Ministère des Enseignements Secondaires
Office du Baccalauréat du Cameroun

Examen : Baccalauréat Session : 1984
Série : C
Epreuve : Mathématiques
Durée : 4 heures
Coefficient : 4

Exercice N°1 :

On considère l'entier naturel $N = 1983^{1984}$

Déterminer le reste de la division euclidienne de N par l'entier naturel n dans chacun des cas suivants :

a) $n = 661$ b) $n = 13$

Exercice N°2

Soit P un plan affine euclidien, rapporté à un repère orthonormé $\left(o, \vec{i}, \vec{j}\right)$. A tout point M de P , de coordonnées (x, y), on associe son affixe $z, z = x + iy$, dans $\mathbb{C}$

1. On considère l'application f de P dans P qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que :

$2z' = \left(1 + i\sqrt{3}\right)\overline{z} + 4 - i4\sqrt{3}$ Où $\overline{z}$ désigne le complexe conjugué de z.

Déterminer la nature de f et donner ses caractéristiques géométriques.

2. Soit (C) la courbe de P d'équation : $y^2 + \sqrt{3}xy - 4\sqrt{3}y - 6 = 0$

a) Montrer que le point $I(4,0)$ est centre de symétrie de (C) .

b) Quelle est l'image de (C) par f ? En déduire la nature de (C). On précisera les éléments qui la caractérisent.

Problème :

A. Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par

$f(x) = (x-1)\left(e^{2x} + 1\right)$

1. Montrer que f est continue et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
   - Etudier les variations de f', puis celle de f sur $\mathbb{R}$
   - Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthogonal du plan (on prendra $\left\|\vec{i}\right\| = 2cm$; $\left\|\vec{j}\right\| = 1cm$
2. Calculer l'aire de la portion du plan comprise entre la courbe, son asymptote oblique, et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \lambda$, où λ est un réel strictement inférieur à 1.
   - Cette aire a-t-elle une limite quand λ tend ver $-\infty$?

3. $f^{(n)}$ désigne la dérivée $n^{ième}$ de f

a) Montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $f^{(n)}$ existe et vérifie :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = 2^{n-1}.(2x+n-2).e^{2x}$

Déterminer un triplet (α, β, γ) de nombre réels non tous nuls, tel que :

$\forall x \in \mathbb{R} \quad \alpha f^{(n+2)}(x) + \beta f^{(n+1)}(x) + \gamma f^{(n)}(x) = 0$ Pour tout entier n supérieur ou égale à 2.

4. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} \quad f''(x) - 4f'(x) + 4f(x) = 4x - 8.$

   En déduire une autre méthode pour traiter la question 3.b)

B. On se propose dans cette partie, de déterminer l'ensemble $\mathscr{E}$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ deux fois dérivable vérifiant la relation

   $\forall x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) - 4f'(x) + 4f(x) = 4x - 8$

1. Montrer que $\mathscr{E}$ est non vide.
2. Soit P le polynôme de degré k. Montrer que pour que P appartienne à $\mathscr{E}$ il faut que k soit égale à 1

   En déduire le sous-ensemble $\mathscr{P}$ des polynômes appartenant à $\mathscr{E}$

3. Soit f_0 un élément de $\mathscr{E}$. Etablir la proposition suivante :

$f \in \mathscr{E} \Leftrightarrow (f - f_0) \in \mathfrak{F}$ Où $\mathfrak{F}$ est l'ensemble des applications ρ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, défini dérivable et vérifiant la relation $\forall x \in \mathbb{R}$, $\rho''(x) - 4\rho'(x) + 4\rho(x) = 0$

4. Déterminer le réel α tel que l'application ρ de $\mathbb{R}$, définie par $\rho(x) = e^{\alpha x}$ appartenant à $\mathfrak{F}$.

5. Démontrer que, si g est élément de $\mathfrak{F}$, alors l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $h(x) = g(x)e^{-2x}$, est deux fois dérivable et que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $h''(x) = 0$.

   Etudier la réciproque.

   En déduire que $\mathfrak{F}$ est un espace vectoriel de dimension 2 sur $\mathbb{R}$.

6. Déterminer l'ensemble $\mathscr{E}$
7. Comment peut-on unir g d'une structure de plan affixe associé au plan vectoriel $\mathfrak{F}$.