Ministère des Enseignements Secondaires
Office du Baccalauréat du Cameroun

Examen : Baccalauréat Session : 1988
Série : C
Epreuve : Mathématiques
Durée : 4 heures
Coefficient : 4

Exercice N°1

1. Calculer les carrés des éléments $\dot{0}$, $\dot{1}$, $\dot{2}$, $\dot{3}$, $\dot{4}$ et $\dot{5}$ de $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$
   En déduire le nombre de solution de l'équation $x^2 = a$ dans $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$, suivant les valeurs de a élément de $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$.
2. Soit l'équations : $x^2 - 2px + q = 0$, où p et q sont des élément de $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$
   Montrer que cette équation admet deux solution distinctes ou confondue dans $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ si et seulement si $p^2 - q$ appartient a un sous ensemble A de $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ que l'on déterminera.
3. Résoudre dans $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ l'équation : $x^4 - \overline{10}x^2 + 2 = 0$

Exercice N°2

Dans un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$ soit A le point de coordonnée $(-1\ ,\ 0)$ et (D_m) la droite passant par A et de coefficient directeur m, m étant un paramètre réel.

1. Soit P le point d'intersection de la droite (D_m) et de l'axe des ordonnées.

a) Déterminer, en fonction de m, les abscisse des points de (D_m) dont la distance à P est égale à la distance de P à O.

b) Vérifier que ces points appartiennent à la courbe (S) d'équation $x(x^2 + y^2) + x^2 - y^2 = 0$

2. Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = x\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$

a) Etudier les variations de f

On admet que $-0,30$ est une valeur approchée à 10^{-2} près de $f\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$

b) Soit (C) la courbe représentative de f . préciser la tangente à (C) au point d'abscisse 0 et la demi-tangente à (C) au point d'abscisse -1.

Construire (C) avec soin

En déduire la construction de (S) que l'on représentera dans le même repère que (C)

Problème

Soit (E) un plan vectoriel muni d'une base $(\vec{i}, \vec{j})$. On note $End(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E. On rappelle que $(End(E), +, \bullet)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et que $(End(E), +, \circ)$ est un anneau unitaire. On note Id_E l'application identité de E, $\vec{u}$ étant un vecteur non nul, note $D_{\vec{u}}$ la droite vectorielle de base $(\vec{u})$. Soit Q l'ensemble des endomorphismes f de E qui vérifient : $f \circ f = -Id_E$

A. 1) montrer que tout élément f de Q est bijectif et déterminer f^{-1}

2. Soit f un élément de Q

a) Montrer que, pour tout réel $\lambda, f(\vec{u}) = \lambda\vec{u}$ si et seulement $\vec{u} = \vec{0}$

b) En déduire que, pour tout élément non nul $\vec{u}$ de E, $(\vec{u}, f(\vec{u}))$ est base de E

c) Ecrire la matrice de f dans cette base.

3. Soit σ la symétrie vectorielle de base $D_{\vec{i}+f(\vec{i})}$ et de direction $D_{\vec{i}-f(\vec{i})}$

a) Justifier l'existence de cette symétrie.

b) Ecrire la matrice de σ dans la bases $(\vec{i}, f(\vec{i})$.

c) Montrer que l'application S, définie $S = f \circ \sigma$ est une symétrie vectorielle dont one donnera les éléments caractérisque.

d) En déduire que f est la composée de deux symétries vectorielles.

B. Soit f_0 un élément donné de Q et F l'ensemble des applications de la forme $\alpha Id_E + \beta f_0, \alpha$ et β étant deux réel.

1. a) montrer que h est sous-espace vectoriel de dimension 2 de $(End(E), +, \bullet)$ et que (Id_E, f_0) est une base de F

b) Montrer que est un $(F, +, \circ)$ anneau.

2. soit h l'application de $\mathbb{C}$ dans F qui, à tout complexe $z, z = \alpha + i\beta$ associe l'endomorphisme $\alpha Id_E + \beta f_0$

Montrer que h est un isomorphisme d'anneaux de $(\mathbb{C}, +, \times)$ sur $(F, +, \circ)$. Quelles propriétés peut-on en déduire concernant l'anneau $(F, +, \circ)$?

3. a) Déterminer $h^{-1}(Id_E)$ et en déduire las couples de réels (α, β) tels que $(\alpha Id_E + \beta f_0)^4 = Id_E$. (on note $f^4 = f \circ f \circ f \circ f$)

b) déterminer $F \cap Q$.

c) Soit θ un réel appartenant à l'intervalle $]0, \pi[$ et g l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ est : $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2\cos\theta \end{pmatrix}$

Soit Φ la forme bilinéaire symétrique définie par :

$\Phi((\vec{i}, \vec{i}) = 1$; $\Phi(\vec{j}, \vec{j}) = 1$; $\Phi(\vec{i}, \vec{j}) = \cos\theta$

1. Montrer que Φ est produit scolaire sur E
2. Montrer que g est une transformation orthogonale de l'espace vectoriel euclidien (E, Φ).
3. Pour quelle valeur de θ l'endomorphisme g appartient-il à Q ? Dans ce cas que peut-on dire de la base $(\vec{i}, \vec{j})$?

Donner alors la nature et les éléments caractéristique de g