Chapitre 10
CONIQUES

Enoncé des exercices

1 Les basiques

Exercice 10.1 *Dans le plan muni d'un repère orthonormé* $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, *soit* $\mathcal{C}$ *la conique de foyer* $F : (1, -1)$ *de directrice* $D : x = 5$ *et d'excentricité* $e = \dfrac{1}{3}$.

1. *Déterminer la nature de* $\mathcal{C}$ *(ellipse, hyperbole, parabole), l'axe focal, les coordonnées des sommets principaux* A *et* A', *secondaires* B *et* B', *du centre* Ω, *du second foyer* F' *et la seconde directrice* D'.
2. *Préciser l'équation de* $\mathcal{C}$ *dans le repère* $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ *et les coordonnées des points d'intersection avec les axes.*

Exercice 10.2 *Soient* A *et* B *deux points distincts du plan,* I *le milieu de* $[A, B]$. *Déterminer l'ensemble des points* M *du plan tels que* $MI^2 = MA \times MB$. *(On peut supposer que la distance* AB *vaut* 2*).*

Exercice 10.3 *Soit* $\mathcal{E}$ *une ellipse de foyer* F, *une droite* $\mathcal{D}$ *passant par* F *coupe* $\mathcal{E}$ *en deux points* M *et* M'. *Que dire de* $\dfrac{1}{FM} + \dfrac{1}{FM'}$ *? (Le point* F *a un rôle particulier, quelle représentation de* $\mathcal{E}$ *choisir ?)*

Exercice 10.4 *Soit* $\mathcal{E}$ *un ellipse de foyer* F, F' *et de centre* O. *On note* a *la longueur du demi grand axe et* $c = OF$. *Montrer que*

$$M \in \mathcal{E} \iff MF \times MF' + OM^2 = 2a^2 - c^2$$

(C'est la définition trifocale de l'ellipse).

Exercice 10.5 *Soit* $\mathcal{C}$ *un cercle de centre* O *et* $A \in \mathcal{C}$. *Pour* $M \in \mathcal{C}$, *on construit le projeté* N *sur le diamètre perpendiculaire à* (OA) *et* $I = (OM) \cap (AN)$. *Lieu de* I *quand* M *décrit* $\mathcal{C}$ *(chercher l'équation polaire).*

Exercice 10.6 *Soit* a, b *deux réels tels que* $0 < a < b$. *Pour tout* $t \notin \{a, b\}$ *on considère la courbe* C_t *d'équation* $\dfrac{x^2}{a - t} + \dfrac{y^2}{b - t} = 1$

1. *Quelle est la nature de* C_t *? Montrer que si* C_t *est une conique, ces foyers ne dépendent pas de* t.
2. *Montrer que si* C_t *et* C_u *se coupent en* M, *alors elles sont orthogonales (i.e. les tangentes en* M *à* C_t *et à* C_u *sont orthogonales).*

Exercice 10.7 *Soit* $\mathcal{E}$ *une ellipse de centre* O, *soit* M *sur* $\mathcal{E}$, *on note* M' *le symétrique de* M *par rapport à l'axe focal. La normale à* M *coupe (en général) la droite* (OM') *en un unique point* P. *Quel est le lieu de* P *lorsque* M *décrit* $\mathcal{E}$ *?*

Exercice 10.8 *Soit* $\mathcal{C}$ *et* $\mathcal{C}'$ *deux cercles tels que* $\mathcal{C}'$ *soit inclus dans* $\mathcal{C}$. *Montrer que le lieu des centres des cercle* Γ *tangents à* $\mathcal{C}$ *et* $\mathcal{C}'$ *est inclus dans une ellipse (On admet la réciproque). Préciser comment construire les sommets principaux.*

Exercice 10.9 *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, dans le plan muni d'un repère orthonormé direct, on considère l'ensemble $\mathcal{C}_\alpha$ des points M de coordonées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ telles que*

$$x^2 + y^2 + 2\alpha xy - 1 = 0$$

1. *Discuter en fonction de α du genre de la conique.*
2. *Préciser l'ensembe C_0.*
3. *Préciser les ensemble C_1 et C_{-1}.*
4. *On considère le repère $\mathcal{R}_\theta = (O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ obtenu par rotation d'angle θ de $\mathcal{R}$, on note $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ les coordonnées de M dans ce repère. Comment choisir $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ pour que le terme en XY de l'équation C_α dans ce repère soit nul ? Quel est alors l'équation de C_α.*
5. *En déduire les paramètres a, b, c et e lorsque $\alpha = \dfrac{1}{2}$ et $\alpha = 2$.*

Exercice 10.10 *On se place en repère orthonormé, soit $\mathcal{C}$ la conique d'axes parallèles aux axes du repère, de centre $C : (2, 4)$, tangente à la droite $y = 1$ et passant par le point de coordonnées $\left(2 + \dfrac{\sqrt{20}}{3}, 6\right)$. Donner une équation de cette conique, sa nature, préciser son excentricité e.*

2 Les techniques

Exercice 10.11 *Soit $(\mathcal{E})$ une ellipse de centre O, M et M' deux points de l'ellipse tels que $(OM) \perp (OM')$, montrer que $\dfrac{1}{OM^{\,2}} + \dfrac{1}{OM'^{\,2}}$ est une constante qui ne dépend ni de M, ni de M'.*

Exercice 10.12 *Soit $\mathcal{P}$ une parabole de paramètre p et M un point de $\mathcal{P}$ distinct du sommet. Montrer que la normale en M à $\mathcal{P}$ recoupe $\mathcal{P}$ en un autre point N. Calculer le minimum de la distance MN lorsque M décrit $\mathcal{P}$. Construire les points qui réalisent le minimum.*

Exercice 10.13 *Soit $\mathcal{P}$ une parabole. On considère une droite $\mathcal{D}$ non parallèle à l'axe focal, qui coupe $\mathcal{P}$ en deux points M_1 et M_2. On suppose que $\mathcal{D}$ n'est pas la normale à $\mathcal{P}$, ni en M_1, ni en M_2. On trace les normales en M_1 et en M_2 à $\mathcal{P}$. Montrer que ces normales se coupent en un point de $\mathcal{P}$ si et seulement si $\mathcal{D}$ passe un point fixe de l'axe focal.*

Exercice 10.14 *Déterminer le lieu des points d'où l'on peut mener deux tangentes perpendiculaires à une parabole $\mathcal{P}$.*
Montrer que dans ce cas le segment reliant les points de contact entre les deux tangentes et la parabole passe par le foyer de celle ci.

Exercice 10.15 *Soit $\mathcal{C}$ une ellipse ou une hyperbole d'équation réduite $\dfrac{x^2}{a^2} + \varepsilon\dfrac{y^2}{b^2} = 1$ où $\varepsilon^2 = 1$, soit $\mathcal{D}$ une droite variable d'équation normale $\cos\theta x + \sin\theta y = p(\theta)$; donner une condition sur $p(\theta)$ pour que $\mathcal{D}$ soit tangente à $\mathcal{C}$. En déduire que le lieu des points d'où l'on peut mener deux tangentes perpendiculaires à $\mathcal{C}$ est inclus dans un cercle (dit cercle de Monge de la conique, ou orthoptique de la conique). On admet la réciproque.*

Exercice 10.16 *Soit $\mathcal{P}$ une parabole et A un point, une droite $\mathcal{D}$ variable passant par A coupe $\mathcal{D}$ en deux points M_1 et M_2. Montrer que le lieu du point d'intersection des tangentes à $\mathcal{P}$ en M_1 et M_2 est une droite. Que dire de cette droite si A est sur l'axe focal de la parabole, si A est le foyer ?*

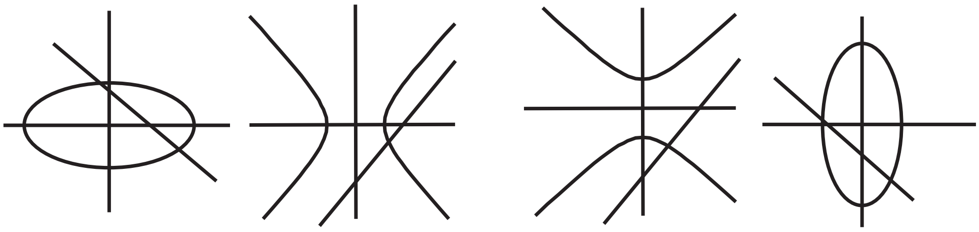
Exercice 10.17 *Soit $\mathcal{P}$ une parabole, une corde focale coupe variable la parbole en deux points M_1 et M_2. Montrer que le cercle de diamètre $[M_1, M_2]$ est tangent à la directrice. Quel est le lieu du centre de ce cercle ?*

Exercice 10.18 *Soit $\mathcal{C}$ la conique d'équation polaire $r = \dfrac{p}{1 + e\cos\theta}$, M_0 un point de de $\mathcal{C}$ de coordonnées polaires (r_0, θ_0). Donner l'équation polaire de la tangente en M_0.*

3 Les exotiques

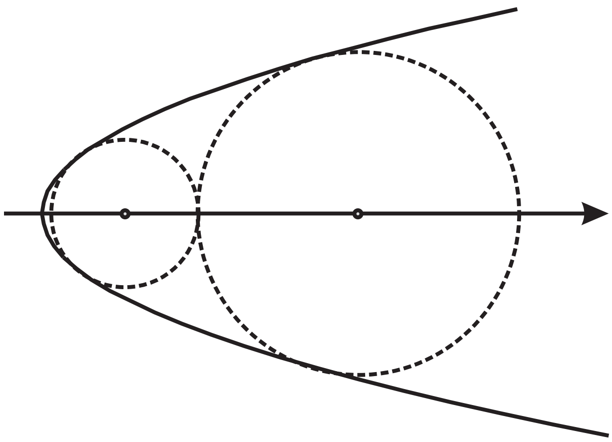
Exercice 10.19 *Soit $\mathcal{E}$ l'ellipse d'équation $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ en repère orthonormé et de foyers F et F', on suppose que le point P de $\mathcal{E}$ vérifie $PF=2PF'$. Calculer l'aire du triangle FPF'.*
Combien existe-t-il de points P satisfaisant à la condition donnée ? Donner leurs coordonnées.

Exercice 10.20 *Soient a et b deux réels non nuls, on considère la conique $\mathcal{C}$ d'équation $bx^2+ay^2=ab$ et la droite $\mathcal{D}$ d'équation $ax-y+b=0$. Parmi les graphes suivant, lesquels vous semblent possibles ?*

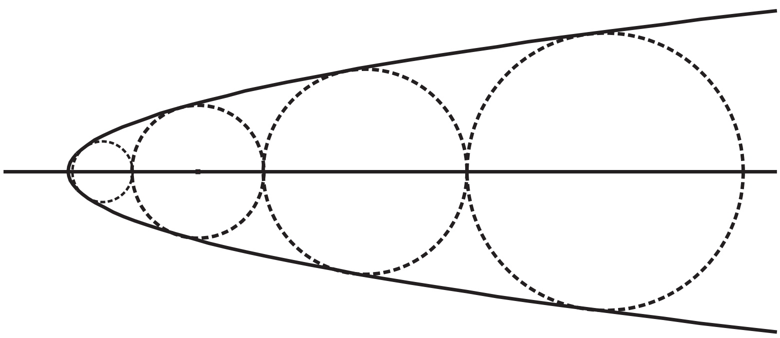


(a) (b) (c) (d)

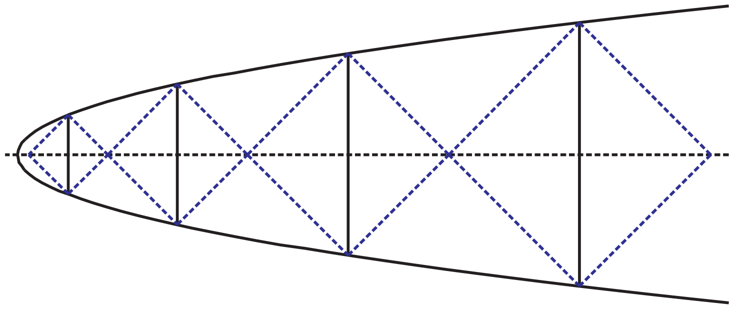
Exercice 10.21 *On considère une parabole $\mathcal{P}$ et deux cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ centrés sur l'axe focal, bitangents à $\mathcal{P}$ et tangents entre eux extérieurement. Quelle relation relie les rayons de ces deux cercles ?*



Si l'on construit une chaîne de cercles tangents entre eux deux à deux, centrés sur l'axe et bitangents à $\mathcal{P}$, que dire de la suite des rayons ?



Exercice 10.22 *On construit une chaîne de carrés inscrits dans une parabole comme indiqué sur la figure ci dessous :*



Quelle relation vérifie la suite des longeurs des côtés des carrés ?

4 Le Grenier

Exercice 10.23 *Dans le plan une droite variable passant par un point fixe A coupe une parabole en deux points points M_1 et M_2, les tangentes en ces points à la parabole se coupe en N. Montrer que N décrit une droite, et que cette droite est perpendiculaire à l'axe de la parabole si A est sur l'axe.*

Exercice 10.24 *Montrer que l'arc paramétré par* $\begin{pmatrix} \dfrac{t^2}{1+t^2} \\ \dfrac{2t}{1+t^2} \end{pmatrix}$ *est une ellipse, en donner les éléments caractéristiques.*

Exercice 10.25 *Soit $\mathcal{D}$ une droite et M un point n'appartenant pas à $\mathcal{D}$, quel est le lieu des foyers des paraboles de directrices $\mathcal{D}$ passant par M.*

Exercice 10.26 *Discuter en fonction du paramètre m, la nature géométrique de l'ensemble $\mathcal{C}_m$ des points du plan tels que*

$$(m+1)\,x^2 + (2m-1)\,y^2 + 2mx + \frac{m}{2} = 0$$

Exercice 10.27 *Soit $\mathcal{E}$ une ellipse, on note B un des sommets secondaires. Soit M un point de $\mathcal{E}$, la médiatrice de $[B,M]$ coupe l'axe focal en un point P, on note N le symétrique du centre O de l'ellipse par rapport à P. Montrer que N est l'intersection de la normale à M avec l'axe focal (Ceci donne un procédé de construction de la tangente en M). Soit $\mathcal{C}$ un cercle centré sur l'axe focal de $\mathcal{E}$ et bitangent à l'ellipse en M et M', symétrique de M par rapport à l'axe focal. Montrer que M, M', B et B' (l'autre sommet secondaire) sont sur un même cercle centré en N. Si r est le rayon de ce cercle alors $ON^2 = \dfrac{c^2}{b^2}\left(b^2 - r^2\right)$.*

Exercice 10.28 *Tracer $\rho^2(\theta) = \dfrac{1}{\sin 2\theta}$ (rép : on a $\rho^2 \sin 2\theta = 2\rho\cos\theta \times \rho\sin\theta$ ce qui donne $2xy = 1$, hyperbole)*

Exercice 10.29 *Tracer $\rho(\theta) = \dfrac{1}{\cos\theta} + \dfrac{1}{\sin\theta}$ (rép : cela donne $\rho = \dfrac{\rho}{\rho\cos\theta} + \dfrac{\rho}{\rho\sin\theta}$ soit en simplifiant par ρ qui n'est jamais nul $1 = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} \Longrightarrow x + y = xy$)*

Exercice 10.30 *Tracer $\rho = \dfrac{3}{1 + 2(\cos\theta + \sin\theta)}$ (conique)*

Exercice 10.31 *Tracer $\rho = \dfrac{2}{4 + \sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta}$*

Exercice 10.32 *Soit k un paramètre réel, on considère, dans le repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, la conique $\mathcal{C}_k$ d'équation*

$$x^2 + y^2 - 2kxy + 2(kx - y) = 0$$

Donner ses éléments caractéristiques.

Chapitre 7
CONIQUES

Solution des exercices

1 Les basiques

Exercice 7.1 1. *Il s'agit d'une ellipse, l'axe focal a pour équation* $y=-1$ *(il passe par le foyer et est perpendiculaire à* D*. Soient* $A:(x,-1)$ *un sommet principal, on a* $\dfrac{AF}{AH}=e$ *où* H *est le projeté orthogonal de* A *sur* D*.*

$$\frac{AF}{AH}=e\Longleftrightarrow AF^2=\frac{1}{9}AH^2\Longleftrightarrow (x-1)^2=\frac{1}{9}(x-5)^2$$

On trouve immédiatemment $A':(-1,-1)$ *et* $A:(2,-1)$*. Le centre de la conique est alors e* $\Omega:\dfrac{A+A'}{2}:\left(\dfrac{1}{2},-1\right)$*, le paramètre* a *vaut alors* $a=\dfrac{AA'}{2}=\dfrac{3}{2}$*. Puisque* $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{3}$*, on a* $c=\dfrac{1}{2}$ *et enfin* $a^2=b^2+c^2\Longrightarrow b^2=\left(\dfrac{3}{2}\right)^2-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=2\Longrightarrow b=\sqrt{2}$*. Les sommets secondaires sont donc* $B':\left(\dfrac{1}{2},-1+\sqrt{2}\right)$ *et* $B:\left(\dfrac{1}{2},-1+\sqrt{2}\right)$*. L'autre foyer est* $F':\left(\dfrac{1}{2}-c,-1\right)=(0,-1)$*, l'autre directrice* $D':x=-3$*.*

2. *On revient à la définition de la conique,*

$$\frac{MF}{MH}=e\Longleftrightarrow MF^2=e^2MH^2\Longleftrightarrow (x-1)^2+(y+1)^2=\frac{1}{9}(x-5)^2$$

l'équation de la conique est donc

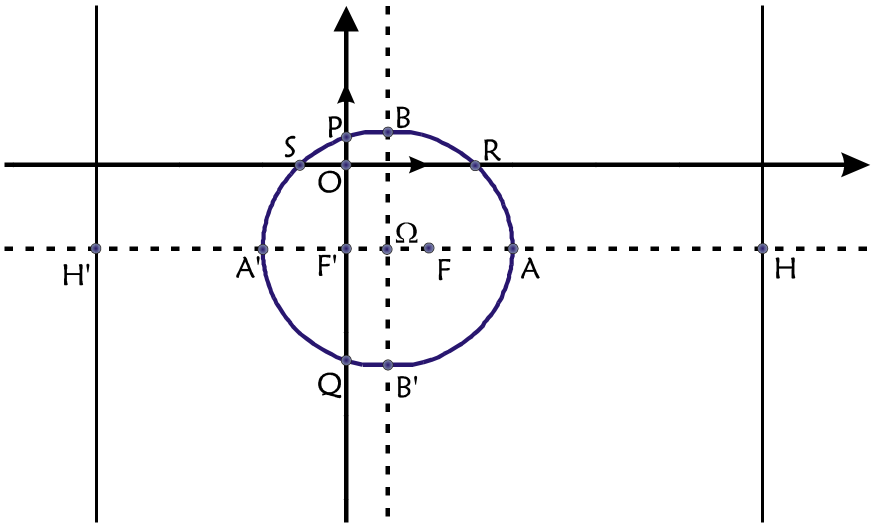
$$(x-1)^2+(y+1)^2-\frac{1}{9}(x-5)^2=0$$

ce qui peut s'écrire

$$8x^2+9y^2-8x+18y-7=0$$

Les points d'intersection avec les axes sont obtenus en faisant $x=0$ *(intersection avec* Oy*) et* $y=0$ *(intersection avec* Ox*).*
On obtient :
Si $x=0$*,* $9y^2+18y-7=0$ *dont les solutions sont* $-\dfrac{7}{3}$ *et* $\dfrac{1}{3}$*. Les points d'intersection avec* Oy *sont* $P:\left(0,\dfrac{1}{3}\right)$ *et* $Q:\left(0,-\dfrac{7}{3}\right)$*.*
Si $y=0$*,* $8x^2-8x-7=0$ *dont les solutions sont* $\dfrac{2-3\sqrt{2}}{4}$ *et* $\dfrac{2+3\sqrt{2}}{4}$*. Les points d'intersection avec* Ox *sont*

$R : \left(\frac{2+3\sqrt{2}}{4}, 0\right)$ *et* $S : \left(\frac{2-3\sqrt{2}}{4}, 0\right)$.



Exercice 7.2 *On se place dans le repère orthonormé suivant : l'origine du repère est le point* I*, le point* A *a pour coordonnées* $(1, 0)$ *et le point* B *a pour coordonnées* $(-1, 0)$*. Si les coordonnées de* M *sont* (x, y) *alors*

$$\begin{aligned} MI^2 &= x^2 + y^2 \\ MA \times MB &= \sqrt{(x-1)^2 + y^2} \times \sqrt{(x+1)^2 + y^2} \end{aligned}$$

Puisque les distances sont des nombres positifs, on a

$$MI^2 = MA \times MB \Longleftrightarrow \left(x^2 + y^2\right)^2 = \left((x-1)^2 + y^2\right) \times \left((x+1)^2 + y^2\right)$$

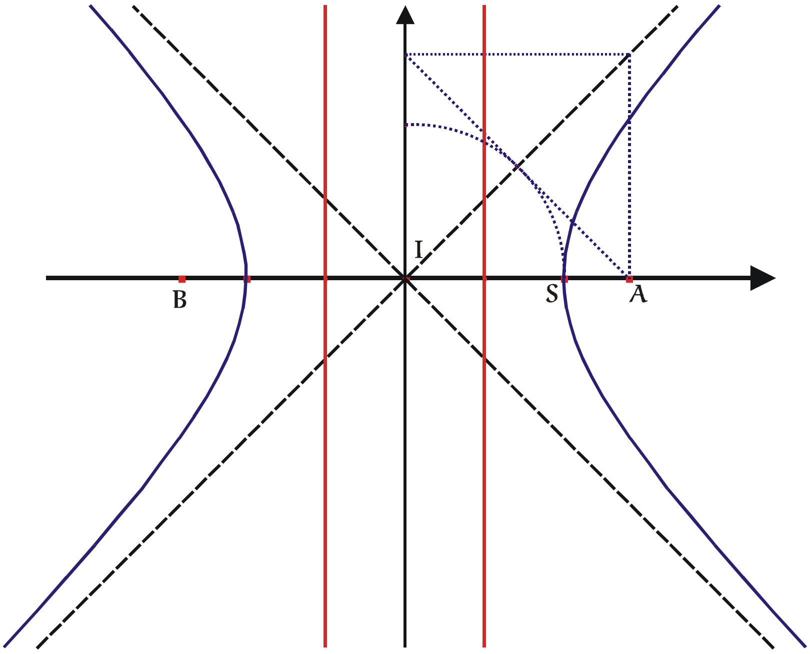
en développant, on trouve

$$\left(x^2 + y^2\right)^2 - \left((x-1)^2 + y^2\right) \times \left((x+1)^2 + y^2\right) = 2x^2 - 2y^2 - 1$$

L'équation du lieu cherché est donc

$$\frac{x^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1$$

On trouve une hyperbole équilatère ($e = \sqrt{2}$) *de centre* I*. Les foyers sont (* $a = b = \frac{1}{\sqrt{2}}$ *donc* $a^2 + b^2 = c^2 = 1$*) les points* A *et* B*. Les directrices ont pour équation* $D : x = \frac{1}{2}$ *et* $D' : x = -\frac{1}{2}$ *(elles passent par les milieux de* $[I, A]$ *et* *de* $[B, I]$ *). Les sommets sont en* $S : \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ *et* $S' : \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$



Exercice 7.3 *Dans le repère polaire de pôle* F *et d'axe focal, l'équation de* $\mathcal{C}$ *est* $\rho = \dfrac{p}{1 + e\cos(\theta)}$*. Si* $\mathcal{D}$ *fait un angle de* α *avec l'axe focal, les points d'intersection de* $\mathcal{C}$ *et* $\mathcal{D}$ *sont* M *et* M' *de coordonnées polaires* $\left(\alpha, \dfrac{p}{1 + e\cos(\theta)}\right)$ *et* $\left(\alpha + \pi, \dfrac{p}{1 + e\cos(\theta + \pi)}\right)$*. On en déduit que* $\dfrac{1}{FM} = \dfrac{1 + e\cos(\theta)}{p}$ *et* $\dfrac{1}{FM'} = \dfrac{1 + e\cos(\theta + \pi)}{p} = \dfrac{1 - e\cos(\theta)}{p}$*. Ainsi*

$$\frac{1}{FM} + \frac{1}{FM'} = \frac{2}{p}$$

est constant.
Remarque : *le résultat demeure si l'on considère une parabole, en revanche pour une hyperbole c'est faux.*

Exercice 7.4 *Première solution (pas la plus élégante...)*
Les coordonnées de F *et de* F' *sont respectivement* $(c, 0)$ *et* $(-c, 0)$*. On a donc*

$$\begin{aligned}
(MF \times MF')^2 &= \left((x-c)^2 + y^2\right) \times \left((x+c)^2 + y^2\right) \\
&= \left(x^2 + y^2 + c^2 - 2cx\right) \times \left(x^2 + y^2 + c^2 + 2cx\right) \\
&= \left(x^2 + y^2 + c^2\right)^2 - 4c^2x^2
\end{aligned}$$

Or (les nombres étant positifs)

$$MF \times MF' + OM^2 = 2a^2 - c^2 \Longleftrightarrow (MF \times MF')^2 = \left(2a^2 - c^2 - OM^2\right)^2$$

ce qui équivaut à

$$\left(x^2 + y^2 + c^2\right)^2 - 4c^2x^2 = \left(2a^2 - \left(c^2 + x^2 + y^2\right)\right)^2$$

d'où

$$\begin{aligned}
MF \times MF' + OM^2 = 2a^2 - c^2 &\Longleftrightarrow -4c^2x^2 = 4a^4 - 4a^2\left(c^2 + x^2 + y^2\right) \\
&\Longleftrightarrow a^4 - a^2\left(c^2 + x^2 + y^2\right) + c^2x^2 = 0 \\
&\Longleftrightarrow a^2\left(a^2 - c^2\right) + \left(c^2 - a^2\right)x^2 - a^2y^2 = 0
\end{aligned}$$

avec

$$a^2 - b^2 = c^2$$

on obtient

$$\begin{aligned} MF \times MF' + OM^2 = 2a^2 - c^2 &\iff a^2b^2 - b^2x^2 - a^2y^2 = 0 \\ &\iff \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ \text{en divisant par } a^2b^2 \neq 0 & \end{aligned}$$

Seconde solution (bien plus rapide...).
La définition bifocale de l'ellipse permet d'écrire que

$$M \in \mathcal{E} \iff MF + MF' = 2a$$

Puisque tous les nombres sont positifs, on a

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{E} &\iff (MF + MF')^2 = 4a^2 \\ &\iff MF \times MF' + \frac{1}{2}\left(MF^2 + MF'^2\right) = 2a^2 \\ &\iff MF \times MF' + \frac{1}{2}\left((x-c)^2 + y^2 + (x+c)^2 + y^2\right) = 2a^2 \\ &\iff MF \times MF' + x^2 + y^2 + c^2 = 2a^2 \\ &\iff MF \times MF' + OM^2 = 2a^2 - c^2 \end{aligned}$$

Remarque : *On peut aussi le faire vectoriellement car*

$$\begin{aligned} MF^2 &= \left\|\overrightarrow{MF}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OF}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{MO}\right\|^2 + 2\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{OF} + \left\|\overrightarrow{OF}\right\|^2 \\ &= OM^2 + 2\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{OF} + c^2 \\ \left\|\overrightarrow{MF'}\right\|^2 &= OM^2 + 2\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{OF'} + c^2 \end{aligned}$$

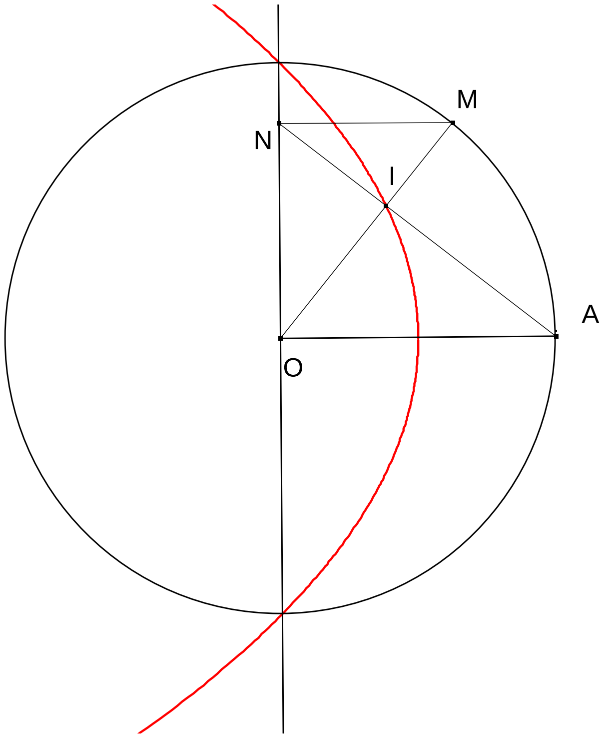
Mais $\overrightarrow{OF} = -\overrightarrow{OF'}$*, donc* $(MF + MF')^2 = 4a^2 = MF^2 + MF'^2 + 2MF \times MF' = 2OM^2 + 2c^2 + 2MF \times MF' \cdots$

Exercice 7.5 *Dans le ROND* $\mathcal{R} = \left(O, \frac{\overrightarrow{OA}}{R}, j\right)$ *où* R *est le rayon du cercle. En polaire, on a* $A : (R, 0)$, $M : (R\cos\theta, R\sin\theta)$ *et* $N : (0, R\sin\theta)$. *La droite* (OM) *a pour équation* $x\sin\theta - y\cos\theta = 0$. *La droite* (AN) *a pour équation* $\begin{vmatrix} x-1 & -R \\ y & R\sin\theta \end{vmatrix} = xR\sin\theta + y - R\sin\theta = 0$

Les coordonnées de I *sont donc* $\begin{array}{c} x\sin(\theta) - y\cos(\theta) = 0 \\ xR\sin(\theta) + Ry - R\sin(\theta) = 0 \end{array}$ *dont les solutions sont* $x = \dfrac{\cos\theta}{1+\cos\theta}$, $y = \dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$

L'équation polaire est donc $x^2 + y^2 = \rho^2 = \dfrac{1}{(1+\cos\theta)^2} \Longrightarrow \rho = \dfrac{1}{1+\cos\theta}$ *car* $1 + \cos\theta \geq 0$.

On obtient donc une parabole dont le foyer est O, et la directrice la perpendiculaire à (OA) passant par A.



Exercice 7.6 1. *Premier cas : $a-t<0$ et $b-t<0$ i.e. si $t>b$ alors C_t est vide.*
Deuxième cas : Si $t\in\,]a,b[$ alors $a-t<0$ et $b-t>0$, C_t est une hyperbole d'axe focal Oy de centre O. L'équation réduite est

$$\frac{X^2}{b-t}-\frac{Y^2}{t-a}=1 \text{ avec } X=y \text{ et } Y=x$$

Les foyers sont $F=\left(0,\sqrt{b-a}\right)$ et $F'=\left(0,-\sqrt{b-a}\right)$, le demi grand axe est $\sqrt{b-t}$.
Troisième cas : $t<a$ alors $a-t>0$ et $b-t>0$, C_t est une ellipse. Puisque $a-t<b-t$ l'axe focal est Oy. L'équation réduite est

$$\frac{X^2}{b-t}+\frac{Y^2}{a-t}=1 \text{ avec } X=y \text{ et } Y=x$$

Les foyers sont $F=\left(0,\sqrt{b-a}\right)$ et $F'=\left(0,-\sqrt{b-a}\right)$, le demi grand axe est $\sqrt{b-t}$.
Toutes ces coniques ont donc mêmes foyers.

2. *On peut procéder géométriquement ou par le calcul.*
Géométriquement : Puisque les coniques ont toutes les mêmes foyers, d'après la définition bifocale si C_t et C_u passent par le même point M, elles sont de nature différente (sinon, supposons que ce soient deux ellipses, alors $MF+MF'=2\sqrt{b-t}=2\sqrt{b-u}$ d'où $t=u$, de même si ce sont deux hyperboles avec $MF-MF'$).
Si C_t est une ellipse et C_u une hyperbole, la tangente en M à C_u est la bissectrice intérieure de l'angle (MF,MF') et la tangente en M à C_u est la bissectrice extérieure du même angle. Ces deux tangentes sont donc perpendiculaires.

Par le calcul : Si M a pour coodonnées (x,y), un vecteur normal à C_t en M a pour coordonnées $\begin{pmatrix} \dfrac{x}{a-t} \\ \dfrac{y}{b-t} \end{pmatrix}$ (règle du dédoublement !). De même, un vecteur normal à C_u est $\begin{pmatrix} \dfrac{x}{a-u} \\ \dfrac{y}{b-u} \end{pmatrix}$.

Il s'agit de prouver que $\begin{pmatrix} \dfrac{x}{a-t} \\ \dfrac{y}{b-t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{x}{a-u} \\ \dfrac{y}{b-u} \end{pmatrix} = \dfrac{x^2}{(a-t)(a-u)} + \dfrac{y^2}{(b-t)(b-u)} = 0$ *sous les hypothèses* $M \in C_t$ *et* $M \in C_u$.
Or on a

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{(a-t)(a-u)} + \frac{y^2}{(b-t)(b-u)} &= \frac{1}{t-u}\left(\frac{x^2}{(a-t)} - \frac{x^2}{(a-u)} + \frac{y^2}{(b-t)} - \frac{y^2}{(b-u)}\right) = 0 \\ \text{car } \frac{x^2}{(a-t)} + \frac{y^2}{(b-t)} &= \frac{x^2}{(a-u)} + \frac{y^2}{(b-u)} = 1 \end{aligned}$$

Exercice 7.7 *Si* a *et* b *sont les grands et petits axes de l'ellipse, on paramètre* M *par* $\begin{pmatrix} a\cos t \\ b\sin t \end{pmatrix}$. *Le point* M' *est donc paramétré par* $\begin{pmatrix} a\cos t \\ -b\sin t \end{pmatrix}$. *La normale en* M *a pour équation*

$$\begin{pmatrix} x - a\cos t \\ y - b\sin t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -a\sin t \\ b\cos t \end{pmatrix} = 0$$

soit

$$-ax\sin t + by\cos t = \left(b^2 - a^2\right)\sin t\cos t$$

La droite (OM') *a pour équation* $bx\sin t + ay\cos t = 0$. *Les coordonnées de* P *sont donc solutions de*

$$\begin{cases} -ax\sin t + by\cos t = \left(b^2 - a^2\right)\sin t\cos t \\ bx\sin t + ay\cos t = 0 \end{cases}$$

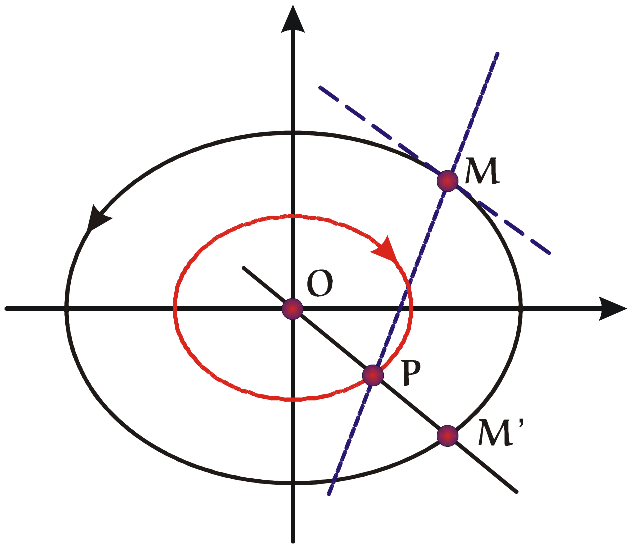
Le déterminant du système vaut

$$\Delta = \begin{vmatrix} -a\sin t & b\cos t \\ b\sin t & a\cos t \end{vmatrix} = -\left(a^2 + b^2\right)\sin t\cos t$$

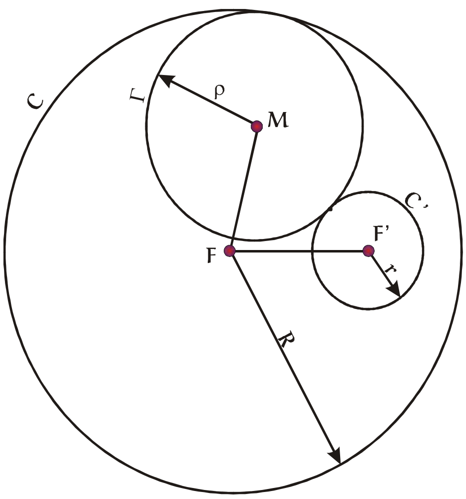
Il est nul si et seulement si $t = 0 \ \left(\frac{\pi}{2}\right)$ *(dans ce cas la normale coïncide avec* (OM')*). En dehors de ces cas, les coordonnées de* P *sont*

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{-\left(a^2+b^2\right)\sin t\cos t}\begin{vmatrix} \left(b^2-a^2\right)\sin t\cos t & b\cos t \\ 0 & a\cos t \end{vmatrix} = -\frac{b^2-a^2}{b^2+a^2}\,a\cos t = \frac{b^2-a^2}{b^2+a^2}\,a\cos(\pi - t) \\ y &= \frac{1}{-\left(a^2+b^2\right)\sin t\cos t}\begin{vmatrix} -a\sin t & \left(b^2-a^2\right)\sin t\cos t \\ b\sin t & 0 \end{vmatrix} = \frac{b^2-a^2}{b^2+a^2} b\sin t = \frac{b^2-a^2}{b^2+a^2}\,a\sin(\pi - t) \end{aligned}$$

On obtient donc une ellipse $\mathcal{E}'$ *homothétique de* $\mathcal{E}$ *(le rapport d'homothétie est* $\dfrac{b^2-a^2}{b^2+a^2} = 1 - \dfrac{2}{2-e^2}$, *donc plus l'ellipse ressemble à un cercle* $(e \simeq 0)$, *plus* $\mathcal{E}'$ *est "petite", au cas imite (*$\mathcal{E}$ *tend vers un cercle),* $\mathcal{E}'$ *tend vers un point) décrite* *dans l'autre sens (présence du $\pi - t$).*



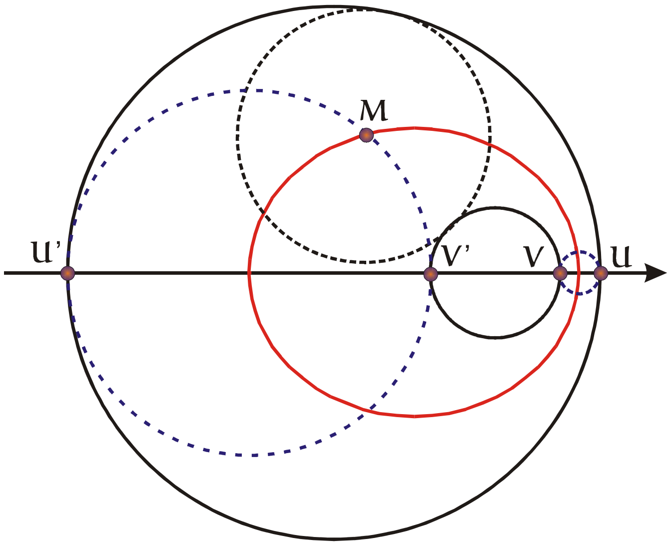
Exercice 7.8 *On suppose le problème résolu, soient R et r les rayons de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$, et soit ρ le rayon de Γ. Les conditions de tangences donnent (avec les notations du dessin ci dessous)*



$$\begin{aligned} MF' &= \rho + r \\ MF &= R - \rho \end{aligned}$$

d'où $MF + MF' = R - r$, ainsi M est sur l'ellipse de foyers les centres de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ et de grand axe la différence des rayons. Pour avoir les sommets principaux, l'axe focal (FF') coupe les cercles en quatre points U, U' et V, V' (c.f.

dessin ci dessous), les sommets principaux sont les milieux de $[U,V]$ *et de* $[U',V']$.



Exercice 7.9

1. *On a* $\Delta = 4\alpha^2 - 4 = 4\left(\alpha^2 - 1\right)$. *Ainsi pour* $\alpha = 1$ *ou* -1, C_α *est du genre parabole, pour* $|\alpha| > 1$, *elle est du genre hyperbole, et pour* $|\alpha| < 1$ *du genre ellipse.*
2. *C'est le cercle unité !*
3. *Pour* $\alpha = 1$, *l'équation devient* $(x+y)^2 = 1$ *ce qui donne deux droites* $y = 1 - x$ *et* $y = -1 - x$. *¨Pour* $\alpha = -1$, *on a* $(y-x) = \pm 1$ *soit* $y = x + 1$ *ou* $y = x - 1$.
4. *On a* $\left\{\begin{array}{l} x = \cos(\theta)X - \sin(\theta)Y \\ y = \sin(\theta)X + \cos(\theta)Y \end{array}\right.$, *le terme en* XY *est donc égal à*

$$-2\cos\theta\sin\theta + 2\sin\theta\cos\theta + 2\alpha\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right) = 2\alpha\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right)$$

On choisit donc $\theta = \frac{\pi}{4}$ *pour avoir un terme en* XY *nul. Les formules de changement de repère deviennet alors* $\left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(X-Y) \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(X+Y) \end{array}\right.$ *et l'équation de* C_α *est*

$$\frac{1}{2}(X-Y)^2 + \frac{1}{2}(X+Y)^2 + 2\alpha \times \frac{1}{\sqrt{2}}(X-Y) \times \frac{1}{\sqrt{2}}(X+Y) - 1 = 0$$

soit

$$(1+\alpha)X^2 + (1-\alpha)Y^2 = 1$$

5. *Pour* $a = \dfrac{1}{2}$, *on a* $1 - \alpha > 0$, *l'équation ressemble à une équation réduite d'ellipse*

$$\frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{2}Y^2 = 1 \iff \frac{X^2}{\sqrt{\frac{2}{3}}} + \frac{Y^2}{\sqrt{2}} = 1$$

Or $\sqrt{2} > \sqrt{\dfrac{2}{3}}$, *l'axe focal est donc suivant* OY, *on a donc*

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{2},\ b = \sqrt{\frac{2}{3}} \\ c^2 &= 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \Longrightarrow c = \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ et } e = \sqrt{\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

De manière générale, si $\alpha \in \left]0,1\right[$*, on a* $a = \dfrac{1}{\sqrt{1-\alpha}}$, $b = \dfrac{1}{\sqrt{1+\alpha}}$, $c = \sqrt{\dfrac{2\alpha}{1-\alpha^2}}$, $e = \sqrt{\dfrac{2\alpha}{1+\alpha}}$. *Si* $x \in \left]-1,0\right[$ *l'axe focal ext* OX, $a = \dfrac{1}{\sqrt{1+\alpha}}$, $b = \dfrac{1}{\sqrt{1-\alpha}}$, $c = \sqrt{\dfrac{2\alpha}{\alpha^2-1}}$ *et* $e = \sqrt{\dfrac{2\alpha}{\alpha-1}}$.
Pour $\alpha = 2$*, on a*

$$3X^2 - Y^2 = 1 \iff \frac{X^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} - Y^2 = 1$$

c'est bien l'équation réduite d'une hyperbole, l'axe focal est suivant OX. *On a*

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{\sqrt{3}},\ b = 1 \\ c^2 &= 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3} \Longrightarrow c = \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ et } e = 2 \end{aligned}$$

De manière générale, si $\alpha > 1$*, on a* $a = \dfrac{1}{\sqrt{1+\alpha}}$, $b = \dfrac{1}{\sqrt{\alpha-1}}$, $c = \sqrt{\dfrac{2\alpha}{\alpha^2-1}}$, $e = \sqrt{\dfrac{2\alpha}{\alpha-1}}$ *et si* $\alpha < -1$*, l'axe focal est suivant* OY, $a = \dfrac{1}{\sqrt{1-\alpha}}$, $b = \dfrac{1}{\sqrt{-1-\alpha}}$, $c = \sqrt{\dfrac{2\alpha}{1-\alpha^2}}$, $e = \sqrt{\dfrac{2\alpha}{1+\alpha}}$.

Exercice 7.10 *La conique a deux axes et un centre, c'est donc soit une ellipse, soit une hyperbole. Puisque son centre a pour coordonné* $(2,4)$*, son équation (pas nécessairement réduite) est du type*

$$\begin{aligned} \frac{(x-2)^2}{a^2} + \frac{(y-4)^2}{b^2} &= 1 \text{ s'il s'agit d'une ellipse} \\ \frac{(x-2)^2}{a^2} - \frac{(y-4)^2}{b^2} &= \pm 1 \text{ s'il s'agit d'une hyperbole} \end{aligned}$$

La règle du dédoublement permet de dire que si la droite $y = 1$ *est la tangente au point de coordonnées* (α,β) *alors* $\alpha = 0$ *(sinon on aurait des termes en* x*). La droite* $y = 1$ *est donc une tangente en un sommet. Cela nous apprend deux choses. S'il s'agit d'une hyperbole, l'équation est du type* $\dfrac{(x-2)^2}{a^2} - \dfrac{(y-4)^2}{b^2} = -1$ *car l'axe focal est parallèle à* Oy *(la tangente au sommet est parallèle à* Ox*). La distance entre le centre* C *de la conique et la tangente* $y = 1$ *est égale à* b*, donc ici à* 3. *Pour résumer les équations possibles sont donc*

$$\begin{aligned} \frac{(x-2)^2}{a^2} + \frac{(y-4)^2}{9} &= 1 \text{ s'il s'agit d'une ellipse} \\ \frac{(x-2)^2}{a^2} - \frac{(y-4)^2}{9} &= -1 \text{ s'il s'agit d'une hyperbole} \end{aligned}$$

Puisque le point de coordonnées $\left(2 + \dfrac{\sqrt{20}}{3}, 6\right)$ *est sur la conique, on remplace dans ces équations pour obtenir*

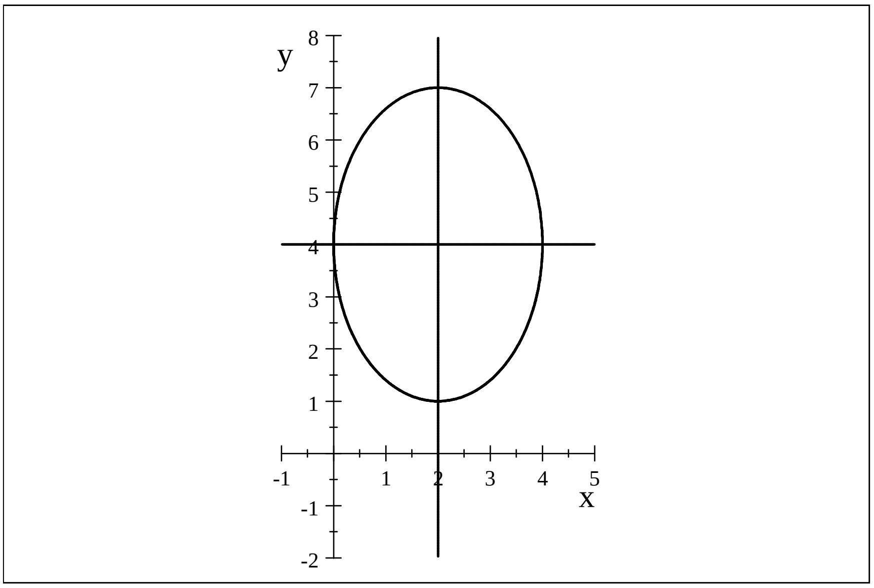
$$\begin{aligned} \frac{\left(\frac{\sqrt{20}}{3}\right)^2}{a^2} + \frac{4}{9} &= 1 \Longrightarrow a = 2 \\ \frac{\left(\frac{\sqrt{20}}{3}\right)^2}{a^2} - \frac{4}{9} &= -1 \text{ impossible} \end{aligned}$$

Il s'agit donc de l'ellipse d'équation

$$\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y-4)^2}{9} = 1$$

L'axe focal est suivant Oy, ainsi $c^2 = 9 - 4 = 5$ et

$$e = \frac{\sqrt{5}}{3}$$



2 Les techniques

Exercice 7.11 *On va donner deux solutions à cet exercice (la seconde étant bien meilleure, pensez au plan B !). La première idée est de partir d'un point M de l'ellipse, et de déterminer les coordonnées de M'. Soient (α, β) les coordonnées de M et (x, y) celles de M' dans le repère où l'équation de l'ellipse est*

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$$

On sait que

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1 \text{ car } M' \in \mathcal{E} &(7.1)\\ \alpha x + \beta y &= 0 \text{ car } (OM) \perp (OM') &(7.2) \end{aligned}$$

D'après (7.2) on a

$$\alpha^2 x^2 = \beta^2 y^2$$

en multipliant (7.1) par α^2, il vient

$$\begin{aligned} \frac{\alpha^2 x^2}{a^2} + \frac{\alpha^2 y^2}{b^2} &= \alpha^2 \Longleftrightarrow y^2 \left(\frac{\beta^2}{a^2} + \frac{\alpha^2}{b^2} \right) = \alpha^2 \\ \text{soit } y^2 &= \alpha^2 \frac{a^2 b^2}{\alpha^2 a^2 + \beta^2 b^2} \end{aligned}$$

de même (symétrie des rôles, ou en multipliant (7.1) par β^2)

$$x^2 = \beta^2 \frac{a^2 b^2}{\alpha^2 a^2 + \beta^2 b^2}$$

Enfin

$$\begin{aligned}\frac{1}{OM^{\,2}}+\frac{1}{OM'^{\,2}} &= \frac{1}{\alpha^2+\beta^2}+\frac{1}{x^2+y^2}=\frac{1}{\alpha^2+\beta^2}\left(1+\frac{\alpha^2a^2+\beta^2b^2}{a^2b^2}\right)\\ \text{car } x^2+y^2 &= \left(\alpha^2+\beta^2\right)\frac{a^2b^2}{\alpha^2a^2+\beta^2b^2}\end{aligned}$$

Si ce terme est constant il est égal à $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=\dfrac{a^2+b^2}{a^2b^2}$ *(placer* M *en un sommet principal,* M' *est alors en un sommet secondaire). Il faut donc vérifier que*

$$\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}\times\left(\alpha^2+\beta^2\right)=\left(1+\frac{\alpha^2a^2+\beta^2b^2}{a^2b^2}\right)$$

or

$$\left(a^2+b^2\right)\left(\alpha^2+\beta^2\right)=\left(\alpha^2a^2+\beta^2b^2\right)+\left(\alpha^2b^2+\beta^2a^2\right)$$

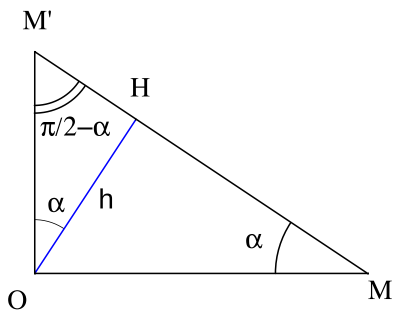
mais $M\in\mathcal{E}$ *(c'est la seule hypothèse que l'on a pas encore utilisée) donc*

$$\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}=1\Longleftrightarrow\alpha^2b^2+\beta^2a^2=a^2b^2$$

d'où

$$\frac{\left(a^2+b^2\right)\left(\alpha^2+\beta^2\right)}{a^2b^2}=\left(1+\frac{\alpha^2a^2+\beta^2b^2}{a^2b^2}\right)$$

ce qui permet de conclure.
Le résultat obtenu permet de prouver que la droite (MN) *est toujours tangente au cercle centré en* O *et de rayon* $\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}}}=\dfrac{ab}{\sqrt{a+b^2}}$. *Pour prouver cela, il suffit de calculer le carré de la hauteur issue du sommet opposé à l'hypothénuse d'un triangle rectangle.*



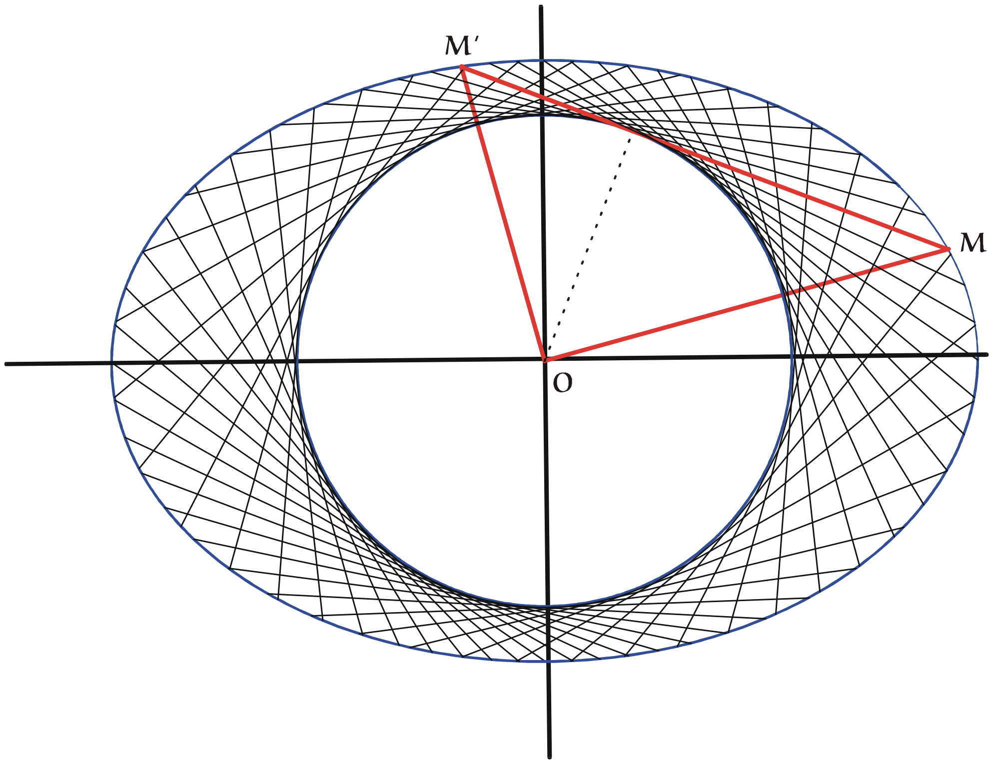
On a

$$h=OM\sin\alpha=OM'\cos\alpha$$

d'où

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=h^2\left(\frac{1}{OM^2}+\frac{1}{OM'^2}\right)=1$$

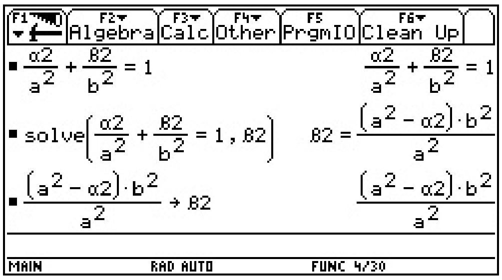
ce qui prouve que $h = d(O, (MM'))$ *est constant (on peut aussi calculer l'aire au carré du triangle* (OMM') *qui vaut* $\frac{1}{4}OM^2 \times OM'^2$ *mais aussi* $\frac{1}{4}h^2 MM'^2 = \frac{1}{4}h^2\left(OM^2 + OM'^2\right)$, *ce qui prouve que* $h^2\left(\frac{1}{OM^2} + \frac{1}{OM'^2}\right) = 1$)



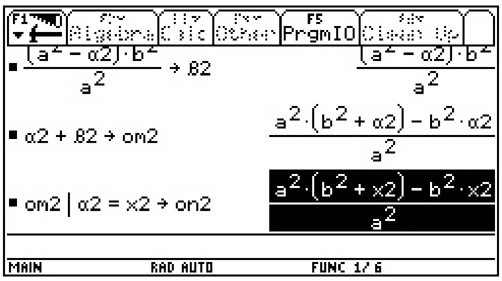
Voici la même solution, avec une calculatrice type Voyage 200 :
L'équation de l'ellispe est du type

$$\frac{\alpha_2}{a^2} + \frac{\beta_2}{b^2} = 1 \text{ avec } x_2 = \alpha^2 \text{ et } y_2 = \beta^2$$

on tire de cette équation la valeur de β_2



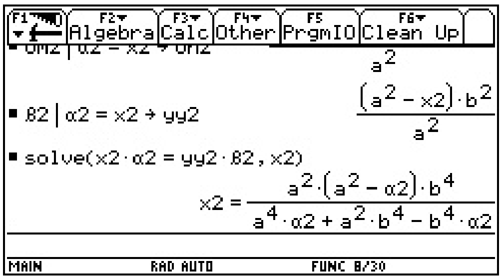
On injecte la valeur de β_2 *dans* $om_2 = OM^2 = \alpha_2 + \beta_2$. *On en déduit* y_2 *et* $on_2 = OM'^2$ *en remplaçant* α_2 *par* x_2.



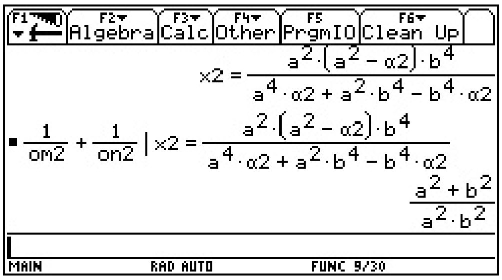
Si les droites (OM) et (OM') sont orthogonales alors $x\alpha = -y\beta$, ce qui par passage au carré donne

$$x_2\alpha_2 = y_2\beta_2$$

On remplace β_2 et y_2 par leurs valeurs en fonction de x_2 et α_2, on résout le système en x_2 (on a choisit $yy2$ comme variable pour y_2).



On injecte la vaeleur trouvée dans $\dfrac{1}{om_2} + \dfrac{1}{on_2}$.



La seconde solution est moins naturelle car elle repose sur l'utilisation des coordonnées polaires de M. Cette utilisation est surprenante car l'ellipse n'a pas d'équation polaire simple si le pôle est plaçé au centre de l'ellipse. Soit (ρ, θ) un système de coordonnées polaires de M. Le point M est sur l'ellipse si et seulement si

$$\frac{\rho^2\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\rho^2\sin^2\theta}{b^2} = 1$$

ce qui s'écrit

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\sin^2\theta}{b^2}$$

Si $(OM) \perp (OM')$, un système de coordonnées polaires de M' est alors $\left(\rho', \theta \pm \frac{\pi}{2}\right)$. On a donc

$$\begin{aligned}\frac{1}{\rho'^2} &= \frac{\cos^2\left(\theta \pm \frac{\pi}{2}\right)}{a^2} + \frac{\sin^2\left(\theta \pm \frac{\pi}{2}\right)}{b^2} \\ &= \frac{\sin^2\theta}{a^2} + \frac{\cos^2\theta}{b^2}\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{\rho'^2} &= \frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{a^2} + \frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{b^2} \\ &= \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\end{aligned}$$

est constant.
Cette solution est cependant très rapide !

Exercice 7.12 *Dans le repère où l'équation de la parabole est* $y^2 = 2px$*, notons* y_0 *l'abscisse de* M*, les coordonnées de* M *sont* $\left(\dfrac{y_0^2}{2p}, y_0\right)$*. L'équation de la normale en* M *est*

$$\begin{pmatrix} X - \dfrac{y_0^2}{2p} \\ Y - y_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{y_0}{p} \\ 1 \end{pmatrix} \quad = \quad = 0$$

(On écrit que la normale passe par M *et que* $\dfrac{dM}{dy} \quad = \quad \overrightarrow{v}$ *lui est normal)*

Le point de coordonnées (X, Y) *est à la fois sur la normale en* M *et sur la parabole si et seulement si*

$$\left\{ \begin{array}{c} Y^2 = 2pX \\ \dfrac{y_0}{p}\left(X - \dfrac{y_0^2}{2p}\right) + (Y - y_0) = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{c} Y^2 = 2pX \\ \dfrac{y_0}{p}\left(\dfrac{Y^2}{2p} - \dfrac{y_0^2}{2p}\right) + (Y - y_0) = 0 \end{array} \right.$$

soit

$$\left\{ \begin{array}{c} Y^2 = 2pX \\ (Y - y_0)\left(\dfrac{y_0}{2p^2}(Y + y_0) + 1\right) = 0 \end{array} \right.$$

Ainsi la normale coupe la parabole en M *(ouf!), mais aussi au point de coordonnées* $\left(\dfrac{y_n^2}{2p}, y_n\right)$ *où*

$$y_n = -y_0 - \frac{2p^2}{y_0}$$

La distance MN^2 *vaut alors*

$$\begin{aligned} (x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2 &= \left(\frac{y_n^2}{2p} - \frac{y_0^2}{2p}\right)^2 + (y_n - y_0)^2 \\ &= (y_n - y_0)^2 \left(\left(\frac{y_n + y_0}{2p}\right)^2 + 1\right) \\ &= \left(-2y_0 - \frac{2p^2}{y_0}\right)^2 \left(1 + \frac{p^2}{y_0^2}\right) \\ &= 4\frac{\left(y_0^2 + p^2\right)^3}{y_0^4} \end{aligned}$$

d'où

$$MN = \frac{2\left(y_0^2 + p^2\right)^{\frac{3}{2}}}{y_0^2}$$

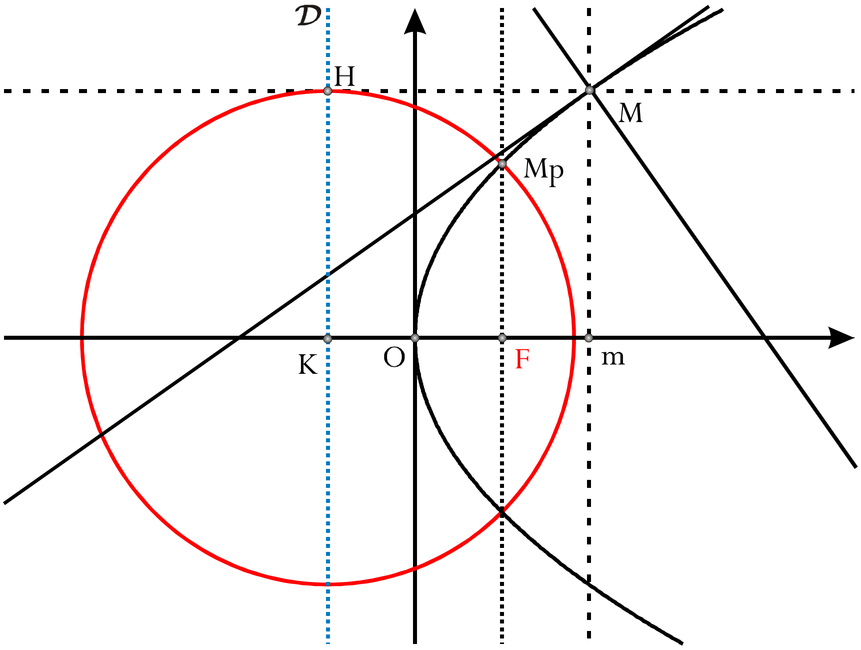
Lorsque P *décrit la parabole* $\mathcal{P}$ *(privée de son sommet),* y_0 *décrit* $\mathbb{R}^*$*. Par raison de symétrie (par rapport à l'axe focal de* $\mathcal{P}$*), il suffit de chercher le minimum de* MN *lorsque* M *décrit la demi-parabole au dessus de l'axe focal. On définit alors* f *par* $f(y_0) = \dfrac{2\left(y_0^2 + p^2\right)^{\frac{3}{2}}}{y_0^2}$*. On va chercher son minimum pour* $y_0 \in]0, +\infty[$*.* f *est dérivable sur* $]0, +\infty[$ *de* *dérivée égale à*

$$\begin{aligned} f'(y_0) &= 2\times\left(\frac{\frac{3}{2}\times 2y_0\times\left(y_0^2+p^2\right)^{\frac{3}{2}-1}}{y_0^2}-2\times\frac{\left(y_0^2+p^2\right)^{\frac{3}{2}}}{y_0^3}\right)\\ &= 2\left(\frac{3\sqrt{y_0^2+p^2}}{y_0}-\frac{2\left(y_0^2+p^2\right)\sqrt{y_0^2+p^2}}{y_0^3}\right)\\ &= \frac{2\sqrt{y_0^2+p^2}}{y_0^3}\left(3y_0^2-2\left(y_0^2+p^2\right)\right)\\ &= \frac{2\sqrt{y_0^2+p^2}}{y_0^3}\left(y_0^2-2p^2\right) \end{aligned}$$

Ainsi $f'(y_0)=0 \Longleftrightarrow y_0=\sqrt{2}p$ *et l'étude du signe de* f' *(qui est évident) assure qu'en* $y_0=\sqrt{2}p$, *la fonction* f *a un minimum. La distance* MN *minimale est donc*

$$MN\left(\sqrt{2}p\right)=\frac{2\left(2p^2+p^2\right)^{\frac{3}{2}}}{2p^2}=3\sqrt{3}p$$

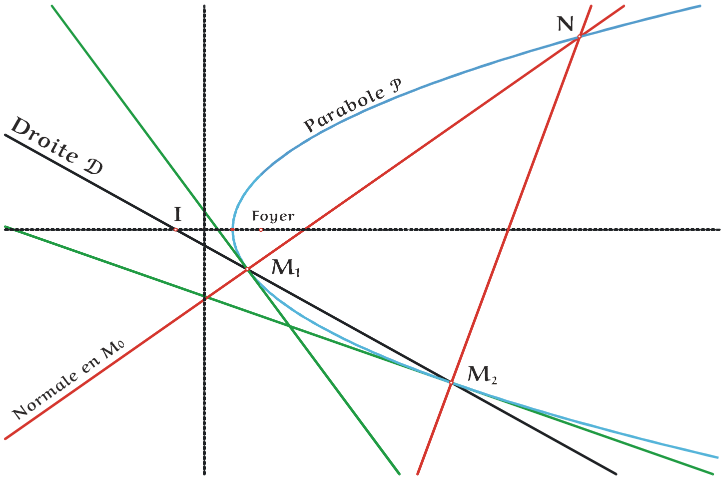
Le point d'ordonnée $\sqrt{2}p$ *a pour abscisse* $\dfrac{\left(\sqrt{2}p\right)^2}{2p}=p$.
Pour construire le point d'ordonnée positive qui réalise le minimum, on procède ainsi. Soit M_p *le point sur la corde focale perpendiculaire à l'axe focale. Les coordonnées de* M_p *sont* (p,p) *donc* $OM_p=\sqrt{2}p$. *On trace le cercle de centre* O *et passant par* M_p *; ce cercle coupe l'axe* Oy *en* H. *On construit le point* m *symétrique de* S *par rapport à* F. *Les point* m *et* H *sont les projections orthogonales de* M *sur* Ox *et* Oy *respectivement.*



Exercice 7.13 *On se place dans le repère focal où l'équation de* $\mathcal{P}$ *est* $y^2=2px$. $\mathcal{D}$ *n'est pas parallèle à l'axe focal donc le coupe en un point* $I(a,0)$. *Puisque* $\mathcal{D}$ *coupe* $\mathcal{P}$ *en deux points, l'un des deux n'est pas sur l'axe focal. On le note* M_1, *et ses coordonnées* (x_1,y_1) *(donc* $x_1=\frac{y_1^2}{2p}$ *et* $y_1\neq 0$*). L'équation de* $\mathcal{D}$ *est*

$$\mathcal{D}:\begin{vmatrix} x-a & \frac{y_1^2}{2p}-a\\ y & y_1\end{vmatrix}=y_1x+\left(a-\frac{y_1^2}{2p}\right)y-ay_1=0$$

Le point $M : \left(\frac{Y^2}{2p}, Y\right)$ *est à l'intersection de* $\mathcal{P}$ *et* $\mathcal{D}$ *si et seulement si* $y_1 \frac{Y^2}{2p} + \left(a - \frac{y_1^2}{2p}\right) Y - ay_1 = 0$*. Puisque cette équation admet* y_1 *comme solution (la droite* $\mathcal{D}$ *passe par* M_1 *!), l'autre point d'intersection est* $M_2 : (x_2, y_2) = \left(\frac{y_2^2}{2p}, y_2\right)$ *où* $y_2 = -\dfrac{2pa}{y_1}$ *(le produit des racines est* $y_1 y_2 = \dfrac{-a}{\frac{y_1}{2p}}$*).*



La tangente en $M_1\,(x_1, y_1)$ *est* $y_1 y = p\,(x + x_1)$ *(règle du dédoublement), la normale en ce point, a donc pour équation*

$$\begin{vmatrix} x - \frac{y_1^2}{2p} & p \\ y - y_1 & -y_1 \end{vmatrix} = -y_1 x - py + \frac{y_1^3}{2p} + py_1 = 0$$

Elle coupe $\mathcal{P}$ *en* M_1 *et en* $N : \left(\frac{y_n^2}{2p}, y_n\right)$*. Le réel* y_n *est donc racine de l'équation en* y

$$\frac{y_1}{2p} y^2 + py - \frac{y_1^3}{2p} - py_1 = 0$$

Une des racines est y_1 *(la normale en* M_1 *passe par* M_1*), l'autre est* $y_n = -\frac{2p^2}{y_1} - y_1$ *(la somme des racines est* $y_1 + y_n \cdots$*).*
De même, la normale en M_2 *coupe*$\mathcal{P}$ *en* M_2 *et en* $Q : \left(\frac{y_q^2}{2p}, y_q\right)$ *où* $y_q = -\frac{2p^2}{y_2} - y_2$*. Puisque* $\mathcal{D}$ *n'est pas normale à* $\mathcal{P}$ *en* M_1 *et en* M_2*, on a* $N \neq M_2$ *et* $Q \neq M_1$*. On cherche alors une cns pour que ces deux points soient confondus. Cela revient à*

$$y_n = y_q \Longleftrightarrow y_n = -\frac{2p^2}{y_1} - y_1 = -\frac{2p^2}{y_2} - y_2$$

donc à écrire que y_2 *est racine de l'équation en* Y

$$y_n = -\frac{2p^2}{Y} - Y$$

i.e. de l'équation $Y^2 - y_n Y + 2p^2 = 0$*. On sait que* y_1 *est une des racines de cette équation, l'autre racine est* $\frac{2p^2}{y_1}$ *(produit des racines). La cns cherchée est donc* $y_2 = \frac{2p^2}{y_1} \Longleftrightarrow -\frac{2pa}{y_1} = \frac{2p^2}{y_1} \Longleftrightarrow a = -p$*. Le point fixe cherché est le symétrique orthogonale du sommet par rapport au sommet de la parabole.*
Remarque : *Le triangle* $M_0 M_1 N$ *a son centre de gravité sur l'axe focal.*
On peut prouver que le cercle circonscrit au triangle $M_0 M_1 N$ *passe par le sommet de la parabole. Pour cela utilisons les affixes des points* M_0, M_1, N *et* S *le sommet. Notons* m_0, m_1, n *et* s *ces affixes, alors* $m_0 = \frac{y_0^2}{2p} + iy_0$*,* $m_1 = \frac{2p^3}{y_0^2} + \frac{2p^2}{y_0} i$*,* $n = \frac{\left(\frac{2p^2}{y_0} + y_0\right)^2}{2p} - \left(\frac{2p^2}{y_0} + y_0\right) i$ *et* $s = 0$*. Il suffit de vérifier que* $\frac{m_0 - m_1}{n - m_1} \div \frac{m_0}{n}$ *est réel (avec Maple ou une calculatrice,*

c'est très simple !).
Remarque : *On peut également raisonner ainsi : on considère une droite $\mathcal{D}$ d'équation $x = ay + b$ (les droites $y = cste$ ne coupent la parabole qu'en un point). Les points d'intersections de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ ont pour ordonnées les racines de $y^2 - 2pay - 2pb = 0$. Notons y_1 et y_2 les deux racines lorsqu'elles existent et M_1, M_2 les points de $\mathcal{P}$ d'ordonnées y_1 et y_2. L'équation de la normale en M_i est $y_i x + py - py_i - \dfrac{y_i^3}{p}$. Le point d'intersection des deux normales est solution de*

$$\left\{\begin{array}{l} y_1 x + py = py_1 + \dfrac{y_1^3}{p} \\ y_2 x + py = py_2 + \dfrac{y_2^3}{p} \end{array}\right.$$

On résout ce système par Cramer (valide si et seulement si $y_1 \neq y_2$) pour obtenir

$$\left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{2p}\left(y_1^2 + y_2^2 + y_1 y_2\right) \\ y = \dfrac{a}{p} y_1 y_2 \end{array}\right.$$

Puisque y_1 et y_2 sont racines de $y^2 - 2pay - 2pb = 0$, ona $y_1 + y_2 = -2pa$, $y_1 y_2 = -2pb$, $y_1^2 + y_2^2 = (y_1 + y_2)^2 - 2y_1 y_2 = 4p^2 a^2 + 4pb$, on trouve que le point d'intersection des deux normales est

$$\left\{\begin{array}{l} x = p + b + 2a^2 p \\ y = -2ba \end{array}\right.$$

Il est sur $\mathcal{P}$ si et seulement si $y^2 = 2px \Longleftrightarrow 2(b+p)(2a^2(b-p) - p)$. On retrouve la condition $b = -p$ qui indique que $\mathcal{D}$ passe par un point fixe.
L'autre condition est $2a^2(b-p) - p$. Dans ce cas, $b = \dfrac{p\left(1+2a^2\right)}{2a^2}$ mais alors l'équation de $\mathcal{P} \cap \mathcal{D}$ est $y^2 - 2pay - \dfrac{p^2\left(1+2a^2\right)}{a^2} = 0$ dont les racines sont $\dfrac{-p}{a}$ et $\dfrac{p\left(1+2a^2\right)}{a}$. Il existe donc d'autres solutions ? Non, en fait dans ce cas, $\mathcal{D}$ est normale au point de paramètre $y = \dfrac{-p}{a}$!

Exercice 7.14 *On se place dans le repère où la parabole $\mathcal{P}$ a pour équation $y^2 = 2px$. Soit A un point d'où l'on peut mener deux tangentes perpendiculaires à $\mathcal{P}$. On note M_0 et M_1 les points de contact de ces tangentes, et x_0 et x_1 les abscisses de ces points. Les tangentes en M_0 et M_1 ont pour équation*

$$yy_0 - p(x + x_0) = 0 \text{ et } yy_1 - p(x + x_1) = 0$$

elles se coupent donc en A solution de

$$\left\{\begin{array}{l} yy_0 - px = px_0 \\ yy_1 - px = px_1 \end{array}\right.$$

Un calcul simple donne l'ordonnée de A : $y = p\dfrac{x_0 - x_1}{y_0 - y_1} = p\dfrac{\dfrac{y_0^2}{2p} - \dfrac{y_1^2}{2p}}{y_0 - y_1} = \dfrac{y_0 + y_1}{2}$. Mais puisque les tangentes sont perpendiculaires, leurs vecteurs normaux sont orthogonaux donc

$$\begin{pmatrix} -p \\ y_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -p \\ y_1 \end{pmatrix} = 0 \Longleftrightarrow y_1 = \frac{-p^2}{y_0}$$

et ainsi

$$y = \frac{y_0 + y_1}{2} = \frac{y_0 - \dfrac{p^2}{y_0}}{2} \text{ et } x = \frac{yy_0}{p} - x_0 = \frac{y_0^2 - p^2}{2p} - x_0 = -\frac{p}{2}$$

On en déduit que A est sur la directrice de la parabole.
Réciproquement, soit A sur la directrice, si y est son ordonnée, alors la tangente en $M_0 \in \mathcal{P}$ d'ordonnée y_0 passe par

A si et seulement si que $yy_0 - p\left(-\dfrac{p}{2} + \dfrac{y_0^2}{2p}\right) = 0 \Longleftrightarrow y_0^2 - 2yy_0 - p^2 = 0$ *, cette équation a toujours deux solutions* y_0 *et* $y_1 = -\dfrac{p^2}{y_0}$ *(car* $\Delta' = y^2 + p^2 > 0$*). On a donc deux tangentes qui passent par A et issues des points* M_0 *et* M_1 *d'ordonnées* y_0 *et* y_1*, elles sont bien perpendiculaires car* $y_1 = \dfrac{-p^2}{y_0}$.
Le lieu cherché est donc la directrice de $\mathcal{P}$.
Montrons maintenant que le segment reliant M_0 *et* M_1 *contient le foyer F. La forme de* Δ' *incite à poser* $y = p\,\mathrm{sh}\,\theta$ *l'ordonnée de A, alors les coordonnées de A sont* $\begin{pmatrix} \dfrac{\mathrm{sh}^2\theta}{2p} \\ \mathrm{sh}\,\theta \end{pmatrix}$*, l'équation en* y_0 *s'écrit alors* $y_0^2 - 2p\,\mathrm{sh}\,\theta y_0 - p^2 = 0$, $\Delta' = p^2\left(1 + \mathrm{sh}^2\theta\right) = (p\,\mathrm{ch}\,\theta)^2$*, les racines sont donc* $y_0 = p(\mathrm{sh}\,\theta - \mathrm{ch}\,\theta) = -pe^{-\theta}$ *et* $y_1 = pe^{\theta}$*. D'où les coordonnées de* M_0 *et* M_1 *:*

$$M_0 : \begin{pmatrix} \dfrac{pe^{-2\theta}}{2} \\ -pe^{-\theta} \end{pmatrix} \text{ et } M_1 : \begin{pmatrix} \dfrac{pe^{2\theta}}{2} \\ pe^{\theta} \end{pmatrix}$$

On a alors

$$\frac{e^{\theta}}{2\,\mathrm{ch}\,\theta}\begin{pmatrix} \dfrac{pe^{-2\theta}}{2} \\ -pe^{-\theta} \end{pmatrix} + \frac{e^{-\theta}}{2\,\mathrm{ch}\,\theta}\begin{pmatrix} \dfrac{pe^{2\theta}}{2} \\ pe^{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{p}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

ce qui prouve que F est le barycentre de $\left(\left(M_0, \dfrac{e^{\theta}}{2\,\mathrm{ch}\,\theta}\right), \left(M_1, \dfrac{e^{-\theta}}{2\,\mathrm{ch}\,\theta}\right)\right)$.
Quelques remarques : *On peut même préciser les coefficients en fonction de l'ordonnée y de A. En effet si* $y = p\,\mathrm{sh}\,\theta$*, alors*

$$\begin{aligned} \mathrm{ch}\,\theta &= \sqrt{1 + \frac{y^2}{p^2}} = \frac{\sqrt{y^2 + p^2}}{p} \\ e^{\theta} &= \mathrm{ch}\,\theta + \mathrm{sh}\,\theta = \frac{y + \sqrt{y^2 + p^2}}{p} \\ e^{-\theta} &= \mathrm{ch}\,\theta - \mathrm{sh}\,\theta = \frac{-y + \sqrt{y^2 + p^2}}{p} \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{e^{\theta}}{2\,\mathrm{ch}\,\theta} &= \frac{1}{2}\frac{y + \sqrt{y^2 + p^2}}{\sqrt{y^2 + p^2}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{y}{\sqrt{y^2 + p^2}} \\ \frac{e^{-\theta}}{2\,\mathrm{ch}\,\theta} &= \frac{1}{2}\frac{-y + \sqrt{y^2 + p^2}}{\sqrt{y^2 + p^2}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{y}{\sqrt{y^2 + p^2}} \end{aligned}$$

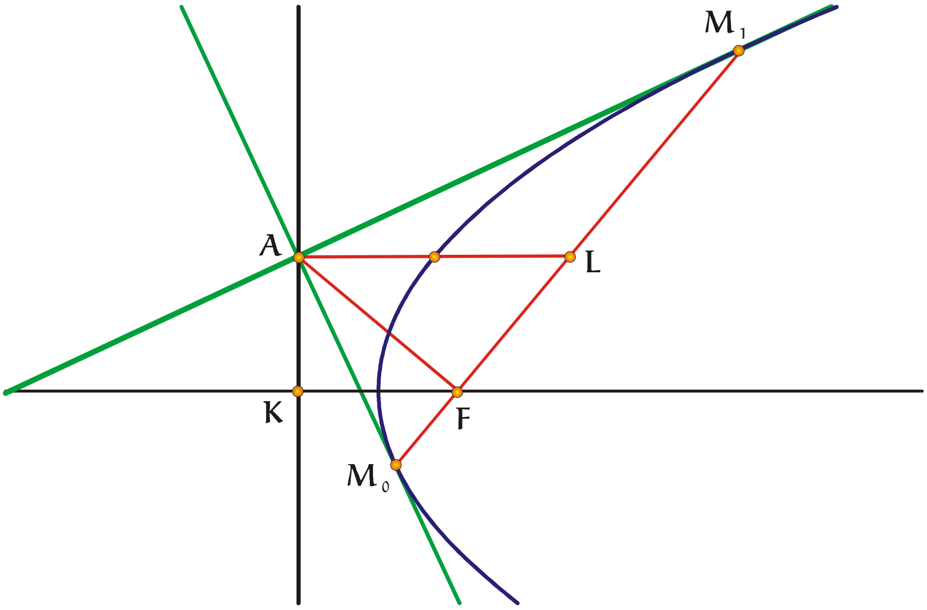
On constate donc que si L est le milieu de M_0 *et* M_1 *(le point L a la même ordonnée que A !), alors,*

$$\overrightarrow{LF} = \frac{1}{2}\frac{y}{\sqrt{y^2 + p^2}}\overrightarrow{M_1M_0}$$

avec les notations de la figure suivante :

$$\frac{LF}{M_1M_0} = \frac{1}{2}\frac{KA}{FA}$$

On peut également prouver que le milieu de $[L, A]$ est sur $\mathcal{P}$.



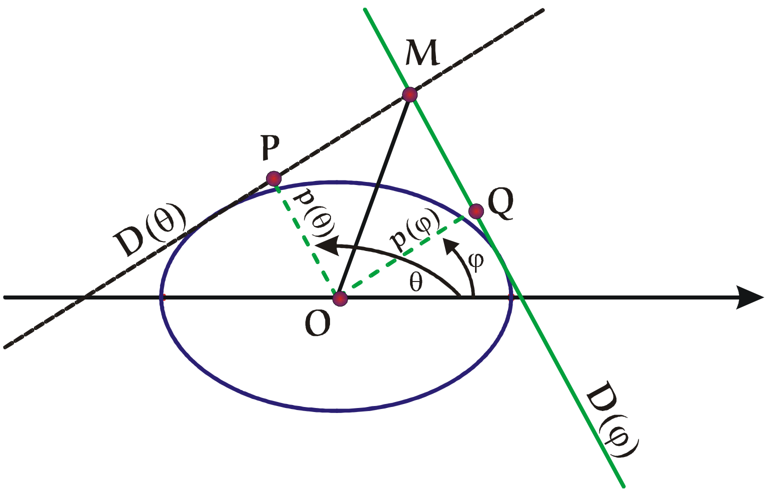
Exercice 7.15 *Une tangente à $\mathcal{C}$ en M_0 de coordonnées (x_0, y_0) a pour équation $\dfrac{xx_0}{a^2} + \varepsilon\dfrac{yy_0}{b^2} = 1$ (en particulier une tangente à $\mathcal{C}$ ne passe jamais par le centre de la conique). La droite $\mathcal{D}$ est donc tangente à $\mathcal{C}$ si et seulement s'il existe (x_0, y_0) tels que*

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\cos\theta}{p(\theta)} = \dfrac{x_0}{a^2} \\ \dfrac{\sin\theta}{p(\theta)} = \dfrac{y_0}{b^2} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x_0 = a^2\dfrac{\cos\theta}{p(\theta)} \\ y_0 = b^2\dfrac{\sin\theta}{p(\theta)} \end{array}\right.$$

Or $M_0 \in \mathcal{C}$ donc $\dfrac{x_0^2}{a^2} + \varepsilon\dfrac{y_0^2}{b^2} = 1 \Longrightarrow \dfrac{1}{a^2}\left(a^2\dfrac{\cos\theta}{p(\theta)}\right)^2 + \dfrac{\varepsilon}{b^2}\left(b^2\dfrac{\sin\theta}{p(\theta)}\right)^2 = \dfrac{a^2\cos^2\theta + \varepsilon b^2\sin^2\theta}{p^2(\theta)} = 1$ *ainsi*

$$p^2(\theta) = a^2\cos^2\theta + \varepsilon b^2\sin^2\theta$$

Pour le cercle de Monge, on sait que $(\theta, p(\theta))$ représente un système de coordonnées polaire de la projection orthogonale du pôle sur $\mathcal{D}$. Soit M, un point de l'orthoptique, i.e. un point d'où l'on peut mener deux tangentes perpendiculaires. Soient $\mathcal{D}(\theta)$ et $\mathcal{D}(\varphi)$ ces tangentes, alors (c.f. dessin ci dessous), puisque $\mathcal{D}(\theta) \perp \mathcal{D}(\varphi)$, on a $\theta = \varphi \pm \dfrac{\pi}{2}\ (\pi)$ et $(OPMQ)$ est un rectangle. En effet (OP) et (PM) sont perpendiculaire (P est la projection orthogonale de O), (PM) et (QM) aussi, et (OQ) et (QM) aussi. Le $\pm$ provient du fait que l'on ne sait pas qui est $D(\theta)$ et $D(\varphi)$, sur le dessin, on a choisi $\theta > \varphi$.



D'après Pythagore,

$$\begin{aligned} OM^2 &= p(\theta)^2 + p(\varphi)^2 \\ &= a^2\cos^2\theta + \varepsilon b^2 \sin^2\theta + a^2\cos^2\varphi + \varepsilon b^2\sin^2\varphi \end{aligned}$$

Mais si $\theta = \varphi \pm \dfrac{\pi}{2}$, $\cos^2\theta = \sin^2\varphi$ *et* $\sin^2\theta = \cos^2\varphi$ *ainsi*

$$OM^2 = a^2 + \varepsilon b^2$$

Pour l'ellipse ($\varepsilon = 1$), on a donc un cercle centré au centre de l'ellipse, de rayon $\sqrt{a^2+b^2}$ (c'est le cercle construit sur le rectangle circonscrit à l'ellipse). Pour l'hyperbole ($\varepsilon = -1$), il n'existe pas de point d'où l'on peut mener deux tangentes perpendiculaires si $b \geq a$ (i.e. puisque $e = \dfrac{c}{a}$, $c^2 = a^2 + b^2 \geq 2a^2$ si $e \geq \sqrt{2}$), sinon on obtient un cercle centré au centre de l'ellipse et de rayon $\sqrt{a^2-b^2}$ (Pour $a = b$, il y a dégénérescence du cercle en un point, les deux "tangentes" deviennent les asymptotes).

Exercice 7.16 *On se place dans le repère où l'équation de la parabole est l'équation réduite $y^2 = 2px$, on note $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ les coordonnées de A. Une équtaion de $\mathcal{D}$ est alors de la forme $a(x-\alpha) + b(y-\beta) = 0$ (où $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est un vecteur normal). On détermine les points d'intersection de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ (pas complètement), soit $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ les coordonnées d'un tel point, alors $x = \dfrac{y^2}{2p}$ et $a\left(\dfrac{y^2}{2p} - \alpha\right) + b(y-\beta) = 0$ ainsi y est solution de l'équation du second degré (sauf si $a = 0$)*

$$ay^2 + 2bpy - (2ap\alpha + 2bp\beta) = 0$$

(Cette équation a toujours deux solutions car $\delta' = b^2p^2 + (2ap\alpha + 2bp\beta)^2 > 0$, on a bien deux points d'intersection !). On a donc deux points M_1 et M_2 de coordonnées $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{y_1^2}{2p} \\ y_1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{y_2^2}{2p} \\ y_2 \end{pmatrix}$ où $y_1 + y_2 = -\dfrac{2bp}{a}$ et $y_1y_2 = -2p\alpha - \dfrac{2bp\beta}{a}$.
Une équation de la tangente en M_1 est (règle du dédoublement) $yy_1 = p(x + x_1)$ et celle de la tangente en M_2 : $yy_2 = p(x + x_2)$, les coordonnées du point d'intersection de ces deux tangentes sont donc solutions du système

$$\begin{cases} px - yy_1 = -px_1 \\ px - yy_2 = -px_2 \end{cases}$$

On résout ce système avec les formules de Cramer, le déterminant du système est

$$D = \begin{vmatrix} p & -y_1 \\ p & -y_2 \end{vmatrix} = p(y_1 - y_2) \neq 0 \text{ (il vaut } \pm 2\delta'\text{)}$$

on a donc toujours une unique solution qui est

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{D}\begin{vmatrix} -px_1 & -y_1 \\ -px_2 & -y_2 \end{vmatrix} = p\frac{x_1y_2 - x_2y_1}{D} = \frac{p}{D}\left(\frac{y_1^2}{2p}y_2 - \frac{y_2^2}{2p}y_1\right) \\ &= \frac{1}{2}y_1y_2\frac{y_1-y_2}{D} = \frac{1}{2p}y_1y_2 = \frac{1}{2p}\times\left(-2p\alpha - \frac{2bp\beta}{a}\right) \\ &= -\alpha - \beta\frac{b}{a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= \frac{\begin{vmatrix} p & -px_1 \\ p & -px_2 \end{vmatrix}}{D} = p^2\frac{x_1 - x_2}{D} \\ &= \frac{p^2}{D}\left(\frac{y_1^2}{2p} - \frac{y_2^2}{2p}\right) = \frac{1}{2}p(y_1+y_2)\frac{y_1-y_2}{D} \\ &= \frac{1}{2}(y_1+y_2) = \frac{1}{2}\times\left(-\frac{2bp}{a}\right) = -p\frac{b}{a} \end{aligned}$$

Le point d'intersection des tangentes décrit donc la droite d'équation Δ

$$x = -\alpha + \frac{\beta}{p} y$$

(on a une représentation paramétrique de cette droite en posant $t = \dfrac{b}{a}$ *qui prend toutes les valeurs réelles).*
Si A *est sur l'axe focal alors* $\beta = 0$*, cette droite est de la forme* $x = -\alpha$*, elle est parallèle à la directrice et passe par le symétrique de* A *par rapport au sommet de la parabole. Si* A *est au foyer, cette droite est donc la directrice.*
Remarque : *Si* $\mathcal{D}$ *est parallèle à l'axe focal, elle ne coupe* $\mathcal{P}$ *qu'en un seul point (cas où* $a = 0$*).* $\mathcal{D}$ *a, dans ce cas pour équation* $y = \beta$*, elle coupe* $\mathcal{P}$ *en* $\begin{pmatrix} \dfrac{\beta^2}{2p} \\ \beta \end{pmatrix}$*, l'équation de la tangente en ce point est* $\beta y - p\left(x + \dfrac{\beta^2}{2p}\right) = 0$*, cette tangente est parallèle à* Δ.

Exercice 7.17 *On se place dans le repère où la parabole a pour équation réduite* $y^2 = 2px$*. Une corde focale coupe la parabole en deux points si et seulement si elle n'est pas parallèle à l'axe focal. Son équation est donc de la forme* $\left(x - \dfrac{p}{2}\right) = cy$ *(où* $c = \operatorname{cotan}\theta$*, avec* θ *l'angle entre la corde et l'axe focal,* $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$*,* $\theta \neq 0$*). On obtient les points d'intersection en résolvant le système*

$$\left\{ \begin{array}{c} \left(x - \dfrac{p}{2}\right) = cy \\ y^2 = 2px \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{c} \dfrac{y^2}{2p} - cy - \dfrac{p}{2} = 0 \\ x = \dfrac{y^2}{2p} \end{array} \right.$$

qui donne deux solutions

$$y_1 = p\left(c + \sqrt{c^2+1}\right) > 0 \text{ et } y_2 = p\left(c - \sqrt{c^2+1}\right) < 0$$

Les points M_1 *et* M_2 *ont donc pour coordonnées*

$$M_1 : \begin{pmatrix} p\left(c^2 + \dfrac{1}{2} + c\sqrt{c^2+1}\right) \\ p\left(c + \sqrt{c^2+1}\right) \end{pmatrix} \text{ et } M_2 : \begin{pmatrix} p\left(c^2 + \dfrac{1}{2} - c\sqrt{c^2+1}\right) \\ p\left(c - \sqrt{c^2+1}\right) \end{pmatrix}$$

Le centre C *du cercle de diamètre* $[M_1, M_2]$ *a donc pour coordonnées*

$$C : \begin{pmatrix} p\left(c^2 + \dfrac{1}{2}\right) \\ pc \end{pmatrix}$$

On peut déjà dire que le centre du cercle décrit la parabole $\mathcal{P}'$ *d'équation* $x = p\left(\dfrac{y^2}{p^2} + \dfrac{1}{2}\right) \iff y^2 = p\left(x - \dfrac{p}{2}\right)$*. Le sommet de* $\mathcal{P}'$ *est donc au foyer de* $\mathcal{P}$*, le paramètre de* $\mathcal{P}'$ *est égal à la moitié de celui de* $\mathcal{P}$*. Il reste à prouver que le cercle de diamèter* $[M_1, M_2]$ *est bien tangent à la directrice de* $\mathcal{D}$*. Le rayon* R *de ce cercle vérifie*

$$R^2 = \|CM_1\|^2 = \left(c\sqrt{c^2+1}\right)^2 + \left(\sqrt{c^2+1}\right)^2 = \left(c^2+1\right)^2$$

Ainsi

$$R = c^2 + 1$$

et

$$d(C, \mathcal{D}) = \frac{p}{2} + p\left(c^2 + \frac{1}{2}\right) = c^2 + 1$$

ce qui prouve la tangence !
Remarque : *En utilisant le fait que* $c = \operatorname{cotan}\theta$*, on a, par exemple,*

$$M_1 : \begin{pmatrix} \dfrac{p}{2}\operatorname{cotan}^2\dfrac{\theta}{2} \\ p\operatorname{cotan}\dfrac{\theta}{2} \end{pmatrix} \text{ et } M_2 \begin{pmatrix} \dfrac{p}{2}\tan^2\dfrac{\theta}{2} \\ -p\tan\dfrac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

$$C:\begin{pmatrix} p\left(\cot^2\theta+\dfrac{1}{2}\right) \\ p\cot\theta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p\left(\dfrac{1}{\sin^2\theta}-\dfrac{1}{2}\right) \\ p\cot\theta \end{pmatrix} \text{ et } R=\frac{1}{\sin^2\theta}$$

Exercice 7.18 *L'équation de la conique est* $r=\dfrac{p}{1+e\cos\theta}$, *ce qui s'écrit* $r(1+e\cos\theta)=p\Longleftrightarrow r=p-er\cos\theta$. *En coordonnées cartésiennes, si le point* $M:\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *est sur* $\mathcal{C}$ *alors*

$$r^2=x^2+y^2=(p-ex)^2\Longrightarrow\left(1-e^2\right)x^2+y^2+2epx=p^2$$

Soit $M_0:\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ *de* $\mathcal{C}$ *le point de coordonnées polaires* (r_0,θ_0), *on a alors*

$$x_0=r_0\cos\theta_0,\ y_0=r_0\sin\theta_0 \text{ et } r_0=p-ex_0$$

L'équation de la tangente en $\mathcal{C}$, *obtenue par dédoublement, est*

$$T:\left(1-e^2\right)xx_0+yy_0+ep\,(x+x_0)=p^2$$

Elle s'écrit donc

$$\begin{aligned} T &: xx_0+yy_0+epx-e^2xx_0+p\,(ex_0-p)=0 \\ T &: xx_0+yy_0+ex\,(p-ex_0)=p\,(p-ex_0) \end{aligned}$$

Avec $r=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$, *on obtient*

$$T:rr_0\cos\theta\cos\theta_0+rr_0\sin\theta\sin\theta_0+err_0\cos\theta=pr_0$$

puisque $r_0\neq0$ *(la conique ne passe jamais par le pôle), on obtient*

$$r=\frac{p}{\cos(\theta-\theta_0)+e\cos\theta}$$

3 Les exotiques

Exercice 7.19 *La définition bifocale de l'ellipse donne*

$$PF+PF'=2a=6$$

or $PF=2PF'$ *donc* $3PF'=6\Longrightarrow PF'=2$ *et* $PF=4$. *On a donc* $PF^2+PF'^2=4+16=20$. *Mais,* $c^2=a^2-b^2=9-4=5$ *donc* $2c=FF'=2\sqrt{5}$ *et ainsi*

$$FF'^2=PF^2+PF'^2$$

On a donc un triangle rectangle en P *! Et ainsi son aire vaut* $\dfrac{1}{2}PF\times PF'=4$.

Pour construire P, *on trace le cercle de diamètre* FF' *(centré en* O *et de rayon* $\sqrt{5}$*), ce cercle coupe l'ellipse en quatre points. Plus précisement, il s'agit de résoudre le système*

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1 \\ x^2+y^2=5 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2+\dfrac{9y^2}{4}=9 \\ x^2+y^2=5 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y^2=\dfrac{16}{5} \\ x^2+y^2=5 \end{array}\right.$$

Ce qui donne bien quatre points (symétriques par rapports aux deux axes, heureusement ! En fait il suffit de trouver une solution, par symétrie on a les quatre points).

$$P_1:\begin{pmatrix} \dfrac{3}{\sqrt{5}} \\ \dfrac{4}{\sqrt{5}} \end{pmatrix},\ P_2:\begin{pmatrix} \dfrac{3}{\sqrt{5}} \\ -\dfrac{4}{\sqrt{5}} \end{pmatrix},\ P_3:\begin{pmatrix} -\dfrac{3}{\sqrt{5}} \\ \dfrac{4}{\sqrt{5}} \end{pmatrix},\ P_4:\begin{pmatrix} -\dfrac{3}{\sqrt{5}} \\ -\dfrac{4}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

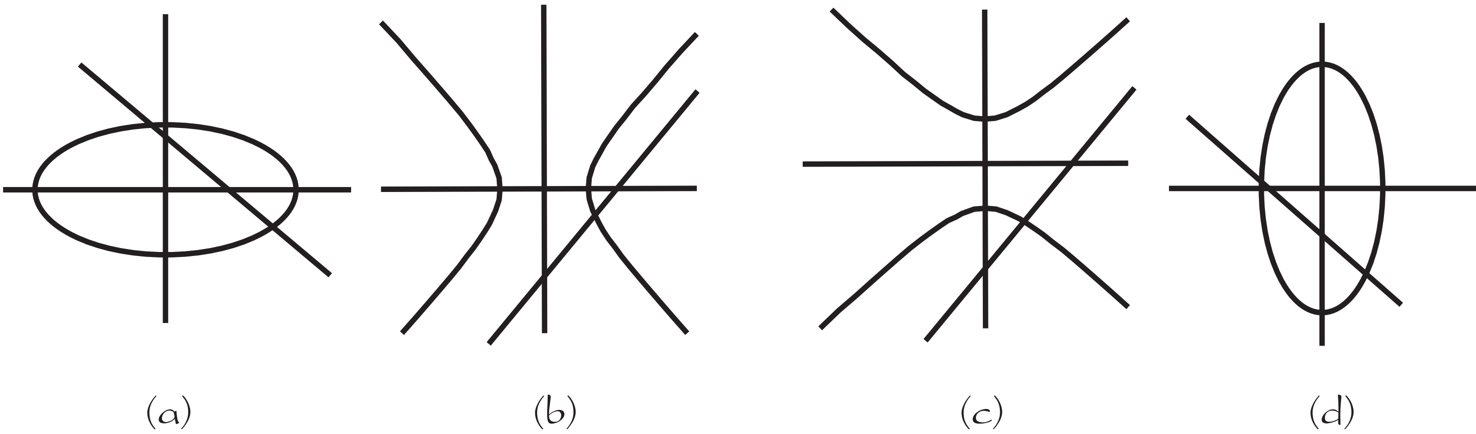
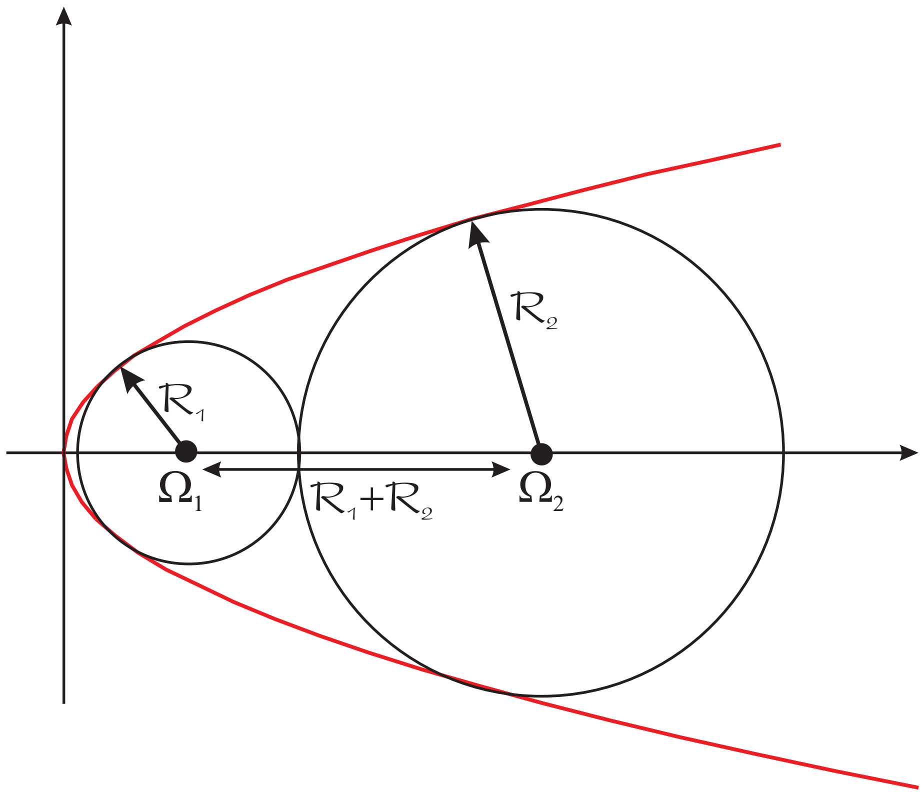


FIG. 1

Exercice 7.20 *L'équation de la droite s'écrit $y = ax + b$, ainsi a est la pente et b l'ordonnée à l'origine. La conique a pour équation $\dfrac{x^2}{a} + \dfrac{y^2}{b} = 1$, il s'agit presque d'une équation réduite.*
Dans le cas (a), la pente est négative ($a < 0$) et l'ordonnée à l'origine positive ($b > 0$), on doit donc avoir une hyperbole, ce cas est impossible. Le cas (c) est analogue, il conduit à a et b négatif, la conique est vide. Il reste les cas (b) et (c) pour lesquels on a $a > 0$ (pente positive) et $b < 0$ et qui donne une équation d'hyperbole du type $\dfrac{x^2}{a} - \dfrac{y^2}{-b} = 1$ dont l'axe focal est Ox. Le cas (c) est à exclure. Seul le cas (c) est possible !

Exercice 7.21 *On se place dans le repère où la parabole a pour équation réduite $y^2 = 2px$. Soit $\Omega_1 : (u_1, 0)$ le centre de C_1 et R_1 son rayon, $\Omega_2 : (u_2, 0)$ le centre de $\mathcal{C}_2$ et R_2 son rayon.*



L'équation de $\mathcal{C}_1$ est $(x - u_1)^2 + y^2 = R_1^2$, ce cercle coupe la parabole en des points dont les coordonnées sont solutions *de*

$$\left\{\begin{array}{c}(x-u_1)^2+y^2=R_1^2\\ y^2=2px\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c}(x-u_1)^2+2px=R_1^2\\ y^2=2px\end{array}\right.$$

On a donc en général deux solutions en x, puis deux solutions en y, ce qui donne quatre points. Il y tangence lorsque le discriminant de l'équation en x est nul, soit lorsque

$$p^2-2u_1p+R_1^2=0 \Longleftrightarrow u_1=\frac{R_1^2+p^2}{2p}$$

On a de même

$$u_2=\frac{R_2^2+p^2}{2p}$$

Puisque la distance entre les deux centres vaut R_1+R_2, on a

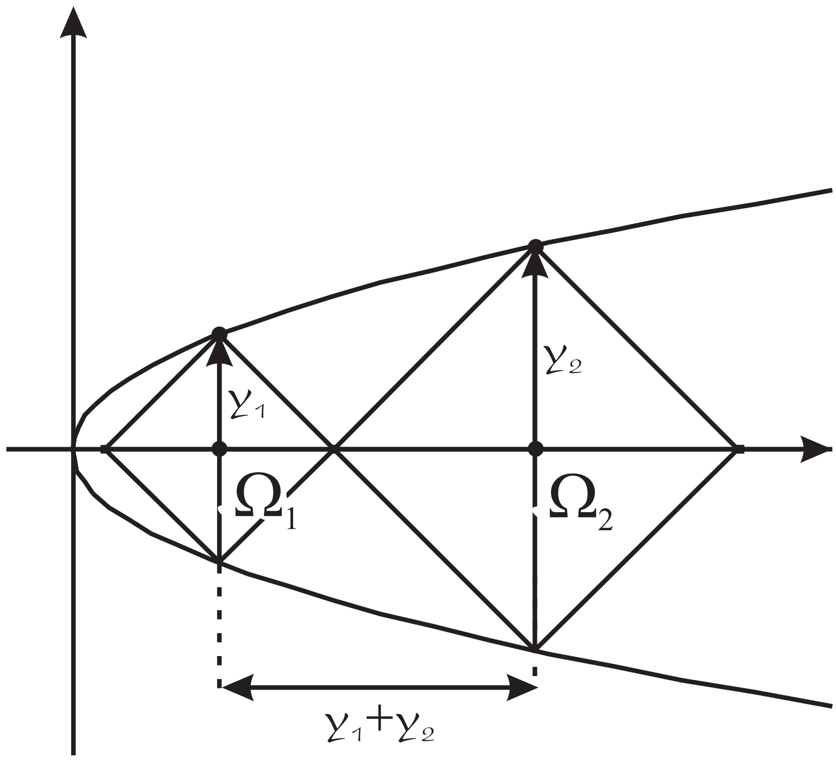
$$u_2-u_1=R_1+R_2=\frac{R_2^2+p^2}{2p}-\frac{R_1^2+p^2}{2p}=(R_1+R_2)\,\frac{R_2-R_1}{2p}$$

Ce qui donne

$$R_2=R_1+2p$$

Ainsi lorsque l'on a une chaîne de cerles, les rayon forment une suite arithmétique de raison $2p$.

Exercice 7.22 *On se place dans le repère où la parabole a pour équation réduite $y^2=2px$.*



Soit Ω_1 le centre du premier carré, et $2y_1$ la longueur de sa diagonale, de même Ω_2 et y_2 étant les mêmes données pour le second carré. Les coordonées de Ω_1 sont alors $\left(\dfrac{y_1^2}{2p},y_1\right)$ et celle de Ω_2 sont $\left(\dfrac{y_2^2}{2p},y_2\right)$. On en déduit que

$$\frac{y_2^2}{2p}-\frac{y_1^2}{2p}=y_1+y_2$$

soit

$$y_2-y_1=2p$$

La suite des longeurs des demi-diagonales est arithmétique de raison $2p$*. La suite des longeurs des côtés est donc arithmétique de raison* $2\sqrt{2}p$*.*