DOUALA MATHEMATICAL SOCIETY

EXERCICE CORRIGE : Isométries

EXERCICE N°9

Soit $ABCD$ un rectangle et Δ la médiatrice de $[AD]$

❶ Déterminer $S_\Delta \circ S_{(BC)}$ et $S_{(BC)} \circ S_\Delta$

❷ On suppose que $f = S_{(BC)} \circ t_{\overrightarrow{AB}}$ et $f = t_{\overrightarrow{AB}} \circ S_{(AD)}$
Montrer que $f = g = S_\Delta$

❸ On pose : $h = t_{\overrightarrow{AC}} \circ S_{(AD)}$ et $k = S_{(BC)} \circ t_{\overrightarrow{AC}}$
Déterminer la forme réduite de h et k. Que remarque - t-on ?

CORRIGE

❶ $S_\Delta \circ S_{(BC)} = t_{\overrightarrow{AB}}$ et $S_{(BC)} \circ S_\Delta = t_{\overrightarrow{AB}}$

❷ $f = S_{(BC)} \circ t_{\overrightarrow{AB}} = S_{(BC)} \circ S_{(BC)} \circ S_\Delta = S_\Delta$ car $S_{(BC)} \circ S_{(BC)} = Id_{\mathscr{P}}$
$g = t_{\overrightarrow{AB}} \circ S_{(AD)} = S_\Delta \circ S_{(AD)} \circ S_{(AD)} = S_\Delta$

❸

$$\begin{aligned} h &= t_{\overrightarrow{AC}} \circ S_{(AD)} \\ &= t_{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}} \circ S_{(AD)} \\ &= t_{\overrightarrow{AB}} \circ t_{\overrightarrow{BC}} \circ S_{(AD)} \\ &= t_{\overrightarrow{BC}} \circ t_{\overrightarrow{AB}} \circ S_{(AD)} \\ &= t_{\overrightarrow{BC}} \circ S_\Delta \end{aligned}$$

Etant donné que $\overrightarrow{BC}$ est un vecteur directeur de Δ, h est la symétrie glissée d'axe Δ et de vecteur $\overrightarrow{BC}$

$$\begin{aligned} k &= S_{(BC)} \circ t_{\overrightarrow{AC}} \\ &= S_{(BC)} \circ t_{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}} \\ &= S_{(BC)} \circ t_{\overrightarrow{AB}} \circ t_{\overrightarrow{BC}} \\ &= S_{(BC)} \circ t_{\overrightarrow{AB}} \circ t_{\overrightarrow{BC}} \\ &= S_\Delta \circ t_{\overrightarrow{BC}} \end{aligned}$$

Etant donné que $\overrightarrow{BC}$ est un vecteur directeur de Δ, k est la symétrie glissée d'axe Δ et de vecteur $\overrightarrow{BC}$

Quelques Précisions importantes

- Nous avons $h = t_{\overrightarrow{AC}} \circ S_{(AD)}$ Puisque le $\overrightarrow{AC}$ n'est pas normal à (AD), h est une symétrie glissée, cepandant, son axe n'est pas la droite (AD) et son vecteur n'est pas $\overrightarrow{AC}$
- La composée de deux translations est commutative. $t_{\overrightarrow{AB}} \circ t_{\overrightarrow{BC}} = t_{\overrightarrow{BC}} \circ t_{\overrightarrow{AB}}$
- Puisque le vecteur $\overrightarrow{BC}$ est directeur de la droite Δ,
  la composée $t_{\overrightarrow{BC}} \circ S_{\Delta}$ est permutable. $t_{\overrightarrow{BC}} \circ S_{\Delta} = S_{\Delta} \circ t_{\overrightarrow{BC}}$