Ministère des Enseignements Secondaires
Office du Baccalauréat du Cameroun

Examen : Baccalauréat Session : 1987
Série : C
Epreuve : Mathématiques
Durée : 4 heures
Coefficient : 4

Exercice 1

Soit f la fonction des $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} & \text{si } x\leq 0 \\ f(x)=xLog\dfrac{1}{x} & \text{si } x>0 \end{cases}$$

Où Log désigne le logarithme népérien de x, et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan (unité sur l'axe = 2cm).

1. Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$;
2. Etudier les variations de f
3. Montrer que l'équation $f(x)=-1$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique qui appartient à l'intervalle $\left]\dfrac{3}{2},2\right[$.
4. a) étudier les branches infinies de (C)

b) Déterminer les demi-tangentes à (C) au point 0, et la tangente à (C) au point d'abscisse 1.

c) Tracer avec soin la courbe (C).

5. Déterminer l'aire de la portion du plan définie par :

$\begin{cases} a\leq x\leq 1 \\ 0\leq y\leq f(x) \end{cases}$ Où a est réel tel que $0<\text{a}\leq 1$.

Quelle est sa limite quand a tend vers 0 ?

On donne les valeurs approchées suivants :

$e^{-1}\cong 0,37$: $e^{x}\cong 0,72$: $Log2\cong 0,69$: $Log3\cong 1,10$

Exercice N°2

Le plan affine euclidien orienté est rapporté à un repère orthonormé direct $(o,\vec{u},\vec{v})$

Soit A,B,M les points d'affixes respectifs $3+i$, $-1+3i$ et z où z est un complexe différent de $3+i$ et $-1+3i$

On pose : $z'=\dfrac{z-3-1}{z+1-3i}$

1. Montrer que $|z'|=\dfrac{AM}{BM}$ et en déduire géométriquement l'ensemble E des points M tel que $|z'|=1$.

2. On rappelle qu'on désigne par $\arg z$ une mesure en radians de $Argz$.
   a) Montrer que $\arg z'$ est une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MA}\right)$
   b) En déduire l'ensemble F des points M tels que z' soit imaginaire pur.

N.B : on fera une figure.

Problème

A. Soit V un plan vectoriel euclidien et $\left(\vec{i},\vec{j}\right)$ une base orthonormée de V . A tout couple (a,b) de $\mathbb{R}^2$, différent de $(0,0)$, on associe l'endomorphisme $\rho_{a,b}$ de V dont la matrice, dans la base $\left(\vec{i},\vec{j}\right)$ est $\begin{pmatrix} a-3b & 2b \\ 2b & a \end{pmatrix}$

1. a) montrer que $\rho_{a,b}$ n'est pas bijectif si et seulement si a et b vérifient la relation $(a+b)(a-4b)=0$.
   b) Montrer qu'il existe deux couples (a_1,b_1) et (a_2,b_2) tels que les endomorphismes associes que l'on notera pour simplifier, respectivement ρ_1 et de ρ_2 ; soient des projetions vectorielles différentes de l'identité.
   c) Déterminer le noyau et l'image de ρ_1 et de ρ_2.

Montrer que $\ker\rho_1=\operatorname{Im}\rho_2$ et $\ker\rho_2=\operatorname{Im}\rho_1$

En déduire $\rho_1\circ\rho_2=\rho_2\circ\rho_1=\theta$, où θ désigne l'endomorphisme nul de V

2. Déterminer les couples (a,b) tels que $\rho_{a,b}$ soit une symétrie vectorielle différente de l'identité.

B. Soit E un plan affine euclidien, d'espace vectoriel associé V. on munit E du repère $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$.

Soit f l'application affine de E qui, à tout point M de coordonnées (x,y) associe Le point M' de coordonnées (x',y') telle que $\begin{cases} x'=-\dfrac{3}{5}x+\dfrac{4}{5}y+\dfrac{4}{5} \\ y'=\dfrac{4}{5}x+\dfrac{3}{5}y-\dfrac{2}{5} \end{cases}$

1. Déterminer la nature de f et ses éléments caractéristiques.
2. Soit z et z' les affixes respectives des points M et M'.

Montrer qu'il existe deux complexe p et q tels que $z'=p\bar{z}+9$, p et q indépendants de z et z'.

3. On considère l'ensemble (H) des points du plan dont les coordonnées revérifient la relation $6x^2+4y^2-11xy-11x+8y-1=0$
   a) Déterminer l'image (H') de (H) par f.
   b) Montrer qu'une équation de (H') peut s'écrire sous la forme $y=g(x)$

Construire (H')

Quelle est la nature de (H) ?