

# Chapitre 1. Le raisonnement par récurrence

## I. Découverte du raisonnement par récurrence

On considère la suite de nombres  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = 2u_n + 1.$$

Ainsi,  $u_0 = 1$  puis  $u_1 = 2 \times u_0 + 1 = 2 \times 1 + 1 = 3$  puis  $u_2 = 2 \times u_1 + 1 = 2 \times 3 + 1 = 7$  puis  $u_3 = 2 \times u_2 + 1 = 2 \times 7 + 1 = 15$ .

Décrivons les premières valeurs de  $u_n$  dans un tableau et comparons ces valeurs aux premières puissances de 2.

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$u_n$	1	3	7	15	31	63	127	255	511	1023	2047
$2^{n+1}$	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048

Il semblerait que chaque terme de la suite soit 1 au-dessous d'une certaine puissance de 2. On **conjecture** donc ou encore on pense fortement que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = 2^{n+1} - 1$ .

Conjecture : pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = 2^{n+1} - 1$ .

Nous avons la sensation que ce résultat est vrai mais nous ne l'avons jamais démontré et il s'agit maintenant de le montrer. Le tableau donné plus haut montre la formule quand  $n$  est un entier compris entre 0 et 10 au sens large. Mais ce tableau ne montre pas la formule quand  $n = 11$ . On peut bien sûr vérifier « à la main » si oui ou non le nombre  $u_{11}$  est égal à  $2^{12} - 1$  :

$$u_{11} = 2 \times u_{10} + 1 = 2 \times 2047 + 1 = 4095 = 4096 - 1 = 2^{12} - 1,$$

et la formule est encore vraie pour  $n = 11$ . Mais elle n'est pas démontrée pour  $n = 12 \dots$

Lançons nous maintenant dans ce que l'on appellera au paragraphe suivant, un **raisonnement par récurrence**. Nous ne savons pas si la formule est vraie quand  $n = 12$  car nous n'avons pas pris la peine de le vérifier. Par contre,

**si** la formule est vraie au rang 12, **alors** elle sera vraie au rang 13.

En effet, si  $u_{12} = 2^{13} - 1$ , alors  $u_{13} = 2 \times u_{12} + 1 = 2 \times (2^{13} - 1) + 1 = 2^{14} - 2 + 1 = 2^{14} - 1$ . Ainsi, nous ne savons pas que la formule est vraie au rang 12 mais nous savons que si elle est vraie au rang 12, alors elle est encore vraie au rang 13. De même, si la formule est vraie au rang 17 ou encore si  $u_{17} = 2^{18} - 1$  alors

$$u_{18} = 2 \times u_{17} + 1 = 2 \times (2^{18} - 1) + 1 = 2^{19} - 2 + 1 = 2^{19} - 1,$$

et la formule est alors vraie au rang 18. Plus généralement, si on suppose que la formule est vraie pour un certain rang  $n$  donné, alors la formule est automatiquement vraie au rang suivant. En effet, si on suppose que  $u_n = 2^{n+1} - 1$ , alors

$$u_{n+1} = 2 \times u_n + 1 = 2 \times (2^{n+1} - 1) + 1 = 2^{(n+1)+1} - 2 + 1 = 2^{(n+1)+1} - 1.$$

Ainsi, si on savait que la formule était vraie pour  $n = 0$  alors elle serait automatiquement vraie pour  $n = 1$  et si on savait que la formule était vraie pour  $n = 1$  alors elle serait automatiquement vraie pour  $n = 2$  et si on savait que la formule était vraie pour  $n = 2$  alors elle serait automatiquement vraie pour  $n = 3 \dots$

Finalement, il ne reste plus qu'à se convaincre que la formule est vraie quand  $n = 0$  car alors la formule devient vraie pour  $n = 1$  puis  $n = 2$  puis, de proche en proche, pour tout entier naturel  $n$ .

Comme  $2^{0+1} - 1 = 2 - 1 = 1$  et que  $u_0 = 1$ , on a effectivement  $u_0 = 2^{0+1} - 1$ . Mais alors, d'après la remarque précédente, on a montré que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = 2^{n+1} - 1$ .

Le type de raisonnement que nous avons tenu est un **raisonnement par récurrence** et le type de démonstration que l'on a effectué est une **démonstration par récurrence**. Dans le paragraphe suivant, on va formaliser ce type de démonstration.

## II. Le raisonnement par récurrence

On énonce maintenant le principe du raisonnement par récurrence. On admet le théorème suivant :

**Théorème.** On veut prouver qu'une certaine propriété  $\mathcal{P}(n)$ , dépendant d'un entier naturel  $n$ , est vraie pour tout entier naturel  $n$ .

Si

- $\mathcal{P}(0)$  est vraie,
- pour tout entier naturel  $n$ ,  $\mathcal{P}(n)$  vraie implique  $\mathcal{P}(n+1)$  vraie,

alors

pour tout entier naturel  $n$ ,  $\mathcal{P}(n)$  est vraie.

Il se peut que la propriété  $\mathcal{P}(n)$  ne soit pas vraie pour quelques valeurs de  $n$  parmi les premières et ne commence à être vraie qu'à partir d'un certain rang  $n_0$  auquel cas on utilise le théorème suivant :

**Théorème.** On veut prouver qu'une certaine propriété  $\mathcal{P}(n)$ , dépendant d'un entier naturel  $n$ , est vraie pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à un certain entier naturel  $n_0$ .

Si

- $\mathcal{P}(n_0)$  est vraie,
- pour tout entier naturel  $n \geq n_0$ ,  $\mathcal{P}(n)$  vraie implique  $\mathcal{P}(n+1)$  vraie,

alors

pour tout entier naturel  $n \geq n_0$ ,  $\mathcal{P}(n)$  est vraie.

L'étape qui consiste à vérifier que  $\mathcal{P}(n_0)$  est vraie s'appelle l'**initialisation** et l'étape qui consiste à vérifier que pour tout  $n \geq n_0$ , si la propriété  $\mathcal{P}(n)$  est vraie alors la propriété  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie s'appelle l'**hérédité** ou encore cette étape consiste à vérifier que la propriété est **héréditaire**. L'hypothèse faite dans l'hérédité à savoir « si  $\mathcal{P}(n)$  est vraie » s'appelle l'**hypothèse de récurrence**.

**Exemple.** Reprenons l'exemple du paragraphe I et rédigeons complètement la démonstration par récurrence. On considère la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $u_0 = 1$  et pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = 2u_n + 1$ . On veut montrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = 2^{n+1} - 1$ .

### Solution.

Montrons par récurrence que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = 2^{n+1} - 1$ .

• Si  $n = 0$ ,  $u_0 = 1$  et  $2^{0+1} - 1 = 2 - 1 = 1$ . Donc,  $u_0 = 2^{0+1} - 1$ . La propriété à démontrer est vraie quand  $n = 0$ .

• Soit  $n \geq 0$ .

Supposons que  $u_n = 2^{n+1} - 1$  et montrons que  $u_{n+1} = 2^{(n+1)+1} - 1$ .

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 2u_n + 1 \\ &= 2 \times (2^{n+1} - 1) + 1 \\ &\quad \text{(par hypothèse de récurrence)} \\ &= 2^{(n+1)+1} - 2 + 1 \\ &= 2^{(n+1)+1} - 1. \end{aligned}$$

On a montré par récurrence que

$$\text{pour tout entier naturel } n, u_n = 2^{n+1} - 1.$$

### Description des étapes de la solution.

**Étape 1.** On écrit explicitement la propriété à démontrer sans oublier de préciser explicitement les valeurs de  $n$  pour lesquelles la propriété va être démontrée.

**Étape 2 (initialisation).** On vérifie que la propriété à démontrer est vraie pour la première valeur de  $n$  envisagée c'est-à-dire ici  $n = 0$ .

**Étape 3 (hérédité).** On se donne un entier naturel  $n$  fixé mais quelconque, supérieur ou égal à la valeur initiale c'est-à-dire ici 0 grâce à la phrase « Soit  $n \geq 0$  ». On décrit explicitement le travail à effectuer : on suppose la propriété vraie au rang  $n$  et sous cette hypothèse, on la démontre au rang suivant  $n+1$ . Puis on effectue ce travail.

**Étape 4 (conclusion).** On énonce de nouveau le résultat qu'on a maintenant démontré et on encadre ce résultat.

⚠ La rédaction « Soit  $n \geq 0$ . Supposons que ... et montrons que ... » ne peut en aucun cas être remplacée par la rédaction « Supposons que pour tout  $n \geq 0$  ... et montrons que ... ». Cette deuxième phrase n'a pas du tout la même signification. **Une démonstration par récurrence ne consiste pas à supposer ce que l'on veut montrer.**

**Exercice 1.** On considère la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par

$$u_0 = -1 \text{ et pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = 3u_n + 4$$

Montrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = 3^n - 2$ .

**Solution.** Montrons par récurrence que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = 3^n - 2$ .

- $u_0 = -1$  et  $3^0 - 2 = 1 - 2 = -1$ . Donc  $u_0 = 3^0 - 1$ . La formule à démontrer est vraie quand  $n = 0$ .
- Soit  $n \geq 0$ . Supposons que  $u_n = 3^n - 2$  et montrons que  $u_{n+1} = 3^{n+1} - 2$ .

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 3u_n + 4 = 3 \times (3^n - 2) + 4 \quad (\text{par hypothèse de récurrence}) \\ &= 3^{n+1} - 6 + 4 \\ &= 3^{n+1} - 2. \end{aligned}$$

On a montré par récurrence que

$$\text{pour tout entier naturel } n, u_n = 3^n - 2.$$

**Exercice 2.** Montrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n \geq 3$ ,  $2^n > n + 3$ .

**Solution.** Montrons par récurrence que pour tout entier naturel  $n \geq 3$ ,  $2^n > n + 3$ .

- $2^3 = 8$  et  $3 + 3 = 6$ . Donc  $2^3 > 3 + 3$ . L'inégalité à démontrer est vraie quand  $n = 3$ .
- Soit  $n \geq 3$ . Supposons que  $2^n > n + 3$  et montrons que  $2^{n+1} > (n + 1) + 3$ .

$$\begin{aligned} 2^{n+1} &= 2 \times 2^n \\ &> 2 \times (n + 3) \quad (\text{par hypothèse de récurrence}) \\ &= 2n + 6 = (n + 1) + 3 + n + 2 \\ &> (n + 1) + 3. \end{aligned}$$

On a montré par récurrence que

$$\text{pour tout entier naturel } n \geq 3, 2^n > n + 3.$$

**Exercice 3.** On considère la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par

$$u_0 = 1 \text{ et pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - 2$$

Montrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} \leq u_n$ .

**Solution.** Montrons par récurrence que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} \leq u_n$ .

- $u_0 = 1$  puis  $u_1 = \frac{1}{3}u_0 - 2 = \frac{1}{3} - 2 = -\frac{5}{3}$ . Donc  $u_1 \leq u_0$ . L'inégalité à démontrer est vraie quand  $n = 0$ .
- Soit  $n \geq 0$ . Supposons que  $u_{n+1} \leq u_n$  et montrons que  $u_{n+2} \leq u_{n+1}$ .

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= \frac{1}{3}u_{n+1} - 2 \\ &\leq \frac{1}{3}u_n - 2 \quad (\text{car } \frac{1}{3} \geq 0 \text{ et par hypothèse de récurrence}) \\ &= u_{n+1}. \end{aligned}$$

On a montré par récurrence que

$$\text{pour tout entier naturel } n, u_{n+1} \leq u_n.$$

Pour l'exercice suivant nous avons besoin de définir une notation. L'écriture  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$  signifie

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{(n-2)(n-1)} + \frac{1}{(n-1)n} + \frac{1}{n(n+1)}.$$

$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$  est une somme de  $n$  termes.  $k$  prend successivement les valeurs  $1, 2, \dots, n$  puis la fraction  $\frac{1}{k(k+1)}$  prend successivement les valeurs  $\frac{1}{1 \times 2}, \frac{1}{2 \times 3}, \dots, \frac{1}{n(n+1)}$  et enfin on additionne les  $n$  fractions ainsi obtenues. Donc,

$$\sum_{k=1}^1 \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1 \times 2}, \quad \sum_{k=1}^2 \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3}, \quad \sum_{k=1}^3 \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4}$$

Enfin, on passe de la somme à  $n$  termes à la somme à  $n+1$  termes en ajoutant le  $n+1$ -ème terme :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} &= \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{(n-2)(n-1)} + \frac{1}{(n-1)n} + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ &= \left( \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{(n-2)(n-1)} + \frac{1}{(n-1)n} + \frac{1}{n(n+1)} \right) + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ &= \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} \right) + \frac{1}{(n+1)(n+2)}. \end{aligned}$$

**Exercice 4.** Montrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul  $n$ ,  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$ .

**Solution.** Montrons par récurrence que pour tout entier naturel  $n$ ,  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$ .

- $\sum_{k=1}^1 \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1 \times (1+1)} = \frac{1}{2}$  et  $\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ . Donc  $\sum_{k=1}^1 \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1+1}$ . L'égalité à démontrer est vraie quand  $n=1$ .
- Soit  $n \geq 1$ . Supposons que  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$  et montrons que  $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n+1}{(n+1)+1}$ .

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} &= \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} \right) + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \quad (\text{par hypothèse de récurrence}) \\ &= \frac{n(n+2)}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2} \\ &= \frac{n+1}{(n+1)+1}. \end{aligned}$$

On a montré par récurrence que

pour tout entier naturel non nul  $n$ ,  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$ .