ETUDES DES FONCTIONS

LISTE DES COMPETENCES A ACQUERIR	
CODE COMPETENCE	**DENOMINATION**
F101	Définir une fonction numérique à variable réelle
F102	Définir une application
F103	Différence entre fonction et application
F104	Fonction injective, fonction surjective, fonction bijective
F105	Calculer l'image d'un nombre
F106	Déterminer l'image d'un intervalle
F107	Détermination du domaine de définition
F108	Etude de la parité d'une fonction
F109	Représenter graphiquement une fonction
F110	Représentation de la courbe d'une fonction associée
F111	Dresser le tableau de variation
F112	Etudier le signe d'une fonction sur son tableau de variation
F113	Déterminer le nombre de solution de l'équation $f(x)=0$ grâce au tableau de variations
F114	Extremum d'une fonction
F115	Montrer qu'un point est centre de symétrie pour la courbe d'une fonction
F116	Montrer qu'une droite est axe de symétrie pour la courbe d'une fonction
F117	Détermination des asymptotes d'une fonction
F118	Montrer que le point de concours des asymptotes est centre de symétrie
F119	
F120	
F121	
F122	
F123	
F124	

Exercice n°1

Partie A : Cours

1. Démontrer que si f et g sont deux fonctions strictement décroissantes sur un intervalle I.alors la fonction $f+g$ est strictement décroissante sur I.
2. Soit λ un réel strictement positif et f une fonction strictement décroissante sur I. Montrer que la fonction λf a le même sens de variation que f.
3. Soit f une fonction strictement décroissante sur I et qui prend ses valeurs $f(x)$ dans J et g une fonction strictement croissante sur J. Montrer que la fonction $g \circ f$ est strictement décroissante sur I.
4. On suppose, **dans cette question**, que f est **impaire**.

Démontrer que si f est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$ alors f est strictement décroissante sur $]-\infty;0]$.

Partie B : Applications :

1. Déterminer le sens de variation de la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=-2\sqrt{x}+\frac{1}{x}$.
2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=\sin 2x$.
3. a. Montrer que g est π – périodique. Sur quel intervalle suffit-il d'étudier la fonction g ?

b. Étudier la parité de g. Sur quel intervalle suffit-il d'étudier la fonction g ?

c. Montrer que g est la composée de deux fonctions de référence que l'on précisera.

d. Déterminer le sens de variation g sur

$\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

e. Dresser son tableau de variation sur une période.

f. Donner une ébauche de la représentation de g sur une période.

Exercice n° 2

On considére les applications : $f:[-4;1]\to[-4;5]$, $x\mapsto x^2+2x-3$ et $g:[-4;5]\to[-4;-1]$, $x\mapsto 1-\sqrt{x+4}$

1. Démontrer que, pour tout x élément de l'ensemble de définition de f, on a $f(x)=(x+1)^2-4$
2. En déduire que (C_f), courbe représentative de f, est l'image d'une partie de la parabole $(C_0): y=x^2$ par une translation que l'on déterminera.
3. Construire en interrompu (C_0) et en trait continu la courbe (C_f)
4. En déduire que f est bijective.
5. Démontrer que g est la bijection réciproque de f.
6. Tracer en stylo bleu la courbe représentative de g sur le même graphique que celle de f.

Exercice n°3

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-2x^2+x+1$

Dresser le tableau de variation de f (sans calculer la dérivée), puis donner l'allure de la courbe représentative de f , en plaçant avec précision le sommet et les points d'intersection avec les axes du repère.

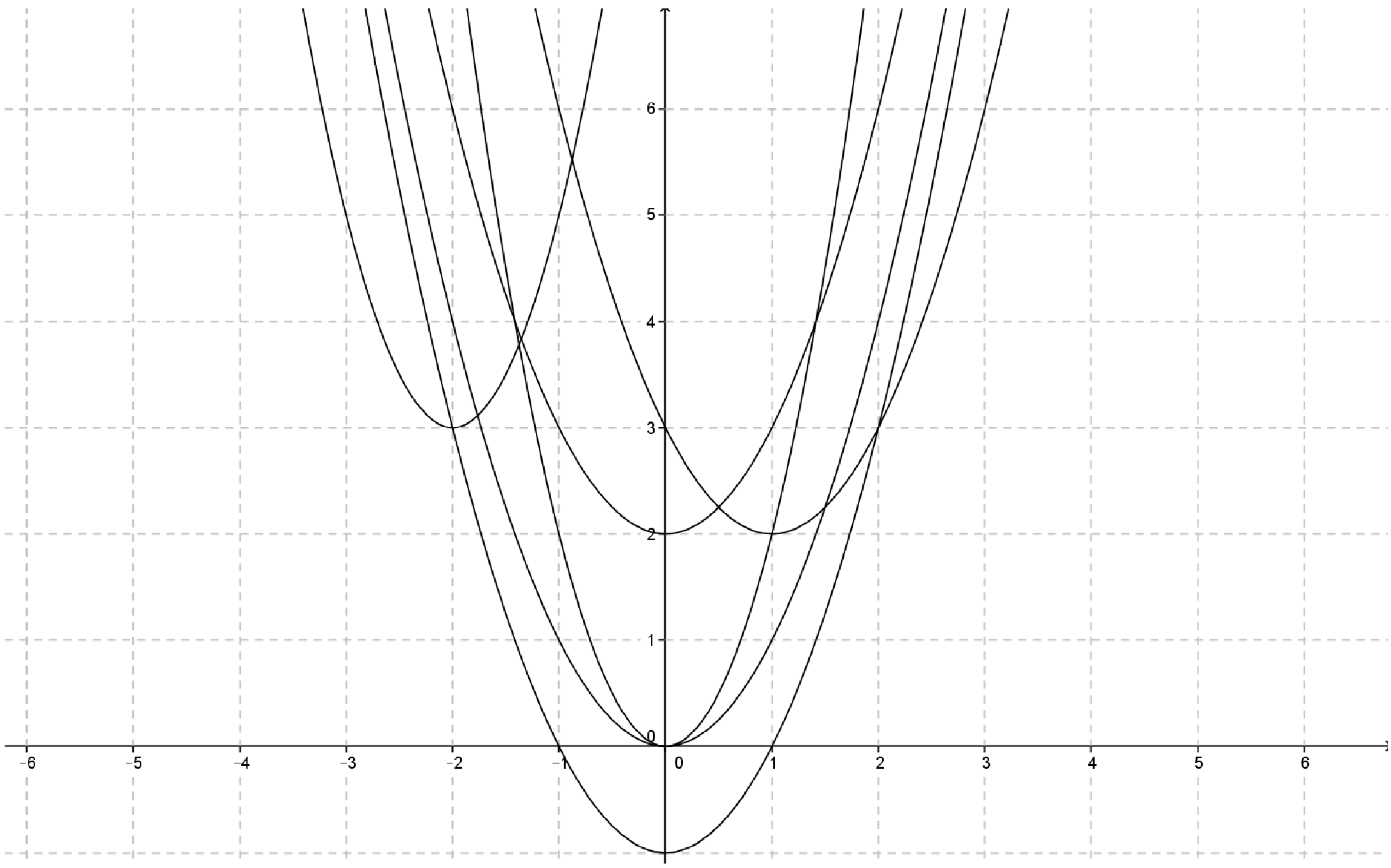
Exercice n°4

Soit f et g les fonctions définies par $f(x)=x^2-4$ et $g(x)=\sqrt{x}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $g\circ f$.
2. Exprimer $g\circ f(x)$ en fonction de x pour tout réel x de $D_{g\circ f}$.

Exercice n°5

1) Combien de représentations graphiques de fonction numérique avons-nous sur le schéma ci – dessous
2) Donner l'expression de chaque fonction en fonction de la variable x



Exercice n°6

On considère les fonctions suivantes : $f_1 : x \to x^2$; $f_2 : x \to \sqrt{x}$ et $f_3 : x \to x-4$ Donner l'ensemble de définition et l'expression des fonctions composées suivantes : ; ;

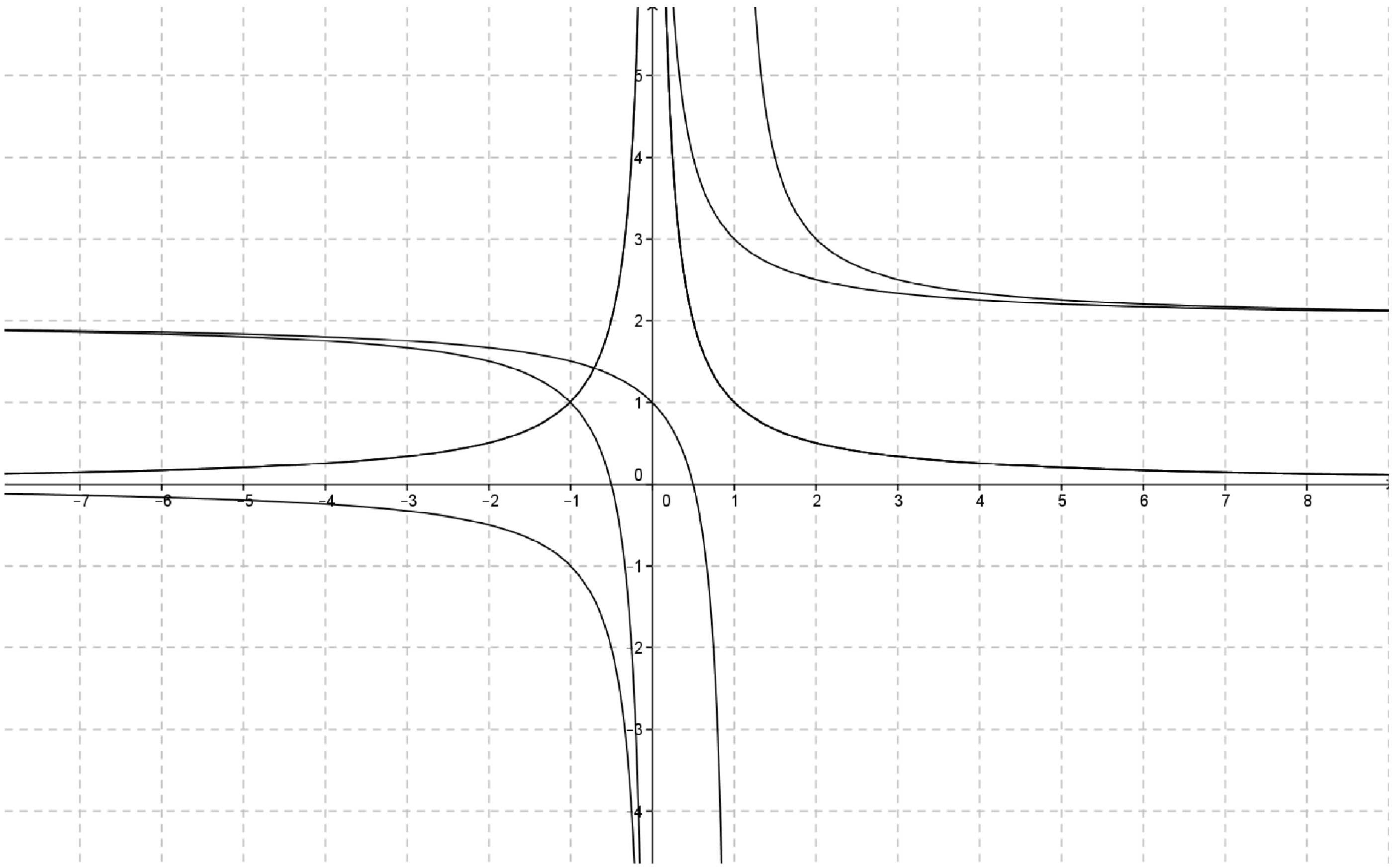
1) $f_1 \circ g_1$
2) $g_1 \circ f_1$
3) $g_1 \circ f_2$;
4) $f_1 \circ f_1$;
5) $f_1 \circ g_1 \circ f_2$

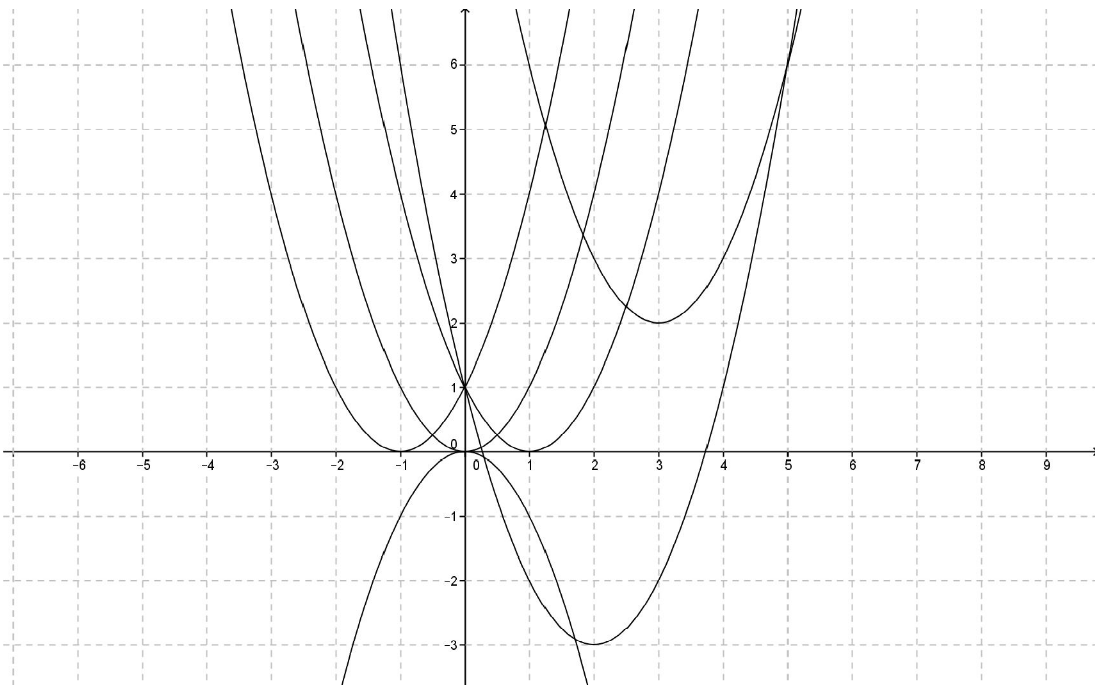
2) Déterminer deux fonctions u et v telles que $f = v \circ u$

1) $f(x) = (x-3)^2$
2) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$
3) $f(x) = \sqrt{3x-1}$
4) $f(x) = \sin\left(3x - \dfrac{\pi}{2}\right)$
5) $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+3}}$

Exercice n°7

1) Combien de représentations graphiques de fonction numérique avons-nous sur les schéma ci – dessous
2) Donner l'expression de chaque fonction en fonction de la variable x





Exercice n°8

Soit f la fonction définie sur $]-\infty;3]$ par $f(x)=2+\sqrt{3-x}$ et g la fonction définie sur $[2;+\infty[$ par $g(x)=-x^2+4x-1$

1) Montrer que pour tout , $x\in[2;+\infty[$, $(f\circ g)(x)=x$
2) Montrer que pour tout $x\in]-\infty;3]$, $(g\circ f)(x)=x$
3) 3) Est-ce que, dans cet exemple $g\circ f=f\circ g$?

Exercice n°9

Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=3x-5$ et $g(x)=\dfrac{2x^2+1}{x^2+1}$

1) Démontrez que pour tout réel x, on a $1\leq g(x)\leq 2$

2) Démontrez que la fonction $g\circ f$ est bornée sur $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire qu'il existe un minorant met un majorant M tels que pour tout réel x, $m\leq (g\circ f)(x)\leq M$)

3) Démontrer que pour tout réel x, $-2\leq (f\circ g)(x)<1$

Exercice n°10

On considère les fonctions f et g définies par : $f(x)=x^2+4$ et $g(x)=x-4$ et les intervalles : $I=]-\infty;0]$ et $J=[5;+\infty[$

1) Déterminer $f(I)$
2) Déterminer $g(I)$

Exercice n°11

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$. Exprimer $\underbrace{(f\circ f\circ f\cdots\circ f)}_{n\text{ fois } f}$ $n\in\mathbb{N}$, en fonction de x et n

Exercice n°12

Soit $f:[1;+\infty[\to[0;+\infty[$ telle que $f(x)=x^2-1$. f est-elle bijective

Exercice n°13

Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

$f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}, n\mapsto n+1$

$g:\mathbb{Z}\to\mathbb{N}, n\mapsto n+1$

$h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,(x,y)\mapsto(x+y,x-y)$

$k:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}, x\mapsto\dfrac{x+1}{x-1}$

Exercice n°14

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie $f(x)=\dfrac{2x}{(1+x^2)}$

1. f est-elle injective ? surjective ?
2. Montrer que $f(\mathbb{R})=[-1;1]$
3. Montrer que la restriction $g:[-1;1]\to[-1;1]$, $g(x)=f(x)$ est une bijection.
4. Retrouver ce résultat en étudiant les variations de f

Exercice n°15

Dans chacun des cas suivants, justifier que la fonction f considérée est bien définie sur D_f, puis démontrer que la courbe C_f représentant la fonction f dans un repère orthonormé admet l'élément de symétrie indiqué

1) $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$; $D_f=]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$; centre de symétrie $\Omega(-1;1)$
2) $f(x)=\sqrt{x^2-4x+3}$; $D_f=]-\infty;1[\cup[3;+\infty[$; Axe de symétrie $\Delta(x=2)$
3) $f(x)=2x-3-\frac{3}{x+2}$; $D_f=]-\infty;-2[\cup]-2;+\infty[$; centre de symétrie $\Omega(-2;-7)$
4) $f(x)=\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x+\frac{5}{3}$; $D_f=\mathbb{R}$; centre de symétrie $\Omega(1;-2)$
5) $f(x)=\cos^4 x - 2\cos^2 x$; $D_f=\mathbb{R}$; *Axe de symétrie* $\Delta\left(x=\frac{\pi}{2}\right)$

Exercice n°16

On considère la fonction f définie par $f(x)=\frac{x^2-7x+10}{2(1-x)}$ et on note C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité 2 cm.

1) Déterminer l'ensemble de définition de f
2) Déterminer trois réels a, b et c tels que $f(x)=ax+b+\frac{c}{1-x}$
3) Déterminer toutes les asymptotes à la courbe C et leur point d'intersection.
4) Démontrer que le point $\Omega\left(1;\frac{5}{2}\right)$ est centre de symétrie de l

Exercice n°17

Dresser le tableau de variation de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3-3x^2+3x-2$ puis déterminer le nombre de solutions de $f(x)=0$

Exercice n°18

Soit f l'application de IR-{3} dans IR-{2} par $f(x)=\frac{2x-7}{x-3}$.

1) Monter que f est bijective et déterminer sa bijection réciproque notée f^{-1}. 1pt+0,5pt
Le plan est rapporté au repère orthonormé (O, I, J)
2) a) Montrer que le point A(3 ;2) est centre de symétrie de la courbe (C) de f.
   b) Montrer que pour tout $x\in IR-\{3\}$ on a : $f(x)=2-\frac{1}{x-3}$.

c) Calculer les limites de f aux bornes de son domaine

Exercice n°19

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}-\{-3\}$ par $f(x)=\frac{2x^2+7x-1}{x+3}$ et C sa représentation graphique.
Montrer que le point Ω de coordonnées $(-3;-5)$ est un centre de symétrie de C.

2. Soit g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x+1)=\frac{-g(x)}{1+g(x)}$. De plus, on suppose que pour tout réel *x*, $g(x)\neq-1$

a. Montrer que la fonction g est périodique et de période 2.
b. Sachant que $g(0)=1$, calculer $g(2006)$ et $g(2007)$.

Exercice n°

T racer les représentations graphiques des fonctions usuelles :

1) $f(x)=x^2$ 2) $g(x)=\frac{1}{x}$ 3) $h(x)=\sqrt{x}$ 4) $i(x)=x^3$

En utilisant une translation, tracer sur l'un des graphiques précédents, la représentation graphique de

1) $l(x)=(x-3)^2$
2) $m(x)=\sqrt{x-2}$
3) $n(x)=\frac{1}{x+1}$
4) $p(x)=(x+2)^2$
5) $g(x)=\sqrt{x}+2$
6) $r(x)=x^2-5$
7) $s(x)=1+\frac{1}{x}$
8) $t(x)=(x-3)^2+2$

Sur un autre graphique, tracer successivement les représentations graphiques de :

1) $A(x)=\frac{1}{x}$
2) $B(x)=\frac{1}{x+1}$
3) $C(x)=\frac{1}{x+1}-3$
4) $D(x)=\left|\left(\frac{1}{x+1}-3\right)\right|$
5) $E(x)=-\left(\frac{1}{x+1}-3\right)$
6) $F(x)=\frac{1}{|x|+1}-3$
7) $G(x)=\frac{1}{-x+1}-3$

Exercice n°

Soit la fonction $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$

1) Quel est l'ensemble de définition de f ?

2) Déterminer a et b tels que $f(x)=a+\frac{b}{x+1}$.

3) T racer la représentation graphique de $g(x)=\frac{-2}{x}$

4) En déduire la représentation graphique de f .

5) T racer le tableau de variations de f .

Exercice n°20

1. Montrer que la droite $x=-2$ est axe de symétrie de la fonction $f(x)=\frac{x^2+4x+3}{2x^2+8x-10}$.

   Préciser l'ensemble de définition de *f*.

2. Mêmes questions avec $f(x)=\frac{-2x^2+7x-5}{2x-1}$ et le centre de symétrie $S\left(\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right)$.

3. Quelle est la période de $f(x)=\cos(2x)\sin(3x)$?

4. Déterminer l'ensemble de définition et la parité de $f(x)=\sqrt{|x+1|+|x-1|}$.

5. Même question avec $f(x)=\frac{x^2-1}{\sqrt{x^2.(1-x^2)}}$

6. Calculer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

a. $f(x)=4x^5-6x^3+2x-1$ b. $g(x)=\sqrt{1-x^2}$ c. $h(x)=\frac{-2x+1}{4x^2}$

d. $k(x)=3x^2-2x+\frac{1}{1-x^2}$ e. $f(x)=\frac{x^2}{3-2x^2}$ f. $g(x)=x\sqrt{1-x^2}$

g. $h(x)=\frac{(-2x^2+x)^2}{4x^4}$ h. $k(x)=\frac{2}{3\sqrt{x+2}}-\frac{1}{\sqrt{x}}$

7. Calculer les fonctions dérivées des fonctions suivantes et préciser leur sens de variation :

a. $f(x)=4x^5-6x^3+2x-1$ b. $g(x)=\sqrt{1-x^2}$ c. $h(x)=\dfrac{-2x+1}{4x^2}$

d. $k(x)=3x-2+\dfrac{1}{1-x^2}$

8. Déterminer l'ensemble D de définition, calculer la fonction dérivée, déterminer le signe de la fonction dérivée et dresser le tableau de variations de chacune des fonctions :

a. $f(x)=-2x^2+\sqrt{2}x+\dfrac{3}{5}$ b. $f(x)=\dfrac{-3x^4+4x^3+3}{2}$ c. $f(x)=\dfrac{1-2x}{3x-4}$

d. $f(x)=\dfrac{x^2-1}{8-2x^2}$ e. $f(x)=-\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{2x-1}-\dfrac{3}{3x-1}$ f. $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x+1}$ g. $f(x)=\dfrac{3}{x^2-1}$

9. Rappeler les formules de dérivation de $u.v$, $\sqrt{u}$, $\dfrac{1}{u}$.

10. Quelle est l'équation de la tangente à une courbe ($y = f(x)$) en un point d'abscisse a ?

11. Etudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-\dfrac{1}{6}x^3-x^2+\dfrac{5}{2}x+3$. Vous ferez le tracé de la courbe C_f représentant la fonction f sur l'intervalle [– 7 ; 3]. Unités graphiques : 2 cm sur l'axe (Ox), 1 cm sur l'axe (Oy).

12. Etudier les variations de la fonction g définie sur $\mathbb{R}-\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$ par $g(x)=x+\dfrac{2}{2x-1}$.

13. Calculer la fonction dérivée des fonctions suivantes en donnant (sans justifier) l'ensemble de dérivabilité :

$a(x)=\dfrac{3}{5}x^5-\dfrac{7}{2}x^4+\dfrac{4}{3}x^3+\dfrac{1}{2}x^2-x-7$ $b(x)=(4-3x)^7$ $c(x)=\dfrac{4}{7x}-\dfrac{5x^2}{2}$

$d(x)=\dfrac{-2x^2-x+3}{3x-4}$ $e(x)=\sqrt{2x-x^2}$

$f(x)=(1+\sin x)\cos x$ (on donnera f' en fonction de sin x).

Exercice n°21

Soit f la fonction définie sur R par son tableau de variation

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		+		-	‖	-		+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	4	↗	$+\infty$

1) Démontrer que (Cf) admet une asymptote verticale dont on précisera une équation.
2) Comparer en justifiant f(-1) et f(3)
3) Déterminer les extremums de f et préciser leur nature
4) f est –elle une fonction paire ou impaire ?

5) Déterminer en fonction de m le nombre de solutions de l'équation f(x) = m

Partie B

On suppose que $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-1}$, où a,b et c sont des nombres réels.

1. soit f' la dérivée de f. Calculer f'(x) en fonction de a, b et c.
2. En utilisant le tableau de variation ci – dessus, montrer que a=1, b=1 et c=1
3. Montrer que la droite (D) d'équation y=x+1 est asymptote oblique à la courbe (Cf) de f.
4. Etudier la position de (Cf) par rapport à (D).
5. Montrer que le point A(1,2) est centre de symétrie de (Cf)
6. Construire (Cf) et (D) dans un repère orthonormé d'unité 1 cm sur les axes.
7. Construire la courbe de la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{x^2}{|x-1|}$

Exercice n°22

On considère les fonctions *u* et *v* définies par $u(x) = -x+4$ et $v(x) = \dfrac{1}{x}$. Soit *f* la fonction composée $v \circ u$ définie sur $]-\infty$; 4[.

1. Exprimer *f*(*x*) en fonction de *x*.

2. a. Quelle est l'image par *u* de l'intervalle $]-\infty$; 4[?

b. Déterminer alors (sans calculer *f'*) le sens de variation de *f* sur l'intervalle $]-\infty$; 4[.

3. Soit *g* la fonction définie sur $]-\infty$; 4[par $g(x) = -f(x) + 5$.

a. Déterminer les variations de la fonction *g* sur $]-\infty$; 4[.

b. Exprimer *g*(*x*) en fonction de *x* puis écrire *g*(*x*) sous la forme d'un seul quotient.

Exercice n°23

Soient f et g définies par $f(x) = \dfrac{1+4x}{(1+6x)^2}$ et $g(x) = \dfrac{(1-5x)^2}{1-2x}$

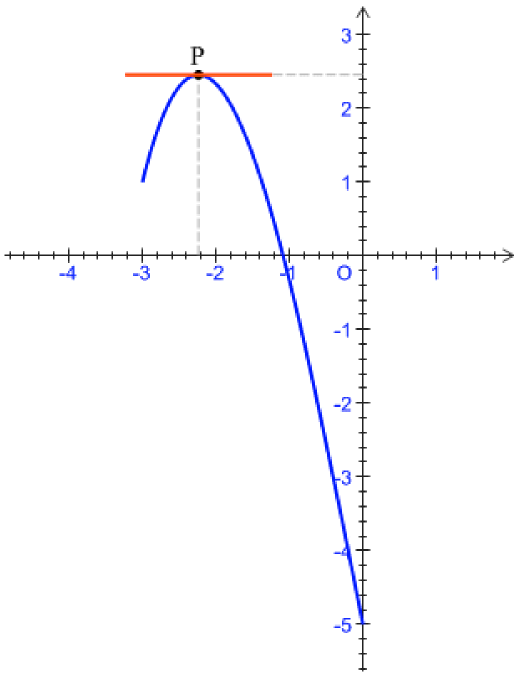
1) Donner les ensemble de définition de f et g
2) En déduire le signe de $f(x) - g(x)$
3) En déduire le plus grand des deux nombres

$$A = \frac{(1{,}00000000000004)}{(1{,}00000000000006)^2} \quad \text{et} \quad B = \frac{(0{,}99999999999995)^2}{0{,}99999999999998}$$

Exercice n°24

Le graphe ci – dessous représente la courbe de la fonction f définie sur $[-3;0]$ par : $f(x) = \dfrac{1}{3}x^5 - 5x - 5$ et sa tangente au point P.

Déterminer les valeurs exactes des coordonnées de P.



Exercice n°25

On considère la fonction numérique f d'une variable réelle x définie sur l'intervalle $[0;2[\cup]2;4]$ par $f(x) = \dfrac{3}{2-x}$. (C) est la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1. Quel est l'ensemble D de définition de f ?

2. Calculer $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ et $\lim_{x\to 2^+} f(x)$
3. Donner une équation cartésienne de l'asymptote à la courbe représentative de f .
4. Calculer $f'(x)$ où f'est la fonction dérivée de f.
5. Etudier le signe de f' et dresser le tableau de variation de f .
6. Ecrire une équation cartésienne de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 3.
7. Tracer dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ la droite (T) et la courbe (C).

Exercice n°26

Soit les fonctions f et g définies sur R par : $f(x) = x^2 - 2x - 3$ et $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 3$.

1. Montrer que la courbe C_f représentative de f est l'image de la parabole P d'équation $y = x^2$ par une translation dont on indiquera le vecteur.

2. Montrer que la courbe Γ représentative de g est l'image de la parabole P' d'équation $y = -\frac{1}{2}x^2$ par une translation dont on indiquera le vecteur.

3. Tracer les courbes C_f et Γ dans un même repère (*unité graphique : 2 cm*).

4. Déterminer algébriquement les coordonnées des points d'intersection de C_f et Γ, puis vérifier les résultats graphiquement.

5. Déterminer algébriquement le signe de la différence $f(x) - g(x)$. Donner une interprétation graphique de ce signe.

Exercice n°27

Soit la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = x\sqrt{x}$

1. En revenant à la définition du nombre dérivé, montrer que f est dérivable en 0. Préciser $f'(0)$.
2. A l'aide des formules de dérivation, vérifier que f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et exprimer $f'(x)$ pour $x > 0$.
3. Donner alors l'ensemble des réels x pour lesquels f est dérivable.

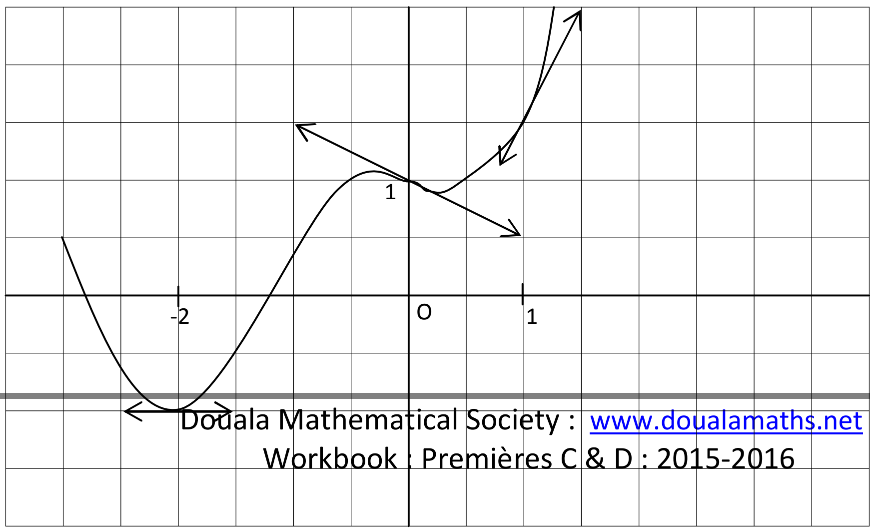
Exercice n°28

La courbe représentative d'une fonction f est donnée ci-après. En chacun des points indiqués, la courbe admet une tangente qui est tracée.

En vous servant du quadrillage, compléter les égalités suivantes :

$f(0) =$ $\quad$ $f(-2) =$ $\quad$ $f(1) =$

$f'(0) =$ $\quad$ $f'(-2) =$ $\quad$ $f'(1) =$



Exercice n°29

f est la fonction $x \to x^3$

4. Montrer que l'approximation affine locale de $(2+h)^3$ est égale à $8+12h$ pour h proche de 0.
5. En déduire des approximations des nombres suivants : $(2{,}001)^3$ *et* $(1{,}997)^3$

Exercice n°30

Soit f la fonction trinôme telle que : $f(x) = ax^2 + bx + c$. Déterminer les réels a, b, c tels que Cf admette au point $A(1;3)$ une tangente de coefficient directeur égal à 1 ainsi qu'une tangente horizontale au point d'abscisse $\frac{1}{2}$.

Exercice n°31

Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes (on ne se limitera qu'à l'expression du premier développement).

a. $f(x) = \sqrt{3}x^2 + 2x + 3$
b. $f(x) = (2x^2 + x)\sqrt{x}$
c. $f(x) = \dfrac{3}{x^2 - 1}$
d. $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{3x^2 + 1}$
e. $f(x) = \cos(3x)$
f. $f(x) = (4x + 5)^6$

Exercice n°32

Etudier les variations de la fonction $f : x \to 2x^4 - 3x^3 + \dfrac{x^2}{2} + 3$ sur $\mathbb{R}$ (calcul de la dérivée, étude de son signe, variations de f, calculs des extremums quand ceux-ci peuvent être faits de tête facilement). On donnera l'équation de la tangente à Cf au point d'abscisse -1

Exercice n°33

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité graphique $2cm$. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ par $f(x) = \frac{x}{x+1}$. On désigne par (C_f) la courbe représentative de f et par $(\mathcal{H})$ l'hyperbole d'équation $y = -\frac{1}{x}$.

1. Déterminer les réels a et b pour que pour tout $x \neq -1$, $f(x) = \frac{a}{x+1} + b$.
2. Indiquer la transformation qui permet de tracer (C_f) à partir de $(\mathcal{H})$ puis tracer (C_f).
3. **(a)** Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) > 0$.
(b) Retrouver algébriquement les solutions de cette inéquation.

4. Représenter la courbe (C_h) de la fonction h définie par $h(x) = f(-x)$.
5. Soit m un réel. On considère l'équation paramétrique (E_m) : $(m-1)x + m = 0$.
   (a) Montrer que $(E_m) \Leftrightarrow f(x) = m$.
   (b) Résoudre graphiquement l'équation (E_m).

Exercice n°34

On considère la fonction g définie par $g(x) = \sqrt{1-2x}$ et on note C_g sa courbe représentative.
Dans chaque cas, dîtes si l'affirmation est vraie ou fausse.

a) La dérivée de g est définie sur $]-\infty, \frac{1}{2}]$.

b) La tangente à C_g en $\frac{1}{2}$ est horizontale.

a) Pour tout x < $\frac{1}{2}$ on a : $g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-2x}}$.

b) La fonction g admet un minimum.

Exercice n°35

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x}$. On note (C_f) la courbe représentative de f dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1. (a) Déterminer trois réels a , b et c tels que pour tout réel non nul x , on ait :

   (b) Calculer les limites de f en $-\infty$, 0 et $+\infty$.
   (c) Montrer que la droite (D) d'équation $y = x - 2$ est asymptote à la courbe (C_f).
2. Montrer que le point $A(0\,;-2)$ est centre de symétrie pour la courbe (C_f).
3. Déterminer la dérivée de la fonction f et dresser le tableau de variation de f.
4. Tracer la courbe (C_f).
5. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = f(|x|)$. On note (C_g) la courbe de g.
   (a) Etudier la parité de la fonction g. Qu'en déduire pour la courbe (C_g) ?
   (b) Comparer $g(x)$ et $f(x)$ pour x positif. Qu'en déduire pour (C_f) et (C_g) ?
   (c) Tracer (C_g) sur le même graphique que (C_f).
   (d) Discuter graphiquement suivant les valeurs du paramètre réel m , le nombre de solutions de l'équation $g(x) = m$.

Exercice n°36

On définit la fonction f de la variable réelle x par : $f(x) = x - 1 + \frac{2x}{x^2+1}$; (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O\,; I, J)$.

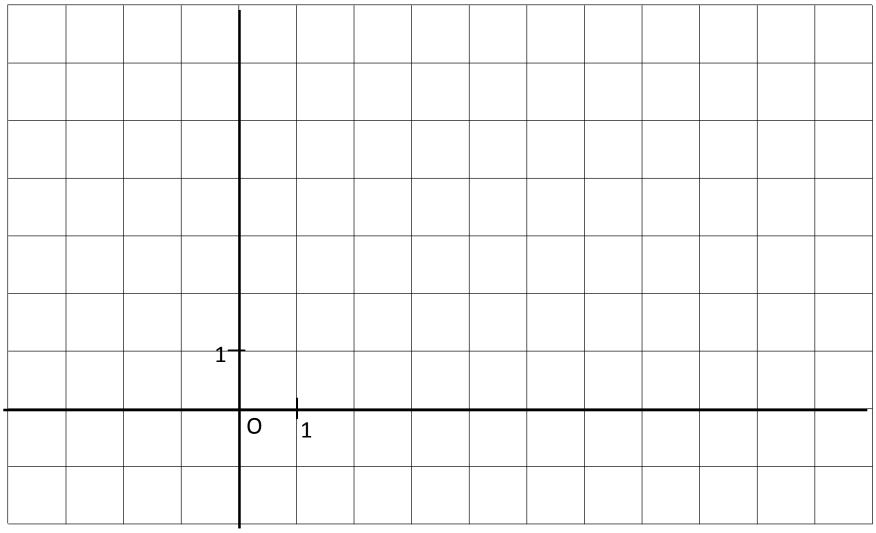
1. Déterminer l'ensemble de définition de f et calculer les limites à ses bornes.
2. Calculer la dérivée de f , en déduire le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.
3. Vérifier que la droite (D) d'équation $y = x - 1$ est asymptote à (C).
4. Montrer qu'il existe deux points dont on déterminera les coordonnées , en lesquels la tangente à (C) est parallèle à (D).
5. Montrer que le point $I(0\,; -1)$ est centre de symétrie pour (C).
6. (a) Ecrire une équation cartésienne de la tangente (T) à (C) au point I.
   (b) Etudier la position de (T) par rapport à (C).
7. Construire avec soin (T) , (D) et (C) dans un même repère.
8. Construire sur le même graphe la courbe de la fonction définie par :

$h(x) = f(|x|)$.

Exercice n°37

Soit f la fonction définie sur I= $]2;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{x^2}{x-2}$

1. Montrer que f peut s'écrire : $f(x)=x+2+\dfrac{4}{x-2}$
2. Etudier la limite de f en $+\infty$
3. Montrer que Cf admet la droite d'équation $y=x+2$ pour asymptote.
4. Etudier la limite de f en 2. En donner une interprétation graphique.
5. Etudier les variations de la fonction f sur I et dresser son tableau de variations.
6. Déterminer l'équation de la tangente à Cf au point d'abscisse 4.
7. Tracer la courbe Cf main levée en faisant apparaître tous les éléments de l'étude.



Exercice n°38

Soient f et g les fonctions définies sur IR par : $f(x)=\dfrac{x+3}{x^2+1}$ et $g(x)=\dfrac{-3x^2+x}{x^2+1}$.

Montrez que pour tout réel x, $f'(x)=g'(x)$, **sans calculer** ces deux dérivées

Exercice n°39

Calculez la dérivée (*en précisant la formule utilisée)* et déterminez l'ensemble de dérivabilité (*en justifiant par un résultat du cours)* de chacune des fonctions suivantes :

a) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2\cos(x)$

b) g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 3x^4 + x^3 + x^2 + x - 1$

c) h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \dfrac{4}{x^2+2}$

d) i définie sur $]-\infty;-2[\cup]-2;+\infty[$ par $i(x) = \dfrac{2x^2+3x-2}{x+2}$.

Exercice n°40

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$.

Démontrez que cette fonction admet un minimum et donnez sa valeur.

Exercice n°41

Soit la fonction f définie par: $f(x)=\dfrac{x^2-4}{2x-5}$. On notera C_f sa courbe représentative.

a) Donnez le domaine de définition de f (noté D_f) et son ensemble de dérivabilité.

b) Calculez la dérivée de f .

c) Etudiez les variations de f sur son domaine de définition.
(*Tableau de signes de la dérivée, tableau de variations avec valeurs de f(x)).*

d) Déterminez l'équation de la tangente T à C_f au point d'abscisse 3.

e) Donnez les coordonnées des points où la tangente à la courbe est horizontale.
On appellera T_1 et T_2 ces tangentes horizontales. Donnez les équations de T_1 et T_2.

f) Recopiez puis complétez le tableau de valeurs suivant :

X	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	2,4	2,6	3	4	5	6	7
f(x)																	

Les valeurs seront arrondies à 0,1 près.

g) Tracez *avec soin* C_f, T, T_1 et T_2 dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ *unité 1 cm.*

Exercice n°42

1) On considère la fonction f définie dont l'image d'un nombre x est défini par :
$f(x)=\dfrac{6x^3+x^2+7x+9}{2x^2-x+3}$.
Montrer que la droite (d) d'équation $y=3x+2$ est l'asymptote à la courbe C_f en $-\infty$ et $+\infty$.

2) On considère la fonction g définie par la relation : $g(x)=\dfrac{4x^2-8x+5}{3-2x}$
Déterminer les valeurs des nombres réels a et b vérifiant : $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\left[g(x)-(ax+b)\right]=0$

Exercice n°43

Soit f la fonction définie sur R\{1} par : $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x-1}$.

1. Etudier le sens de variation et les limites de f.
2. Dresser le tableau de variations de f.
3. Déterminer les réels *a*, *b* et *c* tels que, pour tout $x\neq 1$, $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-1}$.
4. Démontrer que la courbe C_f de f admet une asymptote oblique D en $-\infty$ et en $+\infty$. La courbe C_f admet-elle une autre asymptote ?
5. Montrer que le point $A(1;2)$ est un centre de symétrie de la courbe C_f.

Exercice n°44

Soit f la fonction définie sur R par : $f(x)=x^3-3x-1$.

1. Etudier les variations de f sur R. (sens de variation et limites)

2. Déterminer une équation de la tangente T_0 à la courbe C_f de f au point d'abscisse 0 et préciser sa position relative à C_f.

3. Soit la parabole P d'équation : $y = x^2 - 2x + 1$.

a) Préciser les éléments caractéristiques de P.

b) Vérifier que le point $A(2;1)$ est un point qui appartient aux deux courbes C_f et P.

c) Etudier la position de C_f par rapport à P.

4. Tracer les courbes C_f et P dans un même repère.

Exercice n°45

$ABCD$ est un rectangle tel que $AB = 1$ et $AD = 2$.

M est un point variable sur $[DC]$: on pose $DM = x$. Les droites (AM) et (DB) se coupent en *I*.

On désigne par $S(x)$ la somme des aires de triangles ABI et DIM.

1. Calculer $S(0)$ et $S(1)$.

2. Démontrer que la hauteur IK du triangle ABI est égale à $\frac{2}{x+1}$.

3. En déduire que : $S(x) = \frac{x^2+1}{x+1}$.

4. Pour quelle valeur de *x*, $S(x)$ est-elle minimale ? Que vaut cette aire minimale ?

Exercice n°46

On considère la fonction f définie par : $f : x \mapsto \frac{5x+1}{-5x^2+4x+1}$

1. Donner l'ensemble de définition de la fonction f.

2. Déterminer les limites de la fonction f en $+\infty$ et $-\infty$.

3. a. Justifier que les deux limites ci-dessous représentent une forme indéterminée :

$\lim\limits_{x \mapsto -\frac{1}{5}^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x \mapsto -\frac{1}{5}^+} f(x)$

b. Montrer que, pour $x \in D_f$, on a : $f(x) = -\frac{1}{x-1}$

c. En déduire la valeur des deux limites présentées à la question a. .

Exercice n°47

On considère la fonction f dont l'image de x est définie parla relation : $f(x) = \frac{4x^2+10x-2}{x+2}$

1. Déterminer les limites de cette fonction aux bornes de son ensemble de définition.

2. a. Déterminer la valeur des trois nombres réels a, b, c vérifiant : $ax + b + \frac{c}{x+3} = \frac{4x^2+10x-2}{x+2}$

b. En déduire une expression de la fonction f' dérivée de la fonction f.

c. Dresser le tableau de variation complet de la fonction f (n'oubliez aucune valeur dans le tableau).

3. Déterminer l'équation de l'asymptote oblique en $+\infty$.

Exercice n°48

On considère la fonction f dont l'image d'un nombre x est donnée par la relation : $f(x) = \frac{6x^2+x+1}{2x+1}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f .
   a. Déterminer l'expression de la fonction dérivée de f .
   b. Dresser le tableau de signe de la fonction f'
   c. En déduire le tableau de variation de la fonction f.
   d. En étudiant les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition, compléter le tableau de variation.
2. Montrer que la fonction f admet en $-\infty$ et en $+\infty$ la droite (d) d'équation $y = 3x - 1$

Exercice n°49

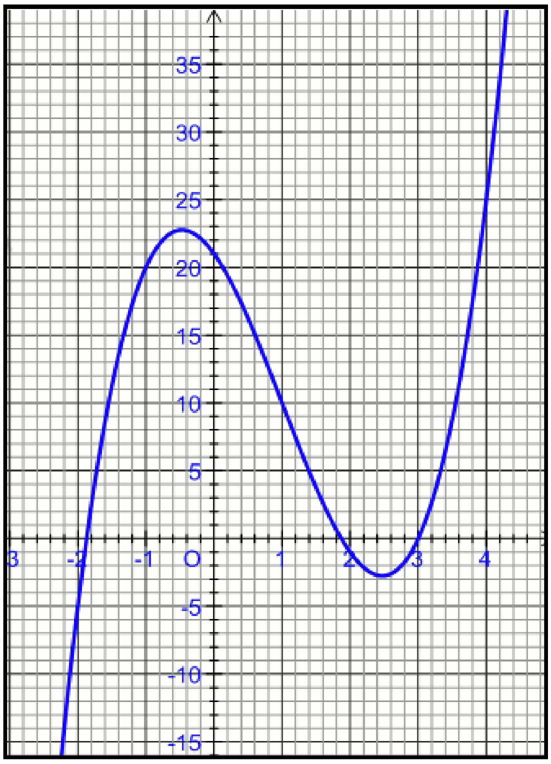
On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{4x^2 - 15x - 3}{2x^2 - 5x - 3}$

1. Donner l'ensemble de définition D de f
2. Résoudre l'équation $f(x) = 3$
3. Résoudre l'équation $f(x) \geq 1$

Exercice n°50

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - 6x^2 - 7x + 21$. Sa représentation graphique est donnée ci – contre

1) Déterminer graphiquement le nombre de racines de f . Donner une valeur approchée de chacune d'elles.
2) Montrer qu'il existe un triplet $(a;b;c)$ que l'on déterminera tel que pour tout réel x :
   $f(x) = (x-3)(ax^2 + bx + c)$
3) Déterminer les valeurs exactes des racines de f
4) Déterminer graphiquement l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \leq -x + 11$



Exercice n°51

On considère la fonction f définie par $\dfrac{5x}{x^2+1}$

Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ d'unité 1cm.

1. Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$
2. Calculer $f'(x)$
3. Etudier le signe de $f'(x)$ et donner le tableau de variation de f pour $x \in [-7;7]$
4. Donner l'équation de la tangente T à la courbe (C) en son point d'abscisse 0. Etudier les positions relatives de T et (C)
5. Tracer la courbe (C) pour $x \in [-7;7]$ et tracer sur le même graphique sa tangente T.
6. Justifier que pour tout réel x, on a : f(-x) = -f(x). que peut – on en déduire pour la courbe (C) ?
7. Soit m un nombre réel. Etudier suivant les valeurs de m, le nombre de solutions de l'équation $mx^2 - 5x + m = 0$

8. Vérifier, en utilisant la courbe (C) les résultats de la question précédente.

Exercice n°52

On considère la fonction f définie par : $f(x)=\dfrac{2x^2+6x+1}{x^2+2}$

(C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal.

1°) Donner l'ensemble de définition de f.

2°) Calculer la dérivée f' et étudier son signe.

3°) Donner le tableau de variations de la f

4°) Déterminer l'équation de la tangente T à (C) en son point d'abscisse 0. Représenter, avec une calculatrice ou un ordinateur, la courbe (C) et sa tangente T.

5°) Déterminer le nombre de points communs à la courbe (C) et à sa tangente T. Quelles sont les coordonnées de ce(s) point(s) ? Préciser les positions relatives de (C) et T.

Exercice n°53

Soit *f* la fonction définie sur $\mathbb{R}-\{2\}$ par $f(x)=\dfrac{2x-3}{-x+2}$ et soit C_f sa courbe représentative dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. Etudier les variations de *f*.
2. a. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C_f au point A d'abscisse 1.

b. Etudier le signe de $f(x)-(x-2)$. Interpréter graphiquement le résultat.

3. Existe-t-il des points en lesquels la tangente à C_f est parallèle à la droite d'équation $y=x+2$? Si oui, préciser leurs coordonnées.

Exercice n°54

Soit $f(x)=\dfrac{4x^2-8x+7}{1-2x}$.

a. Déterminer son ensemble de définition, trouver *a*, *b*, *c* réels tels que $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{1-2x}$.

b. Montrer que le point $\Omega\left(\dfrac{1}{2},2\right)$ est centre de symétrie de la courbe (C) de *f*.

c. Déterminer suivant les valeurs de *x* la position de (C) par rapport à la droite (D) $y=2x+3$

d. Tracer dans un repère orthonormé la droite (D) et la courbe (C). (on placera particulièrement les points A et B de (C) d'abcisses respectives −1/2 et 3/2).

e. Déterminer graphiquement puis algébriquement le signe de *f*.

Exercice n°55

Déterminer l'ensemble de définition, la dérivée, le signe de la dérivée et le tableau de variations de $f(x)=\dfrac{(x+1)^3}{(1-x)^2}$.

Exercice n°56

On considère la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{x^2+4x+6}{2x^2+8x+12}$

Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) Justifier que f est continue sur $\mathbb{R}$
2) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculer $f'(x)$ et étudier son signe.
3) Donner le tableau de variation de sur f sur l'intervalle $[-8;8]$
4) Tracer la courbe (C) sur l'intervalle $[-8;8]$ (on prendra comme unité 1cm en abscisse et 2cm en ordonnée)

5) Soit Ω le point de coordonnées (-2 ; 0). On considère le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

   a. Soit M un point de coordonnées $(x;y)$ dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ et $(X;Y)$ dans $(\Omega;\vec{i},\vec{j})$ En écrivant $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{O\Omega}+\overrightarrow{\Omega M}$ justifier que $x=X-2$ et $y=Y$

   b. L'équation de (C) dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ est $y=\dfrac{x^2+4x+6}{2x^2+8x+12}$. En utilisant les relations établies dans la question a), écrire l'équation de (C) dans le repère $(\Omega;\vec{i},\vec{j})$ sous la forme $Y=g(X)$ où g est une fonction que l'on déterminera.

   c. Démontrer que g est une fonction paire, c'est-à-dire que pour tout réel X, on a g(X)=g(-X). déduire que la droite d'équation x = -2 est axe de symétrie pour la courbe (C)

Exercice n°57

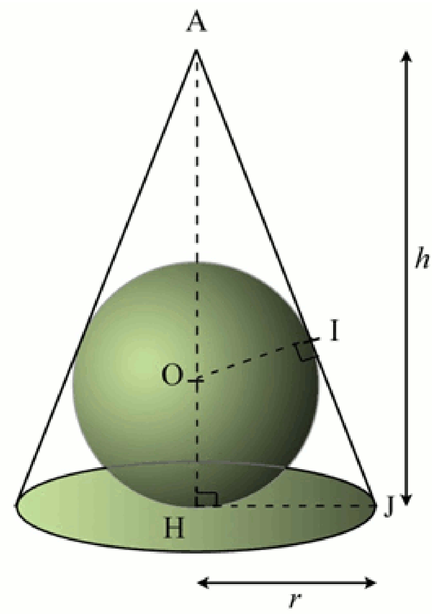
1. Soit fla fonction définie sur $I=\left[\frac{5}{2};10\right]$ par $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$ et soit (Cf) sa représentation graphique dans un repère orthonormal du plan.

   a) Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation complet.

   b) En déduire que f possède sur I un extremum que l'on précisera.

2. On a représenté ci-contre une sphère de rayon 1 et un cône C circonscrit à la sphère ayant pour rayon r et pour hauteur h avec $h\in\left[\frac{5}{2};10\right]$.

   Les points A, O, I, H et J sont coplanaires, les droites (OI) et (AJ) sont perpendiculaires, de même que les droites (HJ) et (AH).
   On cherche à déterminer pour quelle valeur de h le volume du cône est minimal et quel est ce volume minimal.



   a. Démontrer que $r^2=\dfrac{h}{h-2}$

   b. On rappelle que le volume d'un cône, de hauteur h et dont l'aire de la base vaut B, est $\frac{1}{3}h\times B$

      Soit V(h) le volume du cône. Exprimer V (h) en fonction de h.

   c. Conclure en utilisant la première question.

Exercice n°58

Soit $f(x)=\dfrac{(1-x)^3}{x^2}$. C sa courbe représentative

a. Trouver *a*, *b*, *c*, *d* tels que $f(x)=ax+b+\dfrac{cx+d}{x^2}$ pour tout *x* réel non nul.

b. Etudier les variations de *f* : dérivée, signe de la dérivée, limites, tableau.

c. Déterminer une équation de la tangente T à C au point d'abscisse $\frac{1}{2}$.

d. Peut-on trouver un point de C où la tangente à C soit parallèle à la droite Δ (*y*=−*x*) ? Si oui, préciser l'équation de cette tangente T'.

e. Montrer que C a une asymptote oblique D. préciser leurs positions respectives, tracer T' si elle existe, T, D et C.

f. Justifier l'existence d'une solution unique de l'équation *f(x)* = 1. En donner une valeur approchée à 0,01 près.

Exercice n°59

On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-2\ ,\ 2\}$ par $f(x)=\dfrac{x^3-4x-4}{x^2-4}$.

a. Trouver deux nombres *a* et *b* tels que $f(x)=ax+\dfrac{b}{x^2-4}$

b. Etudier les limites de *f* aux bornes de son ensemble de définition.

c. Montrer que la courbe (C) de *f* a une asymptote oblique (D) et préciser la position de (C) par rapport à (D).

Exercice n°60

On considère les fonctions numériques *f* et *g* définies par :

$$f(x)=\frac{1}{3}\left(x^2+x+\frac{1}{x}\right) \text{ et } g(x)=2x^3+x^2-1$$

1. Montrer que pour tout $x\neq 0$, les nombres *f'(x)* et *g(x)* ont le même signe.
2. Etudier les variations de *g* sur $\mathbb{R}$. En déduire que l'équation *g*(*x*)=0 admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique *a*, avec 0<*a*<1 (on ne cherchera pas à calculer *a*). Préciser le signe de *g* suivant les valeurs de *x*.
3. Dresser le tableau des variations de la fonction *f* . On désigne par (C) la courbe représentative de *f* dans un repère orthonormé (unité 3 cm), par I le point de (C) d'abcisse −1 et par J le point de (C) d'abcisse +1.

a. Vérifier que la droite (IJ) est tangente en J à (C).

b. Déterminer une équation de la tangente (T) en I à (C) .

c. Etudier la position de (C) par rapport à (T).

4. Utiliser les résultats précédents pour construire la courbe (C) (on prendra 2/3 comme valeur approchée de *a*).

Exercice n°61

Soit *f* la fonction définie sur ▯par $f(x)=\dfrac{x^3+x^2-1}{x^2+1}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Montrer que pour tout *x* réel, $f'(x)=\dfrac{x(x+1)(x^2-x+4)}{(x^2+1)^2}$.
2. Etudier les variations de la fonction *f*.
3. a. Montrer que pour *x* réel, $f(x)=x+1-\dfrac{x+2}{x^2+1}$.

b. Déterminer la limite de *f* en $+\infty$ et en $-\infty$.

c. Montrer que la courbe C_f admet une asymptote dont l'équation sera précisée. Etudier la position de C_f par rapport à cette asymptote.

Exercice n°62

Soit la fonction *f*, définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1,\ +1\}$ par $f(x)=\dfrac{x^3+2x^2}{x^2-1}$ et *C* sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(O\,;\vec{i},\vec{j}\right)$ (unité : 2 cm)

<u>Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire.</u>

Soit *g* définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=x^3-3x-4$.

1. Etudier les variations de la fonction *g*, et calculer ses limites en $+\infty$ et $-\infty$.
2. Montrer qu'il existe un réel α unique tel que $g(\alpha)=0$. Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près.
3. Etudier le signe de *g* sur $\mathbb{R}$.

<u>Partie B : Etude de la fonction *f*.</u>

1. Déterminer les limites de la fonction *f* aux bornes de son ensemble de définition.

2. Montrer que pour tout *x* de $\mathbb{R}\setminus\{-1, +1\}$, $f'(x)=\dfrac{xg(x)}{(x^2-1)^2}$. En déduire le tableau de variation de *f*.

3. Montrer que pour tout *x* de $\mathbb{R}\setminus\{-1, +1\}$, $f(x)=x+2+\dfrac{x+2}{x^2-1}$. En déduire que *C* admet une asymptote oblique *D* à l'infini. Etudier la position de *C* par rapport à *D*.

4. Déterminer les abscisses des points de *C* où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y=x+2$

5. Tracer la droite *D*, les tangentes du 4. ainsi que la courbe *C* .

Exercice n°63

Soit *f* la fonction définie sur $]-1\,;+\infty\,[$ par $f(x)=\dfrac{x^2-2x-4}{x+1}$. On appelle C_f sa représentation graphique.

1. Déterminer la limite de *f* en −1, puis en $+\infty$.
2. a. Montrer que la droite D d'équation $y=x-3$ est asymptote à la courbe C_f lorsque *x* tend vers $+\infty$.
b. Préciser les autres éventuelles asymptotes à C_f.
3. Etudier la position relative de C_f par rapport à D sur $]-1\,;+\infty\,[$.
4. a. Montrer que $f'(x)=\dfrac{x^2+2x+2}{(x+1)^2}$.
b. Etudier les variations de *f* et dresser le tableau de variation complet de *f* sur son intervalle de définition.
5. Déterminer l'équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 1.

Exercice n°64

Soit *f* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{2x^2-3x+2}{x^2+2}$. On appelle C sa représentation graphique.
Déterminer la limite de *f* en $+\infty$, puis en $-\infty$ et préciser alors les éventuelles asymptotes.

Exercice n°65

On considère les deux fonctions *f* et *g* définies sur $\mathbb{R}\setminus\{-2\,;0\}$ par :

$$f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x+2} \quad \text{et} \quad g(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}$$

1. Etudier les limites de *f* et *g* aux bornes de leur ensemble de définition. En déduire que les courbes représentatives C_f et C_g ont les même asymptotes.
2. Etudier les variations des fonctions *f* et *g*.
3. Etudier la position de C_f par rapport à sa tangente en $\Omega(-1\,;0)$, et les positions relatives des courbes C_f et C_g.
4. Représenter C_f et C_g dans un même repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.
5. Montrer que Ω est centre de symétrie de C_f et $(\Omega\,;\vec{j})$ axe de symétrie de C_g.

Exercice n°66

Soit *f* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{4(2x+1)}{x^2+2}$ et C sa courbe représentative dans un repère orthonormé : unité graphique : 1 cm.

1. a. Calculer $f'(x)$.
b. Etudier les variations de *f* et dresser le tableau de variation de *f*.
2. Tracer C.
3. Soit D la droite d'équation $y=\dfrac{9}{4}x-7$ et T la tangente à C au point *A* d'abscisse 4.
a. Déterminer l'équation de T.
b. Montrer que le point *A* appartient à C et D.
c. Montrer alors que D et T sont perpendiculaires.
d. Tracer dans le repère précédent D et T.

4. Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. La suite (u_n) est-elle monotone ?

Exercice n°67

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\,;1\}$ par $f(x) = \dfrac{ax+b}{x^2+x-2}$.

1. Sachant que −3 est un extremum de f atteint en 0, déterminer les réels a et b.

2. On suppose que $f(x) = \dfrac{6-3x}{x^2+x-2}$. Vérifier que $f'(x) = \dfrac{3x^2-12x}{(x^2+x-2)^2}$ et en déduire son signe.

3. Dresser le tableau de variation de f en précisant la nature des extremums locaux.

Exercice n°68

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\,;2\}$ par $h(x) = \dfrac{2x^3-x^2-5x+1}{x^2-2x}$.

1. Montrer que la droite D d'équation $y = 2x+3$ est asymptote à C_h.
2. Étudier la position relative de C_h et de D en précisant les coordonnées du point d'intersection.

Exercice

Partie A : étude d'une fonction auxiliaire

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.
3. a. En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution que l'on note α dans $\mathbb{R}$.
b. Vérifier que $\alpha \in \left]1\,;2\right[$.
c. Donner un encadrement de α d'amplitude 0,1.
4. Déterminer le signe de f sur $\mathbb{R}$.

Partie B : On considère la fonction g définie sur l'intervalle $\left]-1\,;+\infty\right[$ par $g(x) = \dfrac{1-x}{1+x^3}$.

1. Déterminer la limite de g en -1 et en $+\infty$.

2. Justifier que g est dérivable sur $\left]-1\,;+\infty\right[$ et vérifier que $g'(x) = \dfrac{f(x)}{(1+x^3)^2}$.

3. Dresser alors le tableau de variation de g.

Exercice n°69

Sur la feuille annexe, on a représenté la courbe (C) de la fonction f définie sur $\left]0\,;+\infty\right[$ par $f(x) = \dfrac{3}{x} - 1$ dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

Partie A : Étude de la fonction f

1. Déterminer la limite de f en 0 et en $+\infty$. Préciser les équations des asymptotes à (C).
2. Déterminer le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation complet.
3. Placer, sur la feuille annexe, les points A et B de C d'abscisses respectives 1 et 3, puis déterminer une équation de la droite (AB).
4. Soit M un point quelconque de (C) d'abscisse x. La parallèle à l'axe des ordonnées et passant par M coupe la droite (AB) en un point N. On note alors P le milieu de $[MN]$.

Déterminer les coordonnées de M et vérifier que $N\left(x\,;-x+3\right)$ et $P\left(x\,;\dfrac{3+2x-x^2}{2x}\right)$.

Partie B : Le but de cette partie est d'étudier l'ensemble Γ des points P lorsque le point M décrit la courbe (C).

On pose alors g la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g\left(x\right)=\dfrac{3+2x-x^2}{2x}$ et Γ sa représentation graphique.

1. a. Déterminer la limite de g en 0 et en $+\infty$.

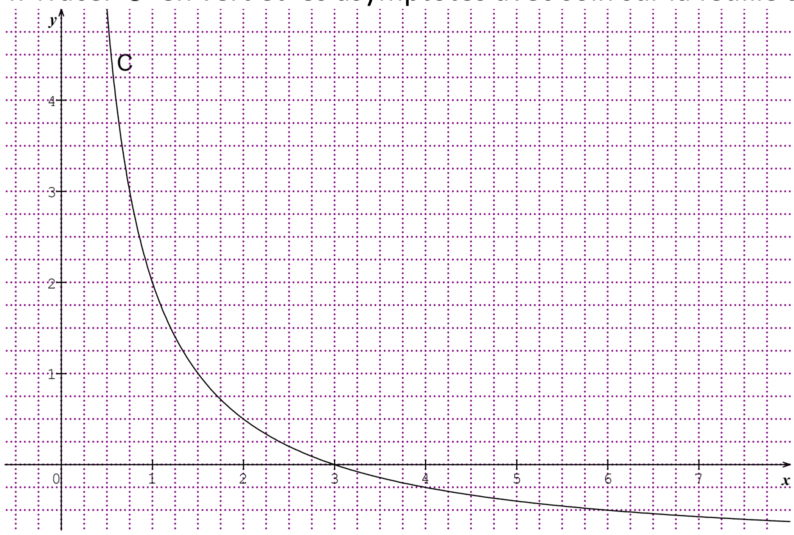
b. En déduire que Γ admet une asymptote dont on précisera une équation.

c. Démontrer que la droite D d'équation $y=-\dfrac{1}{2}x+1$ est une asymptote à Γ.

2. Calculer $g'\left(x\right)$ puis établir le tableau de variation de g.

3. Étudier la position relative de la courbe (C) par rapport à la courbe Γ.

4. Tracer Γ en vert et es asymptotes avec soin sur la feuille annexe.



Exercice n°70

f est la fonction définie sur $[0\,;\pi]$ par $f(x)=1-\dfrac{1}{2}x+\cos x$. C sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique : 2 cm).

1. Etudiez les variations de *f*.
2. Déterminez une équation de la tangente T_1 à C au point d'abscisse 0 et une équation de la tangente T_2 à C au point d'abscisse π.
3. Tracez les droites T_1 et T_2 ainsi que C.
4. Démontrez que l'équation $f(x)=0$ admet une seule solution x_0 dans $[0\,;\pi]$. Montrez que $1{,}7<x_0<1{,}8$. Déduisez-en le signe de *f*.

Exercice n°71

On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}-\{-1\}$ par $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$ et la fonction *g* définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=-x^2+3x-1$. On appelle C_f et C_g leurs représentations graphiques. Soit D la droite d'équation $y=2x-3$.

<u>Etude de *f*</u>

1. a. Etudier les limites de *f* en $+\infty$ et en $-\infty$.

b. Etudier les limites de *f* en −1 (par valeurs inférieures, puis par valeurs supérieures).

c. Quelles sont les asymptotes de C_f et C_g ?

2. Etudier les variations de *f* et dresser son tableau de variation.
3. Déterminer les coordonnées du (ou des) point(s) de C_f où la tangente est parallèle à D.

4. Dans un repère orthogonal (unités : 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées), tracer sur l'intervalle [−6 ; 4] la courbe C_f ainsi que ses asymptotes.

Etude de *g*

1. Etudier les limites de *g* en $+\infty$ et $-\infty$.
2. Etudier les variations de *g* sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de C_g avec l'axe des abscisses.
4. Déterminer l'équation de la tangente à C_g parallèle à la droite D.

Intersection

1. Déterminer les abscisses des points d'intersection de C_f et C_g.
2. Etudier suivant les valeurs de *x*, la position de C_f par rapport à C_g.

Exercice n°72

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = x\sqrt{1-x}$.

1. a. Déterminer l'ensemble de définition de *f* .

b. Etudier la dérivabilité de *f* en 1 et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

c. Montrer que *f* est dérivable sur $]-\infty\,;1[$ et que $f'(x) = \dfrac{2-3x}{2\sqrt{1-x}}$ pour tout $x < 1$.

d. Dresser le tableau de variation de *f*.

e. Représenter graphiquement la fonction *f*.

2. a. Montrer que l'équation $f(x) = \dfrac{-1}{3\sqrt{3}}$ admet une seule solution x_1 dans $]-\infty\,;0]$ et que $-\dfrac{1}{3} < x_1 < 0$.

b. Montrer que l'équation $f(x) = \dfrac{1}{3\sqrt{3}}$ admet exactement deux solutions x_2 et x_3 dans $[0\,;1]$ et que $0 < x_2 < \dfrac{2}{3} < x_3 < 1$. Donner une valeur décimale approchée à 10^{-3} près de x_1.

3. a. On pose $u = \dfrac{3}{2}(x - \dfrac{1}{3})$. Montrer que l'équation (E) : $|x\sqrt{1-x}| = \dfrac{1}{3\sqrt{3}}$ est équivalente à (E') :

$$8u^3 - 6u - 1 = 0\,.$$

b. Pour *i* = 1, 2, 3, on pose $u_i = \dfrac{3}{2}(x_i - \dfrac{1}{3})$. Montrer qu'il existe un unique réel θ_i de [0 ; π] tel que $u_i = \cos\theta_i$.

c. Prouver que $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ pour tout θ réel.

(On rappelle que cos(*a*+*b*) = cos*a*.cos*b* – sin*a*.sin*b* et sin 2*a* = 2sin*a*.cos*a*)

d. Déduire des questions précédentes que (E') est équivalente à l'équation $\cos 3\theta = \dfrac{1}{2}$. Résoudre cette équation dans [0 ; π] et en déduire les valeurs exactes de x_1, x_2 et x_3.

Exercice n°73

Soit $f(x) = x\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$.

1. Quel est son ensemble de définition ?
2. Montrez que la dérivée de *f* est $f'(x) = \dfrac{-x^2 - x + 1}{(1+x)^2\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}}$.
3. Déterminez son sens de variation.

Exercice n°74

Démontrer que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Déduisez-en la dérivée de la fonction sinus.

Exercice n°75

a. Montrez que sin3*a* = 3sin*a* − 4sin^3*a*.

b. Soit la fonction $f(x) = -4x^3 + 3x - \frac{1}{2}$.

Etudiez *f* sur $\mathbb{R}$ et tracez sa courbe représentative dans un repère orthonormé (unité 4 cm).

c. Calculez *f*(−1) et *f*(+1). Trouvez graphiquement le nombre de solutions de l'équation *f*(*x*) = 0 dans l'intervalle [−1 ; +1] ; donnez en une valeur approchée.

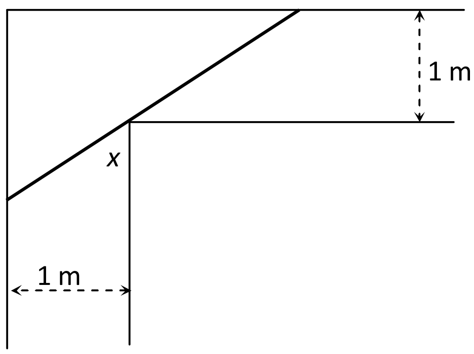
d. Déduisez de ce qui précède le nombre de solutions de l'équation $\sin 3a = \frac{1}{2}$ sur [0 ; 2 π]. Aurait-on pu utiliser une autre méthode ?

Exercice n°76

Etudier et représenter graphiquement la fonction *f*(*x*)=*x* + sin^2*x* sur l'intervalle [−2 π ; 2 π].

Exercice n°77

Soit *f* la fonction définie sur $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x) = \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}$.



1. Résoudre sur cet intervalle l'inéquation $\sin x \geq \cos x$.
2. a. Calculer *f'*(*x*) et montrer que *f'*(*x*) a même signe que $\sin^3 x - \cos^3 x$.

b. Montrez que la fonction $g : x \to x^3$ est croissante sur $\mathbb{R}$. En déduire le signe de *f'*.

3. Dresser le tableau de variation de *f* et préciser ses limites en 0 et $\frac{\pi}{2}$.
4. On veut déplacer une échelle dans un couloir de 1 m de large en lui faisant tourner un coin à angle droit. Quelle est la longueur maximale de l'échelle ? On pourra noter *x* l'angle entre l'échelle et le mur. Que se passe-t-il (physiquement parlant) si l'échelle est plus longue que cette longueur maximale ?

Exercice 78

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x}$:

1) Etudier la parité de f.

2) Démontrer que f est $2\pi - \text{periodique}$.

3) Calculer la dérivée f'de f . En déduire le tableau de variations de f sur $[0;\pi]$.

4) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

Exercice n°79

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \frac{x^2 + 4}{2x}$. On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1. Montrer que f est impaire.
2. Etudier les variations de f sur $]0;+\infty[$.
3. En déduire le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}^*$.
4. Montrer que la droite $(\mathcal{D}) : y = 0{,}5x$ est une asymptote oblique à (C_f).
5. Construire $(\mathcal{D})$ et (C_f).

6. On définit la fonction g par $g(x) = -f(x-1)$. On note (C_g) sa représentation graphique. Construire (C_g) dans le même repère que (C_f).

7. Soient (u_n) et (v_n) les suites définies pour tout entier naturel n par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ $v_n = \dfrac{u_n + 2}{u_n - 2}$

   (a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = {v_n}^2$.
   (b) En déduire v_n puis u_n en fonction de n.

Exercice 80

On considère la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 1$ sur $\mathbb{R}$.
Donner une formule explicite de la fonction $f \circ g$

$g(x) = \sqrt{x-1}$ sur $[1;+\infty[$, $g(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$

Exercice n°81

A/ On considère la fonction numérique à variable réelle p définie par $p(x) = \dfrac{4x^2+3}{2x^2+1}$.

1) Trouver deux constantes réelles a et b telles que $\forall x \in R$, $p(x) = a + \dfrac{b}{2x^2+1}$.

2) Justifier que p est bornée et admet un maximum que l'on précisera.

B/ On considère les fonctions numériques à variable réelle g et u définies par :

$g(x) = \dfrac{2x-1}{x+2}$ et $u(x) = \dfrac{2}{x+1}$. Trouver l'ensemble de définition de la composée de fonction $g \circ u$ et ensuite calculer $g \circ u(x)$.

C/ On considère les fonctions numériques h et f définies chacune sur R par $h(x) = \dfrac{1}{2}x^2$ et $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - x - \dfrac{3}{2}$

1) a°) Trouver deux constantes réelles a et b telles que pour tout réel x, $f(x) = h(x-a) + b$.

b°) Représenter graphiquement h et en déduire la représentation graphique de f sur le même schéma en indiquant la transformation du plan utilisée. Unité : 1 cm sur les axes.

2) Sur un autre graphique, dessiner, en indiquant la méthode utilisée, la représentation graphique de la fonction f_1 définie par $f_1(x) = -\dfrac{1}{2}x^2 + |x| + \dfrac{3}{2}$.

3) On note v la restriction de f sur l'intervalle $[1;+\infty[$.

a°) Justifier que v est une bijection et donner le tableau de variation de v^{-1} la bijection réciproque de v. Définir explicitement v^{-1} .

b°) Sur une autre figure, représenter graphiquement v et v^{-1} en indiquant la méthode.

Exercice 82

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 3\sin(4x) - 1$

1) Calculer la période de la fonction f .

2) Calculer sa dérivée f'

3) Résoudre dans $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ l'équation $f'(x) = 0$

4) Donner le tableau de variation de f sur $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Exercice 83

Soit f la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ par : $f(x)=\frac{1}{\cos x}$

1) Etudier la parité de f .

2) Calculer la dérivée f' de f . En déduire le tableau de variations de f sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$

3) Résoudre dans $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ l'équation $f(x)=\sqrt{2}$

Exercice 84

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=2\sin^2 x+4\sin x+2$

1) Démontrer que f est $\pi-$périodique.

2) Calculer la dérivée f' de f .

3) Dresser le tableau de variations de f sur $[0;\pi]$.

4) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=0$.

Exercice 85

1) On considère la fonction g définie sur $[0;\pi]$ par $g(x)=2\cos x+1$.

a) Quel est le sens de variation de la fonction cosinus ? En déduire celui de la fonction g.

b) Résoudre l'équation $g(x)=0$.

c) Dresser le tableau de variations de g et en déduire le signe de $g(x)$.

2) On considère la fonction f définie sur $[0;\pi]$ par $f(x)=2\cos^2 x-\cos x-1$.

a) Factoriser le trinôme $2X^2-X-1$. En déduire une factorisation de $f(x)$.

b) Déterminer le signe de $f(x)$

Exercice 86

Le but de cet exercice est de comparer les deux fonctions f et g définies par :

$f(x)=\sqrt{1+x}$ et $g(x)=1+\frac{x}{2}$ sur l'intervalle $[-1;+\infty[$.

1) Montrer que $f(x)\geq 0$ et $g(x)\geq 0$ pour tout $x\in[-1;+\infty[$.

2) $(f(x))^2$ $(g(x))^2$

3) Démontrer que ($(f(x))^2\leq(g(x))^2$ pour tout $x\in[-1;+\infty[$

4) En déduire une comparaison de f et g sur l'intervalle $[-1;+\infty[$

5) Tracer sur un même repère les représentations graphiques de f et g sur l'intervalle $[-1;+\infty[$.

Exercice 87

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ par : $f(x)=\frac{x^2+7x+10}{x+1}$:

On note (C_f) sa représentation graphique dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) Calculer $f(0)$. En déduire les coordonnées du point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées.

2) Déterminer les coordonnées des éventuels points d'intersection de la (C_f) avec l'axe des abscisses.

3) Déterminer les réels a, b et c tels que : $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$:

4) Etudier les limites de f en -1 par valeurs inférieures et supérieures. En déduire que la courbe (C_f) admet une asymptote verticale (D) dont on précisera l'équation.

5) Etudier les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$. La courbe (C_f) admet-elle une asymptote horizontale ?

6) Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = x + 6$ est asymptote oblique à la courbe (C_f) en $+\infty$ et en $-\infty$. Préciser la position relative de (C_f) et de (Δ).

7) Calculer la dérivée f' de f puis étudier son signe. En déduire le tableau de variations de f .

8) Déterminer une équation des tangentes (T_A) et (T_B) aux points A et B de (C_f) d'abscisses respectives -2 et 3.

9) Tracer dans le repère (D), (T_A), (T_B) et (C_f). On se limitera à $[-10;-1[\cup]-1;6]$.

Exercice 88

On considère la fonction numérique f définie par $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 10}{x+1}$

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité sur las axes 1cm)

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de f .
2. Déterminer les limites de f aux bornes de D_f
3. En déduire une asymptote à (C)
4. Montrer que la droite (D) d'équation $y = x + 1$ est asymptote à la courbe (C)
5. Etudier la position de (C) par rapport à (D)
6. Calculer $f'(x)$ pour pour $x \neq -1$
7. Dresser le tableau de variation de f .
8. Construire la droite (D) et la courbe (C) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$
9. Tracer dans le repère que (C) la courbe Γ représentative de la fonction g définie sur $]-\infty, -1[$ par $g(x) = -f(x)$

Exercice n°89

On donne la fonction numérique f définie par : $f(x) = \frac{x}{x^2 + x + 1}$ et on note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O; I, J) unité $3cm$ sur les axes.

1. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
2. Ecrire une équation cartésienne de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.
3. Etudier la position de (C) par rapport à celle de (T).
4. Construire (C) et (T) dans le repère (O ; I, J).
5. Déduire de la courbe de f celle de la fonction g définie par : $g(x) = \frac{x-1}{(x-1)^2 + x} - 2$

Exercice n° 90

Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J)

On considère la fonction rationnelle f définie par $f(x) = \frac{3x^2 + ax + b}{x^2 + 1}$

1. Déterminer les réels a et b pour que la courbe représentative (C) de f soit tangente au point d'abscisse 0 à la droite d'équation $y = 4x + 3$
2. Pour les valeurs de a et b, trouvées à la première question,

démontrer que, pour tout nombre réel x, $f(x)=3+\frac{4x}{x^2+1}$

3. Etudier le sens de variation de f.
4. Calculer les limites aux bornes de l'ensemble de définition.
5. En déduire que (C) possède une asymptote (Δ) dont on donnera l'équation et sa position relative par rapport à la courbe (C)
6. Dresser le tableau de variation de f.
7. Démontrer que le point $\Omega(0;3)$ est un centre de symétrie de (C)
8. Tracer (C) , (Δ) et sa tangente au point Ω.
9. En déduire la courbe (C') de la fonction g défine par $g(x)=-f(x)$
10. Déterminer, suivant les valeurs du paramètre réel m, le nombre et le signe des racines de l'équation $f(x)=m$

Exercice n°91

Le plan étant rapporté à un repère orthonormé (O ;$\vec{\imath},\vec{\jmath}$);On considère les fonctions f et h suivantes :

$f: IR \longrightarrow IR$; $h: [2;+\infty[\longrightarrow [1;+\infty[$

$x \mapsto \frac{x-1}{x+1}$ $\qquad$ $x \mapsto \sqrt{x-2}+1$

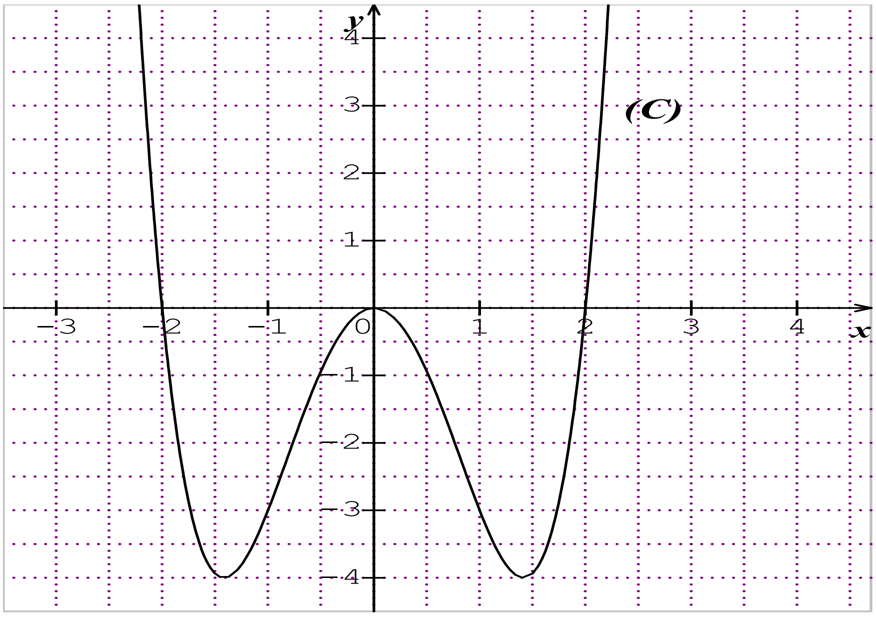
(C_f) et (C_h) sont les courbes de f et h respectivement.

1. Résoudre dans IR l'inéquation (I) : $\frac{x-1}{x+1} \geq 2$.
2. a) Montrer que pour tout réel h, si $-1+h$ appartient au D_f alors$-1-h$ appartient au D_f.
   b) En déduire que le point $\Omega(-1;1)$ est le centre de symétrie de la courbe (C_f).
3. a) Déterminer les ensembles de définitions $D_f et\ D_h\ des\ fonctions\ f\ et\ g\ respectivement$ et en déduire l'ensemble de définition de la fonction hof. (
   b) calculer $hof(x)$.
1. a) Montrer que la fonction h est injective et surjective, puis conclure.
   b) Déterminer la bijection réciproque h^{-1} de la fonction h.
2. Soit la fonction $g : x \mapsto \sqrt{x}$ et (C_g) sa courbe représentative.
   a) Montrer que (C_h) est l'image de (C_g) par une transformation que l'on précisera.
   b) Construire la courbe (C_h) et la courbe $(C_{h^{-1}})$ de la fonction h^{-1}.

Exercice n°92

Le plan étant rapporté à un repère orthonormé (O ;$\vec{\imath},\vec{\jmath}$).

Soit f la fonction rationnelle définie sur IR dont la courbe représentative (C) est donnée ci-dessous.



1. Faites des conjectures sur
   a. L'ensemble de définition de f.
   b. Les limites de f en $+\infty$ *et en* $-\infty$.
   c. La parité de f.
2. Quelles sont les solutions dans IR de:
   a) L'équation f(x) = 0
   b) Des inéquations $f(x) \geq 0$; $f(x) < -3$?
3. Déterminer graphiquement suivant les valeurs du paramètre réel m le nombre et le signe des solutions de l'équation $f(x) = m$
4. Tracer dans le même repère la courbe représentative de la fonction $x \to -f(x)$.

Exercice n°93

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ par : $f(x)=1-\dfrac{2}{x-1}$. Soit (Cf) la courbe représentative de f

et (H) la courbe d'équation $y=-\dfrac{2}{x}$ dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O; I ; J).

1. a. Déterminer (par ses coordonnées) le vecteur de translation qui transforme (H) en (Cf).
b. Construire (H) et (Cf) dans le repère.
2. Dresser le tableau de variation de la fonction f.
3. Déterminer graphiquement :
a. l'abscisse du point I intersection de (Cf) et de l'axe des abscisses.
b. les solutions de l'équation $f(x)=-\dfrac{2}{x}$.
4. a. Vérifier que pour tout réel x de $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ on a : $f(x)=\dfrac{x-3}{x-1}$
b. Retrouver algébriquement l'abscisse de I.
5. a. Déduire des résultats précédents, l'ensemble des solutions de l'équation f(x) > 0.
b. Tracer dans le même repère orthonormé, la courbe de la fonction h définie par :
h(x) = |f(x)|.
6. Soit un réel k, déterminer en fonction de k le nombre et le signe des solutions de l'équation
h(x) = k.

Exercice n°94

Soient *f* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 1 - (x - 2)^2$

et g la fonction définie sur [-3 ; +∞[par : $g(x) = \sqrt{x+3} - 1$.

1°) Justifier, en utilisant les fonctions de références, que leurs tableaux de variations respectifs sont :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	$-\infty$

x	-3		$+\infty$
$g(x)$	-1	↗	$+\infty$

2°) Résoudre l'inéquation : $f(x) \geq -3$, en déduire l'ensemble de définition de la fonction *gof*.

3°) Déterminer, en justifiant, l'ensemble de définition de la fonction *fog*.

4°) Calculer les images de -3 et 6 par la fonction *fog*.

5°) Déterminer, à partir des variations des fonctions *f* et *g*, les variations de la fonction *fog* sur chacun des intervalles suivants : I_1 = [-3 ; 6] et I_2 = [6 ; +∞[.

Dresser le tableau de variations complet de la fonction *fog*.

Exercice n°95

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J). Soient f la fonction de R vers R définie par $f(x) = \dfrac{2x-5}{x-3}$ et (Cf) sa courbe représentative.

1. Déterminer le domaine de définition Df de f.
2. Déterminer les réels a et b tels que pour tout x ≠ 3 on a $f(x) = a + \dfrac{b}{x-3}$
3. Soit g la restriction de f sur]3; +∞[:

a) Montrer que g est une bijection de]3; +∞[vers]−∞; 2[et définir la fonction réciproque g−1 de g.

b) Montrer que g est minorée.

4. Soit (Γ) l'hyperbole d'équation $y = \dfrac{1}{x}$.

a) Construire l'hyperbole (Γ) dans le repère (O, I, J).

b) Donner un programme de construction de (Cf) à partir de (Γ).

c) Construire (Cf) dans le repère précédent.

Exercice n°96

Ce **Exercice** *comporte deux parties indépendantes.*

<u>Partie A</u>

1. On considère la fonction f définie sur [0,+∞[par $f(x) = \frac{x^2}{2x^2+1}$.
a. Montrer que f est croissante.
b. Montrer que pour tout $x \geq 0, f(x) \geq 0$.
c. Déterminer deux réels a et b tels que $f(x) = a + \frac{b}{2x^2+1}$.
d. En déduire que f est majorée.
e. f est-elle bornée ?
2. La courbe en annexe est la courbe représentative d'une fonction h. Sur la feuille en annexe, construire la courbe représentative des fonctions j et k définies par $j(x) = h(|x|)$ et $k(x) = |h(x)|$.

Partie A : ***Etude d'une famille de fonctions.***

On considère la famille de fonctions f_m définie pour tout réel m par $f_m = x^2 - 2mx$.
1. Déterminer le domaine de définition de f_m.
2. Montrer que lorsque m varie dans $\mathbb{R}$, toutes les courbes C_{f_m} représentatives des fonctions f_m passent par un point fixe dont on déterminera les coordonnées.
3.a. Montrer que l'équation $f_m = 0$ admet deux solutions dont l'une est indépendante de m.
b. Pour quelle valeur de m les deux solutions sont-elles identiques ? On notera par α_m la solution qui dépend de m et par $A_m(\alpha_m; 0)$.
c. Quel est l'ensemble des points A_m lorsque m varie dans $\mathbb{R}$?
4. Déterminer les coordonnées des sommets Ω_m des courbes C_{f_m}.
5. Déterminer le lieu géométrique (Γ) des points Ω_m lorsque m varie dans $\mathbb{R}$.

Exercice n°97

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). On appelle ($\mathcal{C}$), la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$.

1. Déterminer D_f et calculer les limites aux bornes de D_f.
2. a) Montrer que pour tout $x \neq 1$, $f'(x) = \frac{x^2}{(x-1)^2} \times \frac{x-3}{x-1}$.
   b) En déduire le signe de f' puis le tableau de variation de f.
   c) Montrer que ($\mathcal{C}$) admet un point d'inflexion que l'on déterminera.
3. a) Montrer que pour tout $x \neq 1$, $f(x) = x + 2 + \frac{3x-2}{(x-1)^2}$ et en déduire que ($\mathcal{C}$) admet une asymptote oblique (D) dont on précisera une équation.
   b) Etudier la position relative de ($\mathcal{C}$) par rapport à (D).
   c) Déterminer une équation de de la tangente (T) à ($\mathcal{C}$) au point d'abscisse 0.
4. Construire ($\mathcal{C}$) (unité 1cm en abscisse et 0,5cm en ordonnée).

Exercice n°98

Le repère (O, I, J) est orthonormé. g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 4\sin^2 x \cos 2x$ et ($\mathcal{C}_g$) sa courbe représentative.

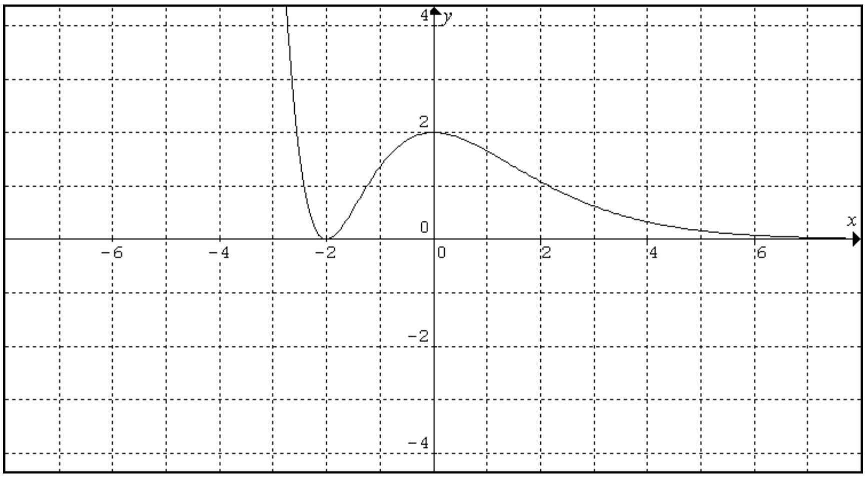
1-) a) Démontrer que g est périodique de période π.
   b) Démontrer que $(D): y = \frac{\pi}{2}$ est axe de symétrie à ($\mathcal{C}_g$).
   c) En déduire que l'on peut étudier g sur $\left[0\,; \frac{\pi}{2}\right]$.

2-) a) Démontrer que pour tout réel x, $g'(x) = 4\sin x\,(1 - 4\sin^2 x$.
   b) Dresser le tableau de variation de g sur $\left[0\,; \frac{\pi}{2}\right]$.

3-) Tracer ($\mathcal{C}_g$) sur $\left[-\frac{3\pi}{2}\,; \frac{3\pi}{2}\right]$.

Exercice n°99

Sur le graphique ci-dessous est représentée une fonction f définie sur IR :



1. Dresser le tableau de variations de cette fonction *f*.
2. On admet que cette fonction *f* est dérivable sur IR. On définit alors la fonction *g* telle que $g = \frac{1}{f}$.
   a. Donner l'ensemble de définition, puis de dérivation de *g*.
   b. Dresser le tableau de variations complet de *g*.
   c. On note C_g la courbe représentative de *g*. Si C_g admet des asymptotes, donner les en justifiant sommairement votre réponse.

Exercice n°100

Soit *f* la fonction définie sur] –1 ; +∞ [par $f(x) = \dfrac{3x^2 + x - 1}{2(x+1)}$; On se place dans le repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité graphique 3cm.

1. Justifier sommairement l'ensemble définition de *f*.
2. a. Calculer la limite de *f* en +∞.
   b. Calculer la limite de *f* en -1^+. Que peut-on en déduire ?
3. a. Montrer que $f'(x) = \dfrac{3x^2 + 6x + 2}{2(x+1)^2}$.
   b. Dresser le tableau de variations complet de *f* sur son ensemble de définition.
4. Soit T la tangente à C_f en $x = 0$. Déterminer l'équation réduite de T.
5. a. Montrer que pour tout $x \in\ ]-1\,;+\infty[$, on a $f(x) = \frac{3}{2}x - 1 + \dfrac{1}{2\,(x+1)}$.
   b. Soit D la droite d'équation $y = \frac{3}{2}x - 1$. Montrer que D est asymptote à C_f en +∞.
   c. Etudier la position relative de D et de C_f.
6. Tracer dans le repère C_f, T et D.

Exercice n°101

Soit f la fonction définie sur une union d'intervalle de IR par $f(x) = \frac{x+1}{x^2+2x-3}$. On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité graphique 2cm.

1. Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f.
2. a. Déterminer le point d'intersection entre la courbe C_f et l'axe des ordonnées.
   b. Déterminer le ou les point(s) d'intersection éventuel(s) entre la courbe C_f et l'axe des abscisses.
3. a. On note f' la dérivée de la fonction f sur l'ensemble D_f. Montrer que pour tout $x \in$ IR, $f'(x) = -\frac{x^2+2x+5}{(x^2+2x-3)^2}$.
   b. Etudier les variations de f sur l'ensemble D_f.
4. Déterminer l'équation réduite de la tangente T à la courbe C_f au point A d'abscisse 2.
5. Tracer la courbe C_f, la tangente T et placer les points obtenus dans la question 2 dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$
6. On définit la fonction g par $g = \frac{1}{f}$.
   a. Déterminer D_g l'ensemble de définition de la fonction g en utilisant les questions 1 et 3b.
   b. En utilisant les questions 3b et 6a, déterminer le sens de variations de g sur D_g.

Exercice n°102

Soit f la fonction définie sur I =] 1 ; +∞ [par : $f(x) = \frac{-x^2+4x-2}{x-1}$.

On note C_f sa courbe représentative.

1. a. Déterminer les limites de f aux bornes de l'ensemble de définition.
   b. En déduire les asymptotes éventuelles.
2. a. Déterminer les trois réels a, b et c tels que pour tout $x \in$ I, $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$.
   b. Montrer que la droite D d'équation $y = -x + 3$ est asymptote oblique à C_f en $+\infty$.
   c. Etudier la position relative de C_f et de D sur l'intervalle I.
3. Montrer que $f'(x) = \frac{-x^2+2x-2}{(x-1)^2}$.
4. Dresser le tableau de variations de f sur I.
5. Représenter C_f et ses asymptotes.

Exercice n°103

1. A l'aide de votre calculatrice, conjecturer la limite quand x tend vers 0 par valeurs supérieures de $\frac{\sin x}{x}$. La suite de l'exercice démontre cette conjecture.
2. Soit f la fonction définie sur I = $]0, \frac{\pi}{2}]$, par $f(x) = \sin x - x$.
   a. Etudier les variations de f sur I.
   b. En déduire que pour tout $x \in$ I, $\frac{\sin x}{x} < 1$.
3. a. En s'inspirant de la question précédente, montrer que, pour tout $x \in [0 ; \frac{\pi}{2}[$, $\tan x > x$.
   b. En déduire, pour tout $x \in]0 ; \frac{\pi}{2}[$, $\frac{\sin x}{x} > \cos x$.
4. Conclure !!!!!

Exercice n°104

On considère la fonction f définie sur $]-1\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^2+4x+1}{x+1}$. On note C sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité graphique 2cm.

1. Justifier sommairement l'exclusion de la valeur -1 de l'intervalle de définition de f.
2. a. Déterminer les limites de f aux bornes de l'ensemble de définition.
   b. En déduire les asymptotes éventuelles dont vous donnerez une équation.
3. a. Montrer que pour tout $x \in\,]-1\,;+\infty[$ on a $f(x) = x+3-\dfrac{2}{x+1}$.
   b. Soit Δ la droite d'équation $y = x + 3$. Montrer que Δ est asymptote à C en $+\infty$
   c. Etudier la position relative de C et de Δ.
4. Dresser le tableau de variations complet de f en calculant au préalable sa dérivée.
5. Soit T la tangente à C au point d'abscisse 0. Calculer une équation cartésienne de T.
6. Trouver les points d'intersection avec les axes de coordonnées.
7. Donner en fonction de m le nombre de solution de l'équation $f(x) = m$.
8. Soit P la parabole d'équation $y = x^2$. On se place pour cette question sur $\mathbb{R}^+$.
   a. Montrer que chercher sur IR^+ les points d'intersection entre C et P revient à résoudre l'équation $x^3 - 4x - 1 = 0$.
   b. Soit g la fonction définie sur IR^+ par $g(x) = x^3 - 4x - 1$. Etudier les variations de g sur $\mathbb{R}^+$. On demande les limites.
   c. Montrer qu'il y a un unique point d'intersection entre C et P sur $\mathbb{R}^+$.
   d. On donnera une valeur approchée de son abscisse à 10^{-3}.
9. Tracer dans le repère les asymptotes, la tangente T, la parabole P et la courbe C.

Exercice n°105

Soit la fonction $g(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$.

a) Quel est l'ensemble de définition de g ?

b) Montrer que $g(x) = 1 - \dfrac{2}{x^2+1}$

c) Soit $f(x) = 1 - \dfrac{2}{x+1}$. T racer la représentation graphique de f en utilisant la fonction $u : x \mapsto -\dfrac{2}{x}$ et une translation à préciser.

d) Donner le tableau de variation de f.

e) Montrer que g est la composée de la fonction f et d'une autre fonction.

f) En déduire le tableau de variation de g.

Exercice n°106

Soit la fonction f dénie dans $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2-6x+7$.

1) a) Déterminer les coordonnées du point I minimum de C_f .

b) Montrer que la droite d'équation $x=3$ est axe de symétrie de la courbe C_f .

c) Tracer la courbe C_f .

2) a) Résoudre l'équation $f(x)=0$.

b) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x)\leq 0$

3) Soit la fonction g(x) = $g(x)=\left|x^2-6x+7\right|$.

a) T racer la courbe de g en utilisant celle de f et une transformation.

b) Ecrire le tableau de variation de g.

4) Soit la fonction $h(x)=x^2+6x+7$.

a) Montrer que $h(x)=f(-x)$.

b) En déduire la représentation graphique de h.

Exercice n°107

1) Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$.

a) Quel est l'ensemble de définition de g ?

b) Calculer $g\left(\sqrt{2}\right)$ et $g\left(\sqrt{3}+1\right)$.

c) Déterminer l'antécédent $\dfrac{5}{2}$ par g.

d) Déterminer a et b tels que $g(x)=a+\dfrac{b}{x-1}$:

e) En utilisant une translation et la fonction $u:x\mapsto\dfrac{b}{x}$, tracer la représentation graphique de g.

f) Résoudre graphiquement : $g(x)=1$; $g(x)\geq 0$; $g(x)=2x-1$.

2) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2+2x-3$.

a) Déterminer a et b tels que $f(x)=(x-a)^2+b$.

b) En utilisant une translation et la fonction $v:x\mapsto x^2$, tracer la représentation graphique de f .

3) a) Montrer que $f(x)=g(x)\Leftrightarrow x^3+x^2-7x+2=0$.

b) Calculer $f(2)$ et $g(2)$.

c) Montrer que $x^3+x^2-7x+2=(x-2)\left(x^2+3x-1\right)$.

d) Résoudre l'équation $x^3+x^2-7x+2=0$.

e) En déduire les coordonnées des points d'intersection des courbes de f et de g.

Exercice n°108

Soit les fonctions à variables réelles définies par $f_1:x\mapsto\dfrac{1}{\sqrt{2x-3}}+1$ et $f_2:x\mapsto -3(2-x)^2-2$.

a) Donner les domaines de dénition de f_1 et de f_2.

b) Décomposer f_1 et de f_2 à l'aide de fonctions simples. En déduire leur tableau de variation.

c) Montrer que f_1 est minorée et que f_2 est majorée.

En déduire que l'on a pour tout x, $f_1(x)\geq f_2(x)$.

d) Soit le point $\Omega'(2;-2)$. Montrer que la courbe de f_2 a pour équation $Y=-3X^2$ dans le repère $(\Omega;\vec{i},\vec{j})$
.
T racer sa courbe.
e) Montrer que la droite d'équation $x=2$ est axe de symétrie de la courbe f_1