Ministère des Enseignements Secondaires
Office du Baccalauréat du Cameroun

Examen : Baccalauréat 2014
Série : C-E
Epreuve : MATHEMATIQUES
Durée : 4h Coefficient : 5(C)/ 4(E)

EXERCICE 1 (3 points)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on considère les points $A(1;-1;0)$; $B(3;0;1)$; $C(1;2;-1)$ et $D(1;0;0)$.

1. Démontrer que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires. [0,5pt]
2. (a) Ecrire une équation cartésienne du plan (ABC). [0,5pt]
   (b) Calculer le volume du tétraèdre $ABCD$. [0,75pt]
   (c) Déterminer l'expression analytique de la réflexion f par rapport au plan (ABC). [0,75pt]
3. Soit (S) la sphère de centre D passant par B. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'image (S') de (S) par f. [0,5pt]

EXERCICE 2 (4,5 points)

1. On considère les équations différentielles suivantes : (E) : $y'' - 4y' + 4y = 2\cos x + \sin x$; (E_0) : $y'' - 4y' + 4y = 0$.
   (a) Déterminer les réels a et b pour lesquels la fonction g définie pour tout réel x par $g(x) = a\cos x + b\sin x$ est solution de (E). [0,5pt]
   (b) Soit f une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est une solution de (E) si et seulement si $f - g$ est solution de (E_0). [0,5pt]
   (c) Résoudre (E_0) et en déduire la forme générale des solutions de (E). [0,75pt]
2. Soit la fonction h définie dans $[0;\pi]$ par $h(x) = \dfrac{2}{5}\cos x - \dfrac{1}{5}\sin x$. On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
   (a) Calculer pour tout x de $[0;\pi[$, $h'(x)$ et $h''(x)$. [0,5pt]
   (b) Etudier les variations de h' sur $\left[\dfrac{\pi}{2};\pi\right[$ et en déduire que l'équation $h'(x) = 0$ dans $\left[\dfrac{\pi}{2};\pi\right[$ admet une unique solution α avec $2,6 < \alpha < 2,7$. [0,75pt]
   (c) Montrer que $h'(x) > 0 \iff x \in]\alpha;\pi[$ et dresser le tableau de variation de h. [0,75pt]
   (d) Tracer (C). (Prendre $\alpha = 2,6$ et pour unité de longueur sur les axes : 1,5 cm). [0,75pt]

EXERCICE 3 (2,5 points)

1. Soit a un réel strictement positif.
   (a) Montrer que $1 - a < \dfrac{1}{1+a} < 1$. [0,5pt]
   (b) En déduire que $a - \dfrac{a^2}{2} < \ln(1+a) < a$. [0,25pt]
2. Soit n un entier naturel non nul, on pose $P_n = \left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)\left(1 + \dfrac{2}{n^2}\right)\cdots\left(1 + \dfrac{n}{n^2}\right)$.
   (a) Justifier que $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. [0,5pt]
   (b) Montrer que : $\dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) - \dfrac{1}{12}\dfrac{(n+1)(2n+1)}{n^3} < \ln P_n < \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$. [0,75pt]
   (c) En déduire que la suite (P_n) converge et déterminer sa limite. [0,5pt]

PROBLEME

Dans le plan (P) rapporté à un repère orthonormé d'origine O, on considère l'application Ψ définie par : $\Psi(O) = O$ et pour tout point M de (P) disctinct de O, $\Psi(M) = M'$ tel que $\overrightarrow{OM'} = \dfrac{4}{OM^2}\overrightarrow{OM}$.

Partie A (6 points)

1. (a) Montrer que pour tout point M de (P), $\Psi \circ \Psi(M) = M$. [0,75pt]

   (b) Justifier que l'ensemble des points M de (P) distincts de O tels que $\Psi(M) = M$ est le cercle de centre O et de rayon 2. [0,75pt]

   Pour toute la suite, (d) est une droite quelconque de (P), D est un point fixé de (d) distinct de O ; $\vec{u}$ est un vecteur directeur de (d). On pose $\vec{e}_2 = \dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$ et on suppose le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. On donne $\overrightarrow{OD} = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$.

2. Justifier que (d) est l'ensemble des points M d'affixe z tels que $z = a + it$ où $t \in \mathbb{R}$. [0,5pt]

3. Soient M et M' deux points de (P) tous distincts de O et d'affixes respectifs z et z'.

   (a) Montrer que $\Psi(M) = M' \iff z' = \dfrac{4}{\bar{z}}$. [0,75pt]

   (b) En posant $\overrightarrow{OM} = a\vec{e}_1 + t\vec{e}_2$ et $\overrightarrow{OM'} = x'\vec{e}_1 + y'\vec{e}_2$, montrer que $\Psi(M) = M' \iff x' = \dfrac{4a}{a^2+t^2}$ et $y' = \dfrac{4t}{a^2+t^2}$. [0,75pt]

   (c) Vérifier que dans ce cas, $\left(x' - \dfrac{2}{a}\right)^2 + y'^2 = \dfrac{4}{a^2}$. [0,5pt]

   (d) En déduire que si M appartient à (d), alors $\Psi(M)$ appartient au cercle (C_1) de diamètre $[OH']$ où H' est l'image par Ψ du projeté orthogonal H de O sur (d). [1pt]

4. Soit h l'application affine qui à tout point $M(x;y)$ associe $M_1(x_1, y_1)$ tel que $\begin{cases} x_1 = x \\ y_1 = \dfrac{2}{3}y \end{cases}$. Montrer que l'image de (C_1) par h est une ellipse dont dont donnera l'excentricité. [1pt]

Partie B (4 points)

Dans le plan vectoriel $(\vec{P})$ associé à (P), on considère l'application φ telle que $\varphi(\vec{0}) = \vec{0}$ et $\varphi(\vec{u}) = \dfrac{4}{\|\vec{u}\|^2}\vec{u}$ si $\vec{u} \neq \vec{0}$.

1. Soit $\vec{v}$ un vecteur non nul, exprimer $\varphi\left(\dfrac{4}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v}\right)$ en fonction de $\vec{v}$ et en déduire que φ n'est pas linéaire. [1pt]

2. (a) Déterminer l'ensemble $Inv(\varphi)$ des vecteurs $\vec{u}$ de $\vec{P}$ tels que $\varphi(\vec{u}) = \vec{u}$. [1pt]

   (b) Soient $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ deux vecteurs de $(\vec{P})$ tels que $\|\vec{u}_1\| = \|\vec{u}_2\| = 2$ et $Mes(\widehat{\vec{u}_1, \vec{u}_2}) = \dfrac{\pi}{3}$. Calculer $\|\vec{u}_1 + \vec{u}_2\|$ et en déduire que $Inv(\varphi)$ n'est pas un sous espace vectoriel de $(\vec{P})$. [1pt]

3. Soit $Opp(\varphi)$ l'ensemble des vecteurs de $(\vec{P})$ tels que $\varphi(\vec{u}) = -\vec{u}$. Déterminer $Opp(\varphi)$ et montrer que $Opp(\varphi)$ est un sous-espace vectoriel de $(\vec{P})$. [1pt]