

ANGLES ORIENTES+TRIGONOMETRIE**LISTE DES COMPETENCES**

CODE	DENOMINATION
T101	
T102	
T103	
T104	
T105	
T106	
T107	
T108	
T109	
T110	
T111	
T112	
T113	
T114	
T115	
T116	
T117	
T118	
T119	
T120	
T121	
T123	
T124	

Exercice n°1

1. Placer sur le cercle trigonométrique les points correspondants à :

$$0 ; \frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{6} ; \frac{2\pi}{3} ; -\frac{\pi}{3} ; \frac{\pi}{2} ; -\pi ; 2\pi$$

2. Placer sur le cercle trigonométrique les points correspondants à :

$$-\frac{\pi}{6} ; \frac{3\pi}{4} ; 12\pi ; \frac{9\pi}{2} ; \frac{\pi}{12} ; -\frac{5\pi}{6} ; \frac{13\pi}{3} ; 15\pi$$

Exercice n°2

Déterminer les mesures principales des angles dont les mesures sont :

$$\frac{7\pi}{6} ; \frac{8\pi}{3} ; -\frac{3\pi}{2} ; \frac{15\pi}{8} ; -\frac{10\pi}{3} ; -\frac{83\pi}{4} ; \frac{131\pi}{6} ; 15\pi ; \frac{253\pi}{12} ; -\frac{60\pi}{11} ; 100\pi$$

Exercice n°3

Placer sur le cercle trigonométrique les points d'abscisse

- | | | | | |
|---------------------|----------------------|-----------------------|------------------------|-------------------------|
| 1) 0 | 6) $-\frac{\pi}{2}$ | 12) 15π | 17) $-\frac{9\pi}{4}$ | 21) $-\frac{121\pi}{2}$ |
| 2) $\frac{\pi}{4}$ | 7) $-\pi$ | 13) $-\frac{5\pi}{6}$ | 18) $\frac{23\pi}{6}$ | 22) 1620π |
| 3) $\frac{\pi}{6}$ | 8) 2π | 14) $\frac{13\pi}{3}$ | 19) $-\frac{17\pi}{3}$ | |
| 4) $\frac{2\pi}{3}$ | 9) $-\frac{\pi}{6}$ | 15) $\frac{4\pi}{3}$ | 20) $\frac{17\pi}{6}$ | |
| 5) $-\frac{\pi}{3}$ | 10) $\frac{3\pi}{4}$ | 16) -21π | | |
| | 11) 12π | | | |

Exercice n°4

Déterminer les mesures principales des angles dont les mesures sont :

- | | | | |
|---------------------|----------------------|-----------------------|------------------------|
| 1) $\frac{7\pi}{6}$ | 3) $-\frac{3\pi}{2}$ | 5) $-\frac{10\pi}{3}$ | 7) $\frac{131\pi}{6}$ |
| 2) $\frac{8\pi}{3}$ | 4) $\frac{15\pi}{8}$ | 6) $\frac{83\pi}{4}$ | 8) $\frac{253\pi}{12}$ |

Exercice n°5

Dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ placer les points M_1 , M_2 , M_3 et M_4 tels que :

- | | |
|---|--|
| 1) $OM_1 = 2$ et $(\vec{i}; \overrightarrow{OM_1}) = \frac{\pi}{4}$ | 3) $OM_3 = \frac{1}{2}$ et $(\vec{i}; \overrightarrow{OM_3}) = \frac{3\pi}{4}$ |
| 2) $OM_2 = 3$ et $(\vec{i}; \overrightarrow{OM_2}) = \frac{11\pi}{6}$ | 4) $OM_4 = \sqrt{2}$ et $(\vec{i}; \overrightarrow{OM_4}) = \frac{7\pi}{3}$ |

Exercice n°6

Soit ABCD un carré de centre O tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = +\frac{\pi}{2}$ (on dit que ABCD est un carré direct). Déterminer une mesure (en radians) de chacun des angles (aucune justification n'est demandée) :

- | | | | |
|---|---|---|---|
| 1) $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$ | 3) $(\overrightarrow{CO}; \overrightarrow{DA})$ | 5) $(\overrightarrow{DC}; \overrightarrow{DA})$ | 7) $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OC})$ |
| 2) $(\overrightarrow{BO}; \overrightarrow{BC})$ | 4) $(\overrightarrow{OC}; \overrightarrow{BC})$ | 6) $(\overrightarrow{DB}; \overrightarrow{AB})$ | 8) $(\overrightarrow{AO}; \overrightarrow{CB})$ |

Exercice n°7

Donner la valeur exacte des nombres suivants :

$$\begin{array}{ccc} \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) & \cos\frac{7\pi}{3} & \cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right) \\ \cos\frac{5\pi}{6} & \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) \end{array}$$

Exercice n°8

On considère deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} tels que $(\vec{u}; \vec{v}) = \frac{\pi}{3}[2\pi]$

Déterminer :

- 1) $(\vec{u}; -\vec{v})$ 2) $(-\vec{u}; \vec{v})$ 3) $(\vec{v}; -\vec{u})$ 4) $(-\vec{u}; -\vec{v})$

Exercice n°10

1°) Soit ABC un triangle. Démontrer que $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB}) = \pi[2\pi]$

2°) Soit ABC un triangle équilatéral tel que $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = -\frac{\pi}{3}[2\pi]$. Montrer qu'il n'est pas possible d'avoir

$$(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BA}) = +\frac{\pi}{3}[2\pi]. \text{ En déduire que } (\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BA}) = -\frac{\pi}{3}[2\pi]$$

Justifier de même que $(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB}) = -\frac{\pi}{3}[2\pi]$

3°) Soit ABC un triangle équilatéral tel que $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = -\frac{\pi}{3}[2\pi]$.

Soient A', B', C' les milieux respectifs de [BC]; [AC]; [AB].

Déterminer $(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AC'})$; $(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BA'})$; $(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB'})$; $(\overrightarrow{A'C}; \overrightarrow{C'A})$; $(\overrightarrow{B'A}; \overrightarrow{C'B})$ (on justifiera)

Exercice n°11

- 1) x est un réel tel que $0 \leq x \leq \pi$ et $\cos x = \frac{1}{3}$. Calculer la valeur de $\sin x$.
- 2) x est un réel tel que $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ et $\sin x = -\frac{1}{4}$. Calculer la valeur de $\cos x$.
- 3) x est un réel tel que $\pi \leq x \leq 2\pi$ et $\cos x = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Calculer la valeur de $\sin x$.
- 4) x est un réel tel que $0 \leq x \leq \pi$ et $\sin x = \sqrt{3}$. Calculer la valeur de $\cos x$.

Exercice n°12

Exprimer en fonction de $\cos x$ et $\sin x$:

- | | | | |
|---|--|---|---|
| 1) $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ | 5) $\sin\left(\frac{2\pi}{3} - x\right)$ | 9) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ | 13) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ |
| 2) $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ | 6) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ | 10) $\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ | 14) $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ |
| 3) $\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ | 7) $\cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)$ | 11) $\cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)$ | |
| 4) $\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$ | 8) $\sin(2x + \pi)$ | 12) $\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$ | |

Exercice n°13

Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes d'inconnue x puis placer sur le cercle trigonométrique les points images des solutions.

1) $2 \cos x - 1 = 0$

5) $\cos(2x) = \sin(3x)$

8) $2 \sin 2x - \sqrt{3} = 0$

2) $\sin^2 x = \frac{3}{4}$

6) $\cos(3x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

9) $\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

3) $\cos^2 x = \frac{1}{2}$

7) $\cos 2x = -\frac{1}{2}$

4) $\sin(2x) = \cos x$

Exercice n°14

On considère un réel α tel que $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$ et $\sin \alpha = \frac{1}{3}$

Calculer les valeurs exactes de $\cos \alpha$; $\sin 2\alpha$; $\cos 2\alpha$; $\sin 3\alpha$; $\cos 3\alpha$

Exercice n°15

Résoudre dans \mathbb{R} les équations et représenter les solutions sur un cercle trigonométrique.

1) $\sin x = \frac{1}{2}$

5) $\cos x = \cos \frac{\pi}{7}$

10) $\cos x \sin x = \frac{1}{4}$

2) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

6) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

11) $\cos 3x = \sin 2x$

3) $\cos x = -1$

7) $\cos x = -2$

12) $2 \sin^2 x - 1 = 0$

4) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

8) $2 \cos x + 1 = 0$

13) $\cos 2x + \cos x = 0$

9) $\sin 3x = 1$

14) $2 \cos^2 x + \cos x - 1 = 0$

15) $2 \sin^2 x - 3 \sin x - 2 = 0$

Exercice n°16

En utilisant les formules de duplication, déterminer les valeurs de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

Vérifier que $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ et $\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

Exercice n°17

a) Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $4x^2 - 2(1 + \sqrt{3})x + \sqrt{3} = 0$

b) En déduire la résolution dans $]-\pi; \pi]$ de $4 \cos^2(2x) - 2(1 + \sqrt{3}) \cos(2x) + \sqrt{3} = 0$.

Exercice n°18

1-) Calculer $A = (1 - \sqrt{3})^2$

2-) Résoudre dans \mathbb{R} l'équation (E) : $2x^2 - (1 + \sqrt{3})x + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$.

3-) En déduire dans $]-\pi; \pi]$ la résolution de l'équation : $2 \sin^2 x - (1 + \sqrt{3}) \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$.

Exercice n°19

On considère dans $[0; 2\pi]$ les équations:

$$(E) : \sin x \cos x + \cos^2 x = \cos 2x$$

$$(E') : \sin^2 x + \sin x \cos x = 0$$

1. (a) Montrer que les équations (E) et (E') sont équivalentes dans $[0; 2\pi]$
 (b) Résoudre dans $[0; 2\pi]$ l'équation (E).
2. Placer sur le cercle trigonométrique les points images des solutions de cette équation.
 On prendra 3cm comme unité de longueur.

Exercice n°20

- 1- a) vérifier que $\sqrt{3+2\sqrt{2}}=1+\sqrt{2}$.
 b-) Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $2x^2+(1-\sqrt{2})x-\frac{\sqrt{2}}{2}=0$.
 c-) En déduire les solutions de l'inéquation $2x^2+(1-\sqrt{2})x-\frac{\sqrt{2}}{2}>0$
- 2 a) Déduire de ce qui précède les solutions dans \mathbb{R} de l'équation : $2(\cos x)^2+(1-\sqrt{2})\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}=0$.
 b) Représenter les images des solutions de cette équation sur un cercle trigonométrique

Exercice n°21

- a) Développer $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$
- b) En déduire la résolution dans $]-\pi;\pi]$ de $\sqrt{2}\cos x-\sqrt{2}\sin x=1$
- c) En déduire la résolution dans $]-\pi;\pi]$ de $\sqrt{2}\cos 3x-\sqrt{2}\sin 3x=1$

Exercice n°22

- 1-Calculer $\frac{2}{3}+\frac{1}{4}$
- 2) Déterminer une valeur exacte de $\cos\left(\frac{11}{12}\pi\right)$
- 3) En déduire une valeur exacte de $\cos\left(\frac{11}{24}\pi\right)$

Exercice n°23

- 1) x étant un réel tel que $\cos x \neq 0$, montrer que $1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
- 2) Pour chacun des systèmes suivants, déterminer $\cos x$ et $\sin x$:
 - a) $\begin{cases} \tan x=2 \\ 0 < x < \frac{\pi}{2} \end{cases}$;
 - b) $\begin{cases} \tan x = -\frac{1}{3} \\ \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$;
 - c) $\begin{cases} \tan x = -3 \\ -\frac{\pi}{2} < x < 0 \end{cases}$;
 - d) $\begin{cases} \tan x = -\frac{\sqrt{3}+1}{2} \\ -\frac{\pi}{2} < x < 0 \end{cases}$

Exercice n°24

Soit x un réel quelconque. Réduire les expressions :

- | | |
|--|---|
| 1) $\cos 3x \cos 5x + \sin 3x \sin 5x$ | 6) $\cos^4 x + \sin^4 x + 2 \cos^2 x \sin^2 x$ |
| 2) $\cos x \cos 2x - \sin x \sin 2x$ | 7) $\sin^4 x - \cos^4 x + 2 \cos^2 x$ |
| 3) $\cos 7x \sin 6x - \sin 7x \cos 6x$ | 8) $\cos(5\pi + x) + \sin(5\pi - x) - \cos(7\pi + x)$ |
| 4) $\cos 3x \sin 2x + \cos 2x \sin 3x$ | 9) $\cos(\pi - x) + \cos(5\pi + x) + 2 \cos(-x)$ |
| 5) $(\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2$ | 10) |

Exercice n°25

Simplifier au maximum les expressions suivantes:

$$A(x) = \cos(x + \pi) \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sin x$$

$$C(x) = \sin^2\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \sin(\pi - x) \sin(-x)$$

$$B(x) = \tan(x + \pi) - \tan x \left(\text{pour } x \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[\right)$$

$$D(x) = \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$$

Exercice n°26

Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) \times \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \frac{3}{4} - \sin^2 x$$

Generalisation : $\sin(a + b) \sin(a - b) = \sin^2 a - \sin^2 b$

Exercice n°27

Soit x un réel qui n'est pas un multiple entier de $\frac{\pi}{2}$. Calculer l'expression $A = \frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x}$

Exercice n°28

$$A = \cos x + \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{4\pi}{3}\right)$$

$$B = \sin x + \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(x + \frac{4\pi}{3}\right)$$

Exercice n°29

Soit x un réel tel que $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$. Calculer $\cos 2x$

Exercice n°30

On note a le réel de l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\cos a = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$.

Calculer $\cos 2a$; en déduire la valeur de a .

Exercice n°31

Soit x un réel quelconque. Démontrer les égalités

- | | |
|--|--|
| 1) $1 + 2 \cos x + \cos 2x = 2 \cos x(1 + \cos x)$ | 5) $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$ |
| 2) $1 + \sin x - \cos 2x = 2 \sin x(1 + \sin x)$ | 6) $(\cos x + \sin x)^2 - (\cos x - \sin x)^2 = 4 \cos x \sin x$ |
| 3) $(\cos x - \sin x)^2 = 1 - \sin 2x$ | |
| 4) $4 \cos^2 x + 2 \sin^2 x = 3 + \cos 2x$ | |

Exercice n°32

Soit x un réel qui n'est pas un multiple entier de $\frac{\pi}{2}$.

1) Simplifier $\frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x}$

2) A l'aide du 1°), calculer $\tan \frac{\pi}{8}$ et $\tan \frac{\pi}{12}$

Exercice n°33

Donner une factorisation des expressions

$$A = 1 - \cos 2x + \sin x$$

$$B = 1 - \cos 2x + \sin 2x$$

Exercice n°34

Soit x un réel quelconque. Exprimer $\cos 4x$ en fonction de $\cos 2x$;

En déduire $\cos 4x$ en fonction de $\cos x$.

Exercice n°35

Soit x un réel quelconque.

En écrivant $3x = 2x + x$, exprimer $\cos 3x$ en fonction de $\cos x$ et $\sin 3x$ en fonction de $\sin x$.

Exercice n°36

Démontrer que la représentation graphique de la fonction f définie, sur \mathbb{R} , par:

$$f(x) = \cos(2x) + \sin x - 1 \text{ est située entre les droites d'équation } y = -3 \text{ et } y = 1.$$

Exercice n°37

Résoudre, dans \mathbb{R} , l'équation $2\sin^3 x - 17\sin^2 x + 7\sin x + 8 = 0$

Exercice n°38

Résoudre, dans $]-\pi; \pi[$, les équations:

$$2\cos^3 x - 7\cos^2 x + 3 = 0$$

$$2\sin^3 x + \cos^2 x - 5\sin x - 3 = 0$$

Exercice n°39

Dans cet exercice, on dispose de la donnée suivante : $\tan \frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$

1. Soit $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ Démontrer que : $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan x}$

2. En déduire que : $\tan \frac{5\pi}{12} = 2 + \sqrt{3}$

Exercice n°40

Dans cet exercice, on dispose de la donnée suivante : $\tan \frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$

On rappelle que $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ pour tout $x \in D$ où $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \right\}$

1. Démontrer que pour tout $x \in D$: $\tan(\pi + x) = \tan x$

En déduire la valeur exacte de $\tan \frac{9\pi}{8}$.

2. Démontrer que pour tout $x \in D$: $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

En déduire la valeur exacte de $\cos \frac{\pi}{8}$ puis de $\sin \frac{\pi}{8}$.

3. Calculer la valeur exacte de $\cos \frac{5\pi}{8}$.

Exercice n°41

1. Démontrer que, pour tout $x \in \left] 0; \frac{\pi}{2} \right[$: $\tan x = \frac{1 - \cos(2x)}{\sin(2x)}$.

2. En déduire les valeurs exactes de $\tan \frac{\pi}{8}$ et $\tan \frac{\pi}{12}$.

Exercice n°42

ABC est un triangle non rectangle.

1. Démontrer que : $\tan(A + B) = -\tan C$

2. À l'aide de la relation $\tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$ (que l'on pourra redémontrer au passage), prouver que : $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C$

Exercice n° 43

On considère l'expression $P(x) = \cos 4x - 5 \cos 2x - 6$ dans laquelle x est un nombre réel appartenant à l'intervalle $]-\pi, \pi]$.

1. Exprimer $P(x)$ en fonction de $\cos 2x$ seulement.

2. Résoudre alors dans $]-\pi, \pi]$, l'équation, $2 \cos^2 2x - 5 \cos 2x - 7 = 0$.
Placer les solutions sur le cercle trigonométrique

Exercice n° 44

1. (a) Résoudre dans \mathbb{R} l'équation (E_1) : $\cos 3x = \cos 2x$. Placer les points images des solutions sur le cercle trigonométrique.

(b) En déduire dans $[-\pi; 3\pi]$ les solutions de l'équation (E_1) .

2. (a) Exprimer $\cos 2x$ et $\cos 3x$ en fonction de $\cos x$.

(b) En posant $X = \cos x$, montrer que l'équation (E_1) devient (E_2) : $4X^3 - 2X^2 - 3X + 1 = 0$.

(c) Résoudre dans \mathbb{R} l'équation (E_2) .

(d) En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{6\pi}{5}$ et de $\sin \frac{6\pi}{5}$

Exercice n°45

1. Les réels $-\frac{117\pi}{5}$ et $\frac{533\pi}{5}$ repèrent-ils un même point sur le cercle trigonométrique ? Si oui, placer ce réel sur le cercle.
2. Déterminer les lignes trigonométriques des réels $\frac{65\pi}{6}$ et $-\frac{44\pi}{3}$.
3. Sachant que $\tan x = \frac{4}{3}$ et $x \in \left] \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right[$, déterminer les valeurs exactes de $\cos x$ et $\sin x$.
4. Soit x un réel différent de $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, montrer que

$$\left(1 + \tan x + \frac{1}{\cos x} \right) \left(1 + \tan x - \frac{1}{\cos x} \right) = 2 \tan x.$$
5. On considère deux vecteurs non nuls \vec{u} et \vec{v} tels que $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{3\pi}{4} [2\pi]$. Déterminer la mesure principale des angles : $(\vec{u}, -\vec{v})$, $(-\vec{v}, -\vec{u})$ et $(\alpha\vec{u}, \alpha\vec{v})$ où α est un réel non nul.
6. A-t-on $\frac{\pi}{3} = -\frac{29\pi}{3} [2\pi]$? Interpréter. Même question avec les réels : $-\frac{\pi}{6}$ et $\frac{85\pi}{6}$.
7. Placer sur le cercle trigonométrique les points M et N associés aux réels $-\frac{3\pi}{10}$ et $\frac{8\pi}{5}$.
8. C est le cercle trigonométrique de centre O et muni du point I de coordonnées $(1; 0)$
 - a. Déterminer la mesure principale des angles orientés de vecteurs de mesures respectives $\frac{673\pi}{9}$; $-\frac{74\pi}{5}$; -2006π et 2007π .
 - b. Placer ces points sur C .
9. Compléter les pointillés :

$\sin(-x) = \dots\dots$ $\cos(\pi + x) = \dots\dots$ $\sin(\pi - x) = \dots\dots$ $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \dots\dots$
 $\cos(a+b) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$
 $\sin(a-b) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$
 $\sin 2a = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$
 $\cos^2 a = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$ en fonction de $\cos 2a$

10. Compléter les cases blanches :

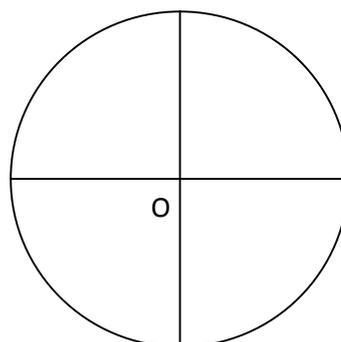
en radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$				
$\sin x$				

11. Déterminer les lignes trigonométriques du réel $\frac{5\pi}{3}$

Exercice n°46

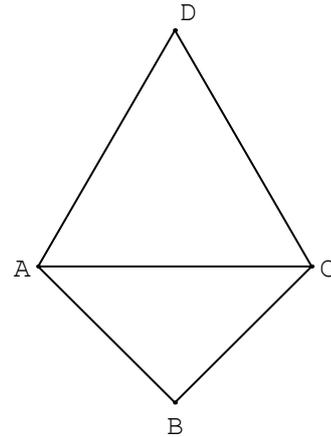
Placer sur le cercle trigonométrique suivant les points représentatifs des réels suivants :

$\frac{2\pi}{3}$; $-\frac{3\pi}{4}$; $\frac{17\pi}{6}$; $\frac{5\pi}{2}$



Exercice n°47

1. a. Énoncer la relation de Chasles avec les angles orientés de vecteurs.
b. Démontrer cette relation.
2. ACD est un triangle équilatéral direct. ABC et ADE sont des triangles rectangles isocèles directs en B et E .
a. Compléter la figure. Le but de cet exercice est de démontrer que les droites (CD) et (BE) sont parallèles.
b. En utilisant la relation de Chasles, déterminer une mesure des angles $\left(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CB}\right)$ et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}\right)$.
c. Justifier que le triangle ABE est isocèle puis en déduire la mesure de \widehat{EBA} .
d. En déduire la mesure principale de l'angle $\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BE}\right)$.
e. Déterminer alors une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{BE}\right)$ puis conclure.



Exercice n°48

La valeur exacte de $\cos \frac{\pi}{5}$ est $\frac{1 + \sqrt{5}}{4}$.

1. a. Calculer la valeur exacte de $\sin \frac{\pi}{5}$.
b. En déduire : $\cos \frac{\pi}{10}$ et $\cos \frac{2\pi}{5}$.
2. a. Soit a et b deux réels. Vérifier que $a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2(ab)^2$.
b. En déduire que $\cos^4 x + \sin^4 x = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4x$.
c. En déduire la valeur exacte de $\cos^4 \left(\frac{\pi}{12}\right) + \sin^4 \left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice n°49

Pour chacune des équations, on fera la résolution dans \mathbb{R} , puis on donnera les solutions appartenant à l'intervalle $[0 ; 2\pi]$.

1°) $\sin 4x = \cos 2x$

2°) $4 \cos^2 x + 2(\sqrt{2} - 1) \cos x - \sqrt{2} = 0$

Exercice n°50

On donne $\left(\vec{u}; \vec{v}\right) = \frac{\pi}{3}$ et f .

Calculer la mesure principale de chacun des angles :

$\left(\vec{w}; \vec{v}\right) =$

$\left(-\vec{w}; \vec{v}\right) =$

$\left(-\vec{w}; -\vec{v}\right) =$

Exercice n°51

Démontrer les égalités suivantes :

1) $\sin \frac{\pi}{12} - \sin \frac{5\pi}{12} + \sin \frac{7\pi}{12} - \sin \frac{11\pi}{12} = 0$

2) $\sin^2 \frac{\pi}{12} + \sin^2 \frac{5\pi}{12} + \sin^2 \frac{7\pi}{12} + \sin^2 \frac{11\pi}{12} = 2$

Exercice n°52

Les quatre questions de cet exercice sont indépendantes.

Pour chaque question, il y a au moins une bonne réponse. Le candidat doit cocher sur cette feuille les bonnes réponses. **Aucune justification n'est demandée.**

Chaque réponse exacte rapporte 0,5 point, chaque réponse fausse enlève 0,25 point.

Si par application de ce barème, le total des points est négatif, la note à cet exercice est ramené à zéro.

Question 1

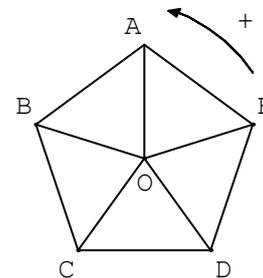
On note α une mesure de l'angle et θ sa mesure principale.

- $\alpha = -\frac{33\pi}{4}$ et $\theta = \frac{\pi}{4}$
- $\alpha = \frac{32\pi}{3}$ et $\theta = \frac{2\pi}{3}$
- $\alpha = \frac{86\pi}{7}$ et $\theta = -\frac{5\pi}{7}$
- $\alpha = -\frac{141\pi}{11}$ et $\theta = -\frac{9\pi}{11}$

Question 2

$ABCDE$ est un pentagone régulier.

- $\left(\overrightarrow{AE} ; \overrightarrow{DE} \right) = \frac{3\pi}{5} [2\pi]$
- $\left(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{OA} \right) = \frac{3\pi}{10} [2\pi]$
- $\left(\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OD} \right) = \frac{6\pi}{5} [2\pi]$
- $\left(\overrightarrow{AO} ; \overrightarrow{AE} \right) = \frac{2\pi}{5} [2\pi]$



Question 3

On sait que $y \in \left] \frac{\pi}{2} ; \pi \right[$ et $\sin y = \frac{2}{3}$.

- $\sin(y - \pi) = \frac{2}{3}$
- $\cos^2 y = \frac{5}{9}$
- $\cos(2\pi - y) = -\frac{\sqrt{5}}{3}$
- $\cos\left(y - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{2}{3}$

Question 4

Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormal. Dans le repère polaire $(O; \vec{i})$, les points A et B ont respectivement pour coordonnées polaires $\left(2; \frac{\pi}{6} \right)$ et $\left(\frac{1}{2}; \frac{2\pi}{3} \right)$.

- $\left(\overrightarrow{OB} ; \overrightarrow{OA} \right) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$
- $\left(\overrightarrow{OB} ; \overrightarrow{OA} \right) = -\frac{\pi}{2} [2\pi]$
- $AB = \frac{\sqrt{17}}{2}$
- $AB = 2$

Exercice n°53

Rappeler les expressions de $\cos 2a$ et $\sin 2a$ en fonction de $\cos a$ et $\sin a$.

1. Démontrer que $\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a$.
2. Résoudre dans $[0 ; 2\pi[$ l'équation trigonométrique (E) : $\cos 3x = \cos 2x$.
3. En posant $X = \cos x$, montrer que l'on obtient une équation du 3^è degré d'inconnue X puis résoudre cette équation.
4. Dédire des questions précédentes les valeurs exactes de : $\cos \frac{2\pi}{5}$; $\cos \frac{4\pi}{5}$ puis de $\sin \frac{2\pi}{5}$;

$\sin \frac{4\pi}{5}$

Exercice n°54

En utilisant les angles associées, exprimer les expressions suivantes en fonction de $\cos x$ et $\sin x$:

1. $A = \cos(x - \pi) - \sin(\pi - x) + \cos(\pi + x) - \sin(-x)$
2. $B = \sin x + \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \cos x - \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$
3. $C(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin(x - \pi) + \sin(\pi + x)$
4. $D(x) = \cos\left(\frac{5\pi}{2} - x\right) + \sin\left(\frac{9\pi}{2} - x\right) + \sin(x + 19\pi)$

Calculer les expressions suivantes en utilisant les angles associées :

5. $E = \sin \frac{3\pi}{8} + \sin \frac{5\pi}{8} + \sin \frac{11\pi}{8} + \sin \frac{13\pi}{8}$
6. $F = \cos \frac{\pi}{10} + \cos \frac{2\pi}{10} + \cos \frac{3\pi}{10} + \cos \frac{9\pi}{10}$
7. $G = \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) + \cos\left(\frac{7\pi}{8}\right) + \cos\left(\frac{11\pi}{8}\right)$

Exercice n°55

Pour chacune des équations on fera la résolution dans \mathbb{R} et on donnera la solution dans $[0; 2\pi]$

- 1) $2 \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - 1 = 0$
- 2) $2 \cos 2x - \sqrt{3} = 0$

Exercice n°56

Résoudre les équations et les inéquations suivantes :

- 1) Sur $[0; 3\pi[$: $\cos x = \frac{1}{2}$
- 2) Sur $[0; 4\pi[$: $\cos x = \cos \frac{2\pi}{3}$
- 3) Sur $]-\pi; \pi]$: $6 - 12 \cos x > 0$
- 4) Sur $]-\pi; \pi]$: $2 \sin^2 x - \sin x - 1 = 0$
- 5) Sur $]-\pi; \pi]$: $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
- 6) Sur $[0; 2\pi[$: $\cos^2 x = \frac{3}{4}$
- 7) Sur $]-\pi; 2\pi]$: $\sin x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$
- 8) Sur $]-\pi; \pi]$: $\sin 2x = \sin \frac{\pi}{4}$

Exercice n°57

Donner la valeur exacte des expressions suivantes :

$$\sqrt{2} \sin \frac{\pi}{4} + \sqrt{3} \cos \frac{\pi}{6} =$$

$$\sin \frac{\pi}{6} - \cos \frac{\pi}{2} =$$

Exercice n°58

Exprimer en fonction de $\cos x$ ou de $\sin x$ les nombres suivants :

- 1) $\cos(\pi + x)$
- 2) $\sin(-x)$
- 3) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$
- 4) $\cos(-x)$
- 5) $\sin(\pi - x)$
- 6) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$

Exercice n°59

Soit un point A de coordonnées polaires $\left(3; \frac{2\pi}{3}\right)$ dans un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}; \vec{j})$. Donner ses coordonnées cartésiennes.

Exercice n°60

1. Résoudre dans $]-\pi; \pi]$: $\cos 2x = \frac{1}{2}$
2. Résoudre dans \mathbb{R} : $2\cos^2 x - \cos x = 0$

Exercice n°61

Soit P la fonction polynôme définie par : $P(x) = 4x^3 - 3x - 1$.

- (a) Calculer $P(1)$ et conclure.
 - (b) Déterminer les réels a , b et c tels que : $P(x) = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$
 - (c) Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $P(x) = 0$
 - (d) En déduire dans $]-\pi; \pi]$ les solutions de l'équation (E) : $4\cos^3 2x - 3\cos 2x - 1 = 0$.
1. Placer les images des solutions de (E) sur un cercle trigonométrique.
Soit x un réel tel que $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ et $x \neq -\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
 - (a) Démontrer que $\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$.
 - (b) En déduire la valeur exacte de $\tan \frac{\pi}{8}$.
 2. r et θ sont deux réels tels que $r > 0$ et $\theta \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$.
 - (a) Déterminer les réels r et θ tels que : $\sqrt{3} \cos x - \sin x = r \cos(x + \theta)$.
 - (b) En déduire dans \mathbb{R} les solutions de l'équation $\sqrt{3} \cos x - \sin x = -\sqrt{2}$.

Exercice n°62

1) Calculer : $A = \cos \frac{3\pi}{8} \sin \frac{\pi}{8} + \cos \frac{25\pi}{8} \sin \frac{11\pi}{8}$

Exercice n°63

- a) Résoudre dans $]-\pi; \pi]$, l'équation suivante : $\cos 4x = \sin \left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$
- b) Résoudre dans $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ l'inéquation suivante : $\cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$

Exercice n°64

Résoudre les équations ci-dessous et placer leurs solutions sur un cercle trigonométrique.

$$\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} ; \quad \cos(2x) = \cos(\pi + 3x) ; \quad \sin 3x = \cos(x + \pi) ; \quad \sin^2 x = \frac{1}{4}$$

Exercice n°65

Donner les valeurs exactes de

$$A = \frac{\cos\left(-\frac{11\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{23\pi}{4}\right)}{\sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{17\pi}{6}\right)}$$

Exercice n°66

(O, \vec{i} , \vec{j}) est un repère orthonormal direct.

1) Donnez les coordonnées cartésiennes des points de coordonnées polaires suivantes :

A (2 ; $\frac{5\pi}{6}$); B ($\sqrt{2}$; $\frac{\pi}{4}$) et C (1 ; $-\frac{\pi}{2}$).

2) Donnez les coordonnées polaires des points de coordonnées cartésiennes suivantes :

E ($-\frac{1}{2}$; $-\frac{\sqrt{3}}{2}$) ; et F ($\sqrt{2}$; $-\sqrt{2}$).

Exercice n°67

a. Montrer que pour tout réel x , $2 \cos\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos(3x) - \sqrt{3} \sin(3x)$

b. Résoudre l'équation $\cos(3x) - \sqrt{3} \sin(3x) = -1$. Représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

Exercice n°68

On considère l'équation (E_1) : $2 \cos(4x) - 1 = 0$.

1. a. Résoudre cette équation dans \mathbb{R} , puis dans l'intervalle $]-\pi ; \pi]$.

b. Facultatif : représenter les solutions sur un cercle trigonométrique. Unité graphique : 4 cm.

2. a. Vérifier que pour tout réel x , $\cos 4x = 8 \cos^4 x - 8 \cos^2 x + 1$.

b. En déduire que l'équation (E_1) est équivalente à (E_2) : $16 \cos^4 x - 16 \cos^2 x + 1 = 0$ et donner les solutions de (E_2) dans l'intervalle $]-\pi ; \pi]$.

3. a. Montrer que l'équation (E_2) est équivalente au système $\begin{cases} X = \cos x \\ 16 X^4 - 16 X^2 + 1 = 0 \end{cases}$.

b. Résoudre l'équation (E_3) : $16 X^4 - 16 X^2 + 1 = 0$.

c. En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{12}$, $\cos \frac{5\pi}{12}$, $\cos \frac{7\pi}{12}$ et $\cos \frac{11\pi}{12}$.

Exercice n°69

Résoudre dans \mathbb{R} chacune des équations suivantes :

1) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

2) $1 + 2 \sin x = 0$

3) $\sin x = -2$

4) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

5) $\sin 3x = \frac{1}{2}$

6) $\sin 5x + \sin x = 0$

7) $2 \cos^2 x + 7 \cos x + 3 = 0$

8) $\sqrt{3} \cos x + \sin 2x = 0$

9) $\frac{1}{2} \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x = 1$

10) $\cos x = 0,4$

11) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

12) $\cos x = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

13) $\cos x = 0,5322$

14) $\cos x = -0,3135$

15) $\cos 3x = \frac{1}{2}$

16) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \tan \frac{\pi}{3}$

17) $\cos\left(5x - \frac{\pi}{3}\right) x = \cos \frac{\pi}{6}$

18) $\cos\left(\frac{\pi}{6} - 3t\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

19) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + \cos x = -3$

20) $2 \cos^2 x - 1 = 0$

21) $2 \cos^2 2t - 5 \cos 2t + 2 = 0$

22) $\cos x - \frac{1}{\cos x} = \frac{3}{2}$

23) $3,125 \cos^2 x + 2,514 \cos x - 2,4 = 0$

- 24) $2\cos^3 x + \cos^2 x - 2\cos x - 1 = 0$
 25) $6\cos^2\left(5x - \frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(5x - \frac{\pi}{3}\right) - 2 = 0$
 26) $4\cos^2 x - 2(\sqrt{2} + 1)\cos x + \sqrt{2} = 0$
 27) $4\cos^4 x - 17\cos^2 x + 4 = 0$
 28) $\sin^2 \theta + \frac{3}{2}\cos \theta = 0$
 29) $\sin x = \frac{1}{2}$
 30) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
 31) $\sin x \sin 3x = 0$
 32) $2\sin x + \sqrt{3} = 0$
 33) $\sin x = 0,7437$
 34) $\sin x = -0,4319$
 35) $\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$
 36) $\sin\left(\frac{2}{3}x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}$
 37) $\left|\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)\right| = \sin \frac{2\pi}{3}$
 38) $\sin 4x = -\sin \frac{\pi}{3}$
 39) $\sin\left(5x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin 2x = 2$
 40) $\sin^2 x = \frac{3}{4}$
 41) $4\sin^2 x - 1 = 0$
 42) $4\sin^2 x - 4\sin x + 1 = (2\sin x - 1)\left(\sin x - \frac{3}{2}\right)$
 43) $6\sin^2 3t - 5\sin 3t + 1 = 0$
 44) $-2\sin^2 x + 19|\sin x| + 10 = 0$
 45) $4\sin^2 x - 2(\sqrt{3} - \sqrt{2})\sin x - \sqrt{6} = 0$
 46) $\sin^3 x - \sin^2 x - 2\sin x = 0$
 47) $2\sin^3 2\theta + 7\sin^2 2\theta + 2\sin 2\theta - 3 = 0, \theta \in [-\pi, \pi]$
 48) $24\sin^3 x - 26\sin^2 x + 2 = 0$
 49) $-3\cos^2 x + 2\sin x - 2 = 0$
 50) $50\cos^2 x + 35\sin x - 56 = 0$
 51) $2\sin^4 x + \sin^2 x - 1 = 0$
 52) $15\sin^4 \frac{t}{2} - 14\sin^2 \frac{t}{2} + 3 = 0, \cos t > 0$
 53) $(2\cos x + 1)^2 - 4\cos^2 x + \sin x(2\cos x + 1) = -1$
 54) $\sin 2x + \sqrt{3}\sin x = 0$
 55) $\sin 2x - \sqrt{2}\cos x = 0$
 56) $\cos 2x = 4 - 3\cos x$
 57) $\cos 2x = 3\cos x - 2$
 58) $3 - 4\cos 2x + \cos 4x = 8\sin^2 x$
 59) $4\sin 3x - 3\sin x - \cos x = 0$
 60) $\sin x + \cos x = 1$
 61) $\sqrt{3}\cos x + \sin x = -\sqrt{2}$
 62) $\cos x + \sqrt{3}\sin x = -1$
 63) $\cos x - \sin x = -1$
 64) $\sqrt{3}\cos t - \sin t = -\sqrt{3}$
 65) $\cos 3\theta - \sin 3\theta = 1$
 66) $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{2}$
 67) $\sin 2x - \sqrt{3}\cos 2x = \sqrt{2}$
 68) $\cos\left(3t + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(3t + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{6}}{2}$
 69) $\cos 2\theta - \sqrt{3}\sin 2\theta + \sqrt{6} = 0$
 70) $2\cos x + 3\sin x = 6$
 71) $\cos x < \frac{1}{2}, x \in [0, \pi], x \in [-\pi, \pi]$
 72) $\sin x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}, x \in [-3\pi, 2\pi], x \in \left[-\frac{7\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right]$
 73) $\tan x > 1, x \in [0, 2\pi], x \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right]$
 74) $2\cos x + \sqrt{3} \geq 0$
 75) $\sqrt{3}\tan t + 1 < 0$
 76) $2\sin x - \sqrt{3} \geq 0$
 77) $2\sin x - \sqrt{3} \geq 0$ et $\cos x \geq 0$
 78) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) < \frac{\sqrt{3}}{2}, x \in [0, 2\pi], x \in [-\pi, \pi]$
 79) $2\sin 3x - \sqrt{2} \leq 0, x \in [-\pi, \pi], x \in [7\pi, 9\pi]$
 80) $2\cos^2 x - 3\cos x - 2 > 0, x \in [0^\circ, 720^\circ]$
 81) $-2\sin^2 \theta + 7\sin \theta + 4 < 0, \theta \in [-\pi, 4\pi]$
 82) $4\cos^2 x - 3 \leq 0$
 83) $-\cos^2 t - \cos t + 6 > 0$
 84) $\sqrt{2}\cos^2 x + \cos x - \sqrt{2} < 0, x \in [0, 2\pi], x \in [-2\pi, \pi]$
 85) $2\sin^3 x - \sin^2 x + 3\sin x - \frac{3}{2} \geq 0$
 86) $4\cos^2 x - 2(\sqrt{2} + 1)\cos x + \sqrt{2} \geq 0, x \in [-\pi, 2\pi]$
 87) $\tan^2 x - \sqrt{2}\tan x + 2\sqrt{3} - 2 \leq 0, x \in [-\pi, \pi]$
 88) $\tan^2 x - 2\tan x + \sqrt{2} - 1 < 0, x \in [0, \pi], x \in [-5\pi, -3\pi]$

Exercice n°70

1. Développer $(\sin^2 x + \cos^2 x)^3$ et montrer l'identité : $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{1}{8}(5 + 3 \cos 4x)$

2. Dédire de la question précédente la résolution de l'équation $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{13}{16}$

Exercice n°71

On donne $\cos x = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$. Calculer $\cos 2x$ et en déduire la résolution de l'équation $\cos x = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

Exercice n°72

On donne $\cos x = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$. Calculer $\cos 2x$, puis $\cos 4x$. Comparer $\cos 4x$ et $\cos x$. En déduire une équation permettant de déterminer x .

Exercice n°73

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \sin 3x - \sqrt{3} \cos 3x$.

1. Montrer que $f(x)$ peut se mettre sous la forme $f(x) = k \sin(ax + b)$, où les constantes k , a et b sont à déterminer.

2. Résoudre alors l'équation $f(x) = 1$, puis l'équation $f(x) = -\sqrt{2}$

Exercice n°74

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \sin \frac{x}{2} + \sqrt{3} \sin \frac{x}{2}$.

1. Montrer que $f(x)$ peut se mettre sous la forme $f(x) = k \sin(ax + b)$, où les constantes k , a et b sont à déterminer.

2. Résoudre alors l'équation $f(x) = -2$, puis l'équation $f(x) = -\sqrt{3}$

Exercice n°75

1. Montrer que quel que soit le réel x : $\cos\left(2x - \frac{4\pi}{3}\right) + \cos 2x + \cos\left(2x + \frac{4\pi}{3}\right) = 0$

2. Exprimez $\sin^2 a$ en fonction de $\cos 2a$ et en déduire que quel que soit le réel x , $\sin^2\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) + \sin^2 x + \sin^2\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)$ est constant. Déterminer cette constante.

Exercice n°76

I) Le plan est muni du repère orthonormé direct $(O; \vec{i}; \vec{j})$. On considère les points $A\left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$; $B\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{smallmatrix}\right)$ et

$C\left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 2\sqrt{3} \end{smallmatrix}\right)$ 1°) a) Calculer $\cos(\vec{AB}; \vec{AC})$ et $\sin(\vec{AB}; \vec{AC})$.

b) En déduire la mesure principale de l'angle orienté $(\vec{AB}; \vec{AC})$.

2°) Quelle est la nature du triangle ABC ?

II) Soit (C) le cercle de centre O et rayon $\sqrt{3}$, (C') le cercle de centre O'(0 ; 2) et de rayon 1.

1°) Justifier que les cercles (C) et (C') sont sécants en deux points E et F. Trouver les coordonnées des points E et F.

2°) Démontrer qu'aux points E et F, les tangentes à (C) et (C') sont perpendiculaires.

3°) Déterminer une équation normale, de chacune des tangentes à (C) et (C').

III) Démontrer que pour tous réels a, b ; on a : $\sin(a + b)\sin(a - b) = \sin^2 a - \sin^2 b$.

IV) 1°) Résoudre dans $[0 ; 2\pi[$, l'équation : $\tan^2(3x) - (\sqrt{3} - 1)\tan(3x) - \sqrt{3} = 0$.

2°) Placer les points images des solutions sur le cercle trigonométrique.

Exercice n°77

Soit x un nombre réel. On donne : $A(x) = 6\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x \cos x - 3$.

- 1) a) Montrer que pour tout réel x , on a : $A(x) = 3\cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x$.
 b) Montrer que pour tout réel x , on a $A(x) = 2\sqrt{3}\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$.
- 2) a) Résoudre dans l'intervalle $]-\pi; \pi]$, l'équation (E) : $A(x) + \sqrt{3} = 0$.
 b) Représenter sur le cercle trigonométrique, les images les solution de (E).

Exercice n°78

3. Soit P la fonction polynôme définie par : $P(x) = 4x^3 - 3x - 1$.
 (a) Calculer $P(1)$ et conclure.
 (b) Déterminer les réels a , b et c tels que : $P(x) = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$
 (c) Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $P(x) = 0$.
 (d) En déduire dans $]-\pi; \pi]$ les solutions de l'équation (E) : $4\cos^3 2x - 3\cos 2x - 1 = 0$.
 (e) Placer les images des solutions de (E) sur un cercle trigonométrique.
4. Soit x un réel tel que $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ et $x \neq -\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
 (a) Démontrer que $\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$.
 (b) En déduire la valeur exacte de $\tan \frac{\pi}{8}$.
5. r et θ sont deux réels tels que $r > 0$ et $\theta \in]0; \frac{\pi}{2}[$.
 (a) Déterminer les réels r et θ tels que : $\sqrt{3}\cos x - \sin x = r \cos(x + \theta)$.
 (b) En déduire dans \mathbb{R} les solutions de l'équation $\sqrt{3}\cos x - \sin x = -\sqrt{2}$.

Exercice n°79

1. On veut résoudre dans \mathbb{R} l'équation $(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = \frac{3}{4}$
 (a) Montrer que pour tous réels a et b , $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$
 (b) Exprimer $\sin 2x$ en fonction de $\sin x$ et de $\cos x$.
 (c) En déduire que : $(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x$
 (d) Résoudre dans \mathbb{R} l'équation (E).
 (e) Placer les points images des solutions de (E) sur un cercle trigonométrique.
2. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation (E') : $\sin 2x - \sqrt{2}\sin x = 0$.

Exercice n°80

1. Sachant que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, calculer les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$
2. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation (E) : $(\sqrt{3} - 1)\cos 2x + (\sqrt{3} + 1)\sin 2x = 2$.
3. Placer les points images des solutions de (E) sur un cercle trigonométrique.
4. Quelle est la nature du polygone obtenu ? Calculer son aire.

Exercice n°103

On considère l'équation $8x^4 - 8x^2 - m + 1 = 0$ (E_m) où m est un paramètre réel.

1. Résoudre (E_m) On discutera suivant les valeurs de m .
2. Donner les solutions de (E_m) pour $m = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
3. Démontrer que $\cos 4x = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$.
4. Déduire l'expression exacte de $\cos \frac{\pi}{16}$ puis celle de $\sin \frac{\pi}{16}$.

Exercice n°81

A .

1. Montrer que $\frac{1}{1 + \tan^2 x} = \cos^2 x$.

2. Montrer que $(1 + \sqrt{2})^2 = 3 + 2\sqrt{2}$

3. Soit (E) l'équation $\frac{2}{1 + \tan^2 x} + (1 - \sqrt{2})\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$

Résoudre (E) et placer les solutions sur le cercle trigonométrique.

4. En déduire dans $[0; 2\pi]$ la solution de l'inéquation $\frac{2}{1 + \tan^2 x} + (1 - \sqrt{2})\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$

B . On considère l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{3} \cos 2x - \sin 2x$

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} f(x) = 2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$

2. Résoudre dans $[-\pi; \pi]$ l'équation $f(x) - 1 = 0$

Exercice n°82

Soit A et B deux points fixés du plan. Déterminer le lieu géométrique des points M vérifiant les relations suivantes : faire une représentation d'une telle situation en précisant les emplacements possibles du point M .

1) $(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) = \pi + 2k\pi$

3) $(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$

5) $(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) = \pi + k\pi$

2) $(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) = 0 + 2k\pi$

4) $(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) = -\frac{\pi}{2} + k\pi$

Exercice n°83

Compléter le tableau ci-dessous :

k	-2	-1	0	1	2
$\frac{\pi}{3} + k\pi$					

Sur un des cercles trigonométrique ci-dessous, représenter l'ensemble des points M vérifiant la relation :

$(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OM}) = \frac{\pi}{3} + k\pi$ où k appartient à \mathbb{Z}

Exercice n°84

Dans chaque cas, représenter l'ensemble des points M vérifiant la relation précisée :

1) $(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OM}) = \frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{3}$

2) $(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OM}) = -\frac{2\pi}{3} + k\pi$

Exercice n°85

1. Démontrer que pour tout nombre réel $a : \cos 5a = 16\cos^5 a - 20\cos^3 a + 5\cos a$

2. Vérifier que pour tout nombre réel $x : 16x^5 - 20x^3 + 5x + 1 = (x+1)(4x^2 - 2x - 1)^2$

3. On pose $t = \cos \frac{\pi}{5}$.

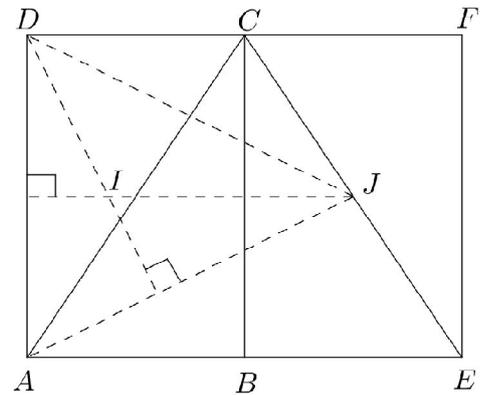
Démontrer que le nombre réel t est solution de l'équation $4x^2 - 2x - 1 = 0$, puis que $t = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$

4. En déduire $\sin \frac{\pi}{5}, \cos \frac{2\pi}{5}, \sin \frac{2\pi}{5}, \cos \frac{\pi}{10}, \sin \frac{\pi}{10}$

Exercice n°86

On considère un triangle AEC inscrit dans le rectangle AEF D. A l'intérieur du rectangle, on trace le triangle équilatéral DAJ ; on note I son centre.

Attention, la figure ci-dessous n'a pas été tracée correctement ; le but de l'exercice est de montrer que les points I et J appartiennent respectivement aux segments [AC] et [BC].



On utilisera la propriété suivante : $(\vec{u}; \vec{v}) = (\vec{u}; \vec{w})$ alors \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires et de même sens.

1.
 - a. Justifier que $(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{6}$
 - b. Justifier que l'angle au centre $(\overrightarrow{IA}; \overrightarrow{ID})$ mesure $\frac{2\pi}{3}$
 - c. En déduire que les vecteurs \overrightarrow{AI} et \overrightarrow{AC} sont colinéaires.
2.
 - a. Justifier que le triangle DCJ est isocèle en J.
 - b. En déduire la mesure de l'angle $(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CJ})$
 - c. En déduire que les points J, E, C sont alignés.

Exercice 87

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On considère les points : A(4 ; 0) et B(-2√2; 2√2).

- 1) Faire un graphique que l'on complètera au cours de l'exercice.
- 2) Déterminer les coordonnées polaires du point B. Que peut-on en déduire pour le triangle BOA ?
- 3) Calculer les coordonnées cartésiennes du point I milieu de [AB].
- 4) Calculer la longueur OI et une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OI})$. En déduire les coordonnées polaires de I.
- 5) Déduire des questions précédentes que : $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ et $\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

On admettra que $\frac{2-\sqrt{2}}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ et $\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

- 1) a) calculer $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$
- b) Déterminer les lignes trigonométriques de $\frac{\pi}{8}$

Exercice n°88

1. D'une des formules de linéarisation, déduisez que $\cos^4 x = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos(2x) + \frac{1}{8} \cos(4x)$
2. Calculer alors $\cos^4\left(\frac{\pi}{8}\right) + \cos^4\left(\frac{3\pi}{8}\right) + \cos^4\left(\frac{5\pi}{8}\right) + \cos^4\left(\frac{7\pi}{8}\right)$

Exercice n°89

Montrer que pour tout réel x d'un ensemble que l'on précisera :

$$1. \frac{\sin(2x)}{\sin x} - \frac{\cos(2x)}{\cos x} = \frac{1}{\cos x}$$

$$2. \frac{\sin(2x)}{\cos x} + \frac{\cos(2x)}{\sin x} = \frac{1}{\sin x}$$

$$3. \frac{\sin(3x)}{\sin x} - \frac{\cos(3x)}{\cos x} = 2$$

Exercice n°90

1. En remarquant que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, déterminer les valeurs exactes de $\sin \frac{\pi}{12}$ et $\cos \frac{\pi}{12}$

2. En déduire la résolution de l'équation $(\sqrt{3}-1)\cos 3x + (\sqrt{3}+1)\sin 3x = 2$

Exercice n°91

1. Déterminer les valeurs exactes de $\cos 75^\circ$, $\sin 75^\circ$, $\tan 75^\circ$

2. En déduire la résolution de l'équation $(\sqrt{3}-1)\cos x + (\sqrt{3}+1)\sin x + \sqrt{6} = 0$

Exercice n°92

$$\text{On donne } \cos x = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

1. Calculer $\cos 2x$, puis $\cos 4x$

2. Comparer $\cos 4x$ et $\cos 4x$

3. En déduire une équation permettant de déterminer x .

Exercice n°93

Résoudre dans \mathbb{R} l'équation :

$$2\sin^3 x - 17\sin^2 x + 7\sin x + 8 = 0$$

Exercice n°94

Résoudre dans $]-\pi; \pi[$ les équations suivantes :

$$2\cos^3 x - 7\cos^2 x + 2\cos x + 3 = 0$$

$$2\sin^3 x + \cos^2 x - 5\sin x - 3 = 0$$

Exercice n°95

1. (a) Résoudre dans \mathbb{R} l'équation d'inconnue x : $2\cos 3x - 1 = 0$

(b) Déterminer les mesures principales des solutions

(c) Représenter les images des solutions sur un cercle trigonométrique! unité graphique 4 cm

2. Exprimer $\cos 3x$ en fonction de $\cos x$

3. Soit le polynôme $f(x) = 8x^3 - 6x^2 - 1$.

Démontrer que les racine de $f(x)$ sont les nombres : $\cos \frac{\pi}{9}$, $\cos \frac{5\pi}{9}$, $\cos \frac{7\pi}{9}$

Exercice n°96

1.

(a) Résoudre dans \mathbb{R} l'équation d'inconnue x : $2 \cos 4x - 1 = 0$

(b) Déterminer les mesures principales des solutions

(c) Représenter les images des solutions sur un cercle trigonométrique! unité graphique 4 cm

2. Exprimer $\cos 4x$ en fonction de $\cos x$ 3. Soit le polynôme $f(x) = 16x^4 - 16x^2 + 1$ (a) Déterminer les racines de $f(x)$ (b) Démontrer que les racine de $f(x)$ sont les nombres : $\cos \frac{\pi}{12}$, $\cos \frac{5\pi}{12}$, $\cos \frac{7\pi}{12}$, $\cos \frac{11\pi}{12}$ (c) En déduire la valeur exacte de $\cos \frac{\pi}{12}$, $\cos \frac{5\pi}{12}$, $\cos \frac{7\pi}{12}$, $\cos \frac{11\pi}{12}$ **Exercice n°97**On ne cherchera pas à calculer les racines de f .(a) Factoriser $f(x)$ (b) Développer $f(x)$

(c) En déduire la valeur exacte de :

$$A = \cos \frac{\pi}{9} + \cos \frac{5\pi}{9} + \cos \frac{7\pi}{9} ; B = \cos \frac{\pi}{9} \cos \frac{5\pi}{9} + \cos \frac{5\pi}{9} \cos \frac{7\pi}{9} + \cos \frac{7\pi}{9} \cos \frac{\pi}{9} ; C = \cos \frac{\pi}{9} \cos \frac{5\pi}{9} \cos \frac{7\pi}{9}$$

Exercice n°98En considérant l'équation $\cos 4x = \cos 3x$, Calculer les nombres

$$A = \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7}.$$

$$B = \cos \frac{2\pi}{7} \times \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} \times \cos \frac{6\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} \times \cos \frac{2\pi}{7}$$

$$C = \cos \frac{2\pi}{7} \times \cos \frac{4\pi}{7} \times \cos \frac{6\pi}{7}.$$

Exercice n°99Démontrer que la représentation graphique de la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \cos(2x) + \sin x - 1$ est située entre les droites d'équation $y = 3$ et $y = 1$.**Exercice n°100**Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points A et B dont les coordonnées polaires sont :A(2 ; 0) ; B $\left(2; \frac{\pi}{6}\right)$ On considère également le point C dont le coordonnées cartésiennes sont : C $(-\sqrt{3}; -1)$.

1) Préciser, sans justification, les coordonnées cartésiennes de A.

2) Calculer les coordonnées cartésiennes de B.

3) Calculer les coordonnées polaires de C.

4) Justifier que les points A, B et C sont sur un même cercle de centre O dont on précisera le rayon.

5) Placer précisément les points A, B et C sur une figure.

6) Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier.

Exercice 101

Un avion part de O et se dirige vers A .

Son cap est défini par l'angle $(\vec{i}, \overrightarrow{OA}) = \frac{2\pi}{3}$ où \vec{i} indique la direction de l'Est.

Après 6 km de vol, il se trouve en C mais un incident technique l'oblige à se détourner vers l'Est pour atterrir en B , tel que $CB = 12$ km.

Lorsqu'il repart vers A , son nouveau cap est : $(\vec{i}, \overrightarrow{BA}) = \frac{11\pi}{12}$

Le pilote souhaite déterminer la distance qui lui reste à parcourir et, s'il a le temps, en profitera pour déterminer les lignes trigonométriques de $\frac{11\pi}{12}$ et quelques angles associés ...

1) L'unité choisi étant le km, on introduit le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé direct. Donner les coordonnées de C .

2) a) Etablir que les coordonnées cartésiennes de B sont $B(9; 3\sqrt{3})$.

b) En déduire que les coordonnées polaires de B sont $B\left[6\sqrt{3}; \frac{\pi}{6}\right]$.

3) a) Justifier les égalités suivantes :

$$(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) = \frac{2\pi}{3}; (\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{CB}) = \frac{\pi}{3}; (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}) = \frac{\pi}{2}$$

b) Prouver que le triangle OAB est rectangle isocèle.

c) Calculer alors la valeur de la distance BA .

4) a) Données les coordonnées polaires puis cartésiennes du point A .

b) En écrivant le vecteur \overrightarrow{BA} de deux façons différentes, établir que :

$$\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \frac{-\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \text{ et } \sin\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

c) En déduire les lignes trigonométriques de $\frac{\pi}{12}$ et $\frac{7\pi}{12}$

Exercice n°102

1. ABC est un triangle non rectangle inscrit dans un cercle (C) ; D est le point d'intersection des Tangentes à (C) en B et en C . Soit θ une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$. Déterminer en Fonction de θ une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC})$.

2. A, B, C et D sont quatre points distincts du plan. Démontrer que

$$(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}) + (\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA}) = 0.$$

3.a) Montrer que pour tout $x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi$ et $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, on a $\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$.

b) En déduire que $\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$.

4. Résoudre dans $[0, 2\pi]$ les équations suivantes:

a) $3 \cos x - \sqrt{3} \sin x + \sqrt{6} = 0.$

b) $\sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right).$

5. Résoudre dans $[-\pi, \pi]$ l'inéquation $\sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) - 1 < 0.$