Ministère des Enseignements Secondaires
Office du Baccalauréat du Cameroun

Examen : Baccalauréat Session : 1985
Série : C
Epreuve : Mathématiques
Durée : 4 heures
Coefficient : 4

Exercice 1 :

1. On considère la fonction g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$g(x)=\frac{1}{x}+Log|x|+1$$

a) Etudier la variation de g. (on ne demande pas de tracer sa courbe représentative)

b) Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique l'on déterminera.

2. Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$f(x)=(1+Log|x|)e^{x}$, Et (C) sa courbe représentative dans un plan rapporté a un repère$(o,\vec{i},\vec{j})$, (unité sur les axes = 2cm)

a) Etudier les variations de f

b) Déterminer les points d'intersection de (C) avec l'axe $x'ox$

c) Donner une équation cartésienne de la tangente(T) à (C) au point d'abscisse 1 et tracer(T).

d) Tracer avec soin la courbe (C)

Exercice N°2

Soit a un entier naturel et X un nombre qui s'écrit $\overline{1335}$ dans la base a.

1. Donner son écriture dans la base $(a+1)$
2. Déterminer a sachant que ce nombre écrit dans la base dix est inférieur ou égal à 500

Problème

Dans ce problème, $\mathscr{E}$ est espace affine associé à un espace vectoriel E de dimension 2 ou 3, et ρ est une application affine de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ dont l'endomorphisme associé est f

On pose $F=\{\vec{u}\in E; f(\vec{u})=\vec{u}\}$. Si h est un endomorphisme de E, $\ker h$ et $\operatorname{Im} h$ désignent le noyau et l'image de h

PREMIERE PARTIE

Soit g un endomorphisme de E

$\operatorname{Im} g$ Définie par : $\forall \vec{u} \in G, \theta(\vec{u}) = g(\vec{u})$

a) Montrer que θ est une application linéaire bijective de G dans $\operatorname{Im} g$

b) En déduire une relation entre $\dim(\operatorname{Im} g)$ et $\dim G$? et conclure que

$\dim(\ker h) + \dim(\operatorname{Im} g) = \dim E$

2. a) montrer que : $\ker(gog) \subset \ker g \Leftrightarrow \operatorname{Im} g \cap \ker g = \{\vec{o}_E\}$

b) Montrer que : $\ker(gog) \subset \ker g \Leftrightarrow E = \ker g \oplus \operatorname{Im} g$

(On rappelle que si U et V sont deux sous-espaces d'un même espace vectoriel réel E de dimension finie, alors $\dim U + \dim V - \dim(U \cap V) = \dim(U + V)$)

DEUXIEME PARTIE

On pose $g = f - Id_E$ et on suppose que $\ker(gog) \subset \ker g$.

A. On se propose de démontrer qu'il existe une application affine ψ et $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ admettant à au moins un point invariant, et une translation de vecteur $\overrightarrow{W}, \overrightarrow{W}$ appartenant à F , telles que $\rho = t_{\vec{w}} \circ \psi = \Psi \circ t_{\vec{w}}$ soit A un point de $\mathscr{E}$

1. a) montrer que $\exists$ $(\vec{u}, \vec{x}) \in E \times E /$ $\overrightarrow{p(A)A} = \vec{u} + f(\vec{x}) - \vec{x}$

b) montrer que : $\exists!$ $(\vec{u}, \vec{v}) \in \ker g \ x \operatorname{Im} g / \overrightarrow{p(A)A} = \vec{u} + \vec{v}$

c) montrer que $\vec{u} \in F$

2. un tel couple $(\vec{u}, \vec{x})$ étant choisi, on pose $B \underset{x}{\rightarrow}(A)$ où $B \underset{x}{\rightarrow}$ est la translation de $\mathscr{E}$ de vecteur $\vec{x}$

a) montrer que $\overrightarrow{B\rho(B)} = \overrightarrow{A\rho(A)} + f(\overrightarrow{AB}) - \overrightarrow{AB}$

En déduire que $\overrightarrow{B\rho(B)} = -\vec{u}$ est que $\overrightarrow{B\rho(B)}$ appartient à F .

b) Montrer que l'application affine ψ de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ telle que $\psi = t_{\vec{u}} \circ \rho$ admet un point B comme invariant et que son endomorphisme associé est £

c) Montrer que $\rho(B)$ appartient à l'ensemble des point invariants par ψ .

d) On pose $\overrightarrow{W} = -\vec{u}$. Montrer que $\rho = t_{\vec{W}} \circ \psi = \psi \circ t_{\vec{W}}$

B. On se propose de démontrer que cette décomposition est unique. Soit S_1 et S_2 deux vecteurs de F , ψ et ψ' deux applications affines de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ admettent au moins un point invariant et telle que $\rho = t_{\vec{S}_1} \circ \psi = t_{\vec{S}_2} \circ \psi'$.

On pose $\vec{a} = \vec{S}_1 - \vec{S}_2$

1. Montrer que $\vec{a} \in F, \psi' = t_{\vec{a}} \circ \psi$ et que ψ et ψ' ont même endomorphisme associé F
2. a) soit P un point invariant par ψ on pose $Q = t_{\vec{a}}(p)$

Montrer que Q est invariant par ψ'

b) montrer que $\psi'(P) = Q$

3. on désigne par K un point invariable par ψ'

a) montrer que $f\left(\overrightarrow{KP}\right) = \overrightarrow{KQ}$ et $g\left(\overrightarrow{KP}\right) = \vec{a}$

b) en déduire que $\vec{a} \in \ker g \cap \operatorname{Im} g$; $\vec{S}_1 = \vec{S}_2$. Et $\psi = \psi'$

Troisième partie

Soit $\mathscr{E}$ un plan affine euclidien, associé au plan vectoriel $E, \left(\vec{o}, \vec{j}\right)$ un repère orthonormé de $\mathscr{E}$ et ρ l'application de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ dans qui à tout $M(x,y)$ associe le $M'(x',y')$ tel que $\begin{cases} x' = \dfrac{3}{5}x + \dfrac{4}{5}y + \dfrac{8}{5} \\ y' = \dfrac{4}{5}x - \dfrac{3}{5}y + \dfrac{9}{5} \end{cases}$

1. montrer que ρ n'admet pas de point invariant.
2. On désigne par f l'endomorphisme associé à ρ et on pose $g = f - Id_E$ et $f\left\{\vec{u} \in E; f(\vec{u}) = \vec{u}\right\}$.

a) Montrer que $E = \ker g \oplus \operatorname{Im} g$.

b) En déduire qu'il existe un unique $\overrightarrow{W}$ appartenant à F est une unique application affine ψ de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$, admettant a moins un point invariant, tels que $\rho = t_{\vec{W}} \circ \psi = \psi \circ t_{\vec{W}}$.

c) Déterminer $\overrightarrow{W}$. (on exprimera $\overrightarrow{\rho(O)O}$ comme somme de deux vecteurs dont l'un appartient à $\ker f$ et l'autre à $\operatorname{Im} g$)

d) Montrer que ψ est un symétrique orthogonal dont on précisera l'axe.

NB : chacune des parties peut être traitée en admettant les résultats des parties précédentes.