0 est une racine de P, alors $\overline{z_0}$ est aussi une racine de P. **0,5pt**

2. Vérifier que i est une racine de P et en déduire une autre racine de P. **0,5pt**

3. Déterminer trois nombres complexes a, b et c tels que :
pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = (z^2 + 1)(az^2 + bz + c)$. **0,75pt**

4. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$. **1pt**

5. Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Unité graphique : $3cm$.
On désigne par A, B, C et D les points d'affixes respectives $z_A = i$, $z_B = -i$,
$z_C = \frac{4}{3} + \frac{5}{3}i$ et $z_D = \frac{4}{3} - \frac{5}{3}i$

a) Placer les points A, B, C et D dans le repère. **0,5pt**

b) Montrer que $\frac{z_C - z_A}{z_D - z_A} \in i\mathbb{R}$ *et* $\frac{z_C - z_B}{z_D - z_B} \in i\mathbb{R}$ où $i\mathbb{R}$ est l'ensemble des imaginaires purs. **0,5pt**

c) En déduire la nature exacte de chacun des triangles ACD et CBD. **0,5pt**

d) Montrer que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle (Γ) dont on précisera le centre et le rayon. **0,75pt**

EXERCICE 2 : 04 Points

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
On considère la sphère (S) d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 2z - 86 = 0$.

1. Déterminer le centre Ω et le rayon R de la sphère (S). **0,5pt**

2. $(\mathcal{P})$ est le plan d'équation $2x - 2y - z + 9 = 0$.

a) Montrer que (S) et $(\mathcal{P})$ sont sécants. **0,75pt**

b) Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal de Ω sur $(\mathcal{P})$. **1,25pt**

3. $(\mathcal{C})$ est le cercle d'intersection du plan $(\mathcal{P})$ et de la sphère (S).
Déterminer le centre et le rayon r de $(\mathcal{C})$. **0,5pt**

4. a) Montrer que le point $A(3; 8; 1)$ appartient à la sphère (S). **0,25pt**

b) Déterminer une équation cartésienne du plan (π) tangent à (S) au point A. **0,75pt**

PROBLEME : 11 Points

Le problème comporte 3 parties dépendantes A, B et C.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ par : $f(x)=\dfrac{x^3+2x^2}{x^2-1}$. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O,I,J). Unité graphique : 2cm.

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=x^3-3x-4$.

1. Dresser le tableau de variations de g. **1pt**

2. Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α sur $]2;3[$ puis déterminer un encadrement de α à 10^{-1} près. **1pt**

3. Etudier le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$. **0,5pt**

Partie B : Etude de la fonction f.

1. Calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition. **1pt**

2. Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}-\{-1;1\}$, $f'(x)=\dfrac{xg(x)}{(x^2-1)^2}$. En déduire le tableau de variations de f. **1,5pt**

3. **a)** Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}-\{-1;1\}$, $f(x)=x+2+\dfrac{x+2}{x^2-1}$. **0,5pt**

b) En déduire que la courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote oblique $\mathscr{D}$ en $-\infty$ et en $+\infty$. **0,5pt**

c) Etudier la position relative de $\mathscr{C}$ par rapport à $\mathscr{D}$. **0,5pt**

4. Tracer la droite $\mathscr{D}$ et la courbe $\mathscr{C}$. **1,5pt**

Partie C : Nombre de solutions d'une équation

1. Déterminer les abscisses des points de la courbe $\mathscr{C}$ où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y=x+2$. **0,5pt**

2. Déterminer une équation de chacune de ces tangentes et les représenter. **1,5pt**

3. En déduire graphiquement, suivant les valeurs du paramètre réel m, le nombre de solutions de l'équation $f(x)=x+m$. **1pt**