Ministère des Enseignements Secondaires
Office du Baccalauréat du Cameroun

Examen : Baccalauréat Session : 1993
Série : C
Epreuve : Mathématiques
Durée : 4 heures
Coefficient : 4

Exercice N°1 :

1. Déterminer l'ensemble des diviseurs positif de 152.
2. Déduire de la question précédente les valeurs de l'entier naturel a pour que l'équation $x^2 - ax - 152 = 0$ ait des solutions x éléments de l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels.

Exercice N°2 :

Soit $I = \int_0^{\pi/4} \frac{2dt}{(1+\cos t)^2}$

1. Montrer que $\frac{\pi}{8} \leq I \leq \pi\left(3 - 2\sqrt{2}\right)$
2. Calculer la dérivée de la fonction g définie dans l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ par

$$g(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{(1+\cos t)^2}$$

Exercice N°3

1. a) Tracer un carré $ABCD$ de centre I inscrit dans un cercle C et tel qu'une mesure en radians de l'angle $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$ soit $+\frac{\pi}{2}$.

   b) Calculer en fonction de la distance AB l'aire du disque délimité par C.
2. On note S la similitude directe plane de centre B qui transforme A en D. Soit D' et I' et les images respectives de D et I par S.
   a) Préciser les éléments géométrique de S.
   b) Prouver que $I' = C$ et en déduire que C est le milieu du segment $[B, D']$.
   c) Soit C' le cercle image de C par la similitude S' et évaluer l'aire du disque délimité par C'.
3. On suppose le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(o, \vec{i}, \vec{j}\right)$ dans lequel B a pour coordonnées $(1,1)$.
   a) Donner l'écriture complexe de la similitude S.
   b) Si un point M du plan a pour coordonnées (x, y) dans ce repère et M' son image par S pour coordonnées (x', y'), écrire les relations entre x', y' et x et y .

Problème

Le problème comporte 3 parties A, B et C

Partie A

Soit f une fonction numérique dérivable sur un intervalle $[a,b]$ avec $a<b$; on suppose sa dérivée f' continue sur $[a,b]$ et qu'il existe un réel strictement positif k tel que : pour tout x de $[a,b]$ $|f',(x)|\leq k$.

Montré qu'alors $|f'(b)-f'(a)|\leq k(b-a)$

Partie B

Dans cette partie, f est une fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=x^2-2-2\ln x$,

1. Etudier les variations de f et dresser un tableau
2. a) montrer que l'équation $f(x)=0$ admet deux solutions dont l'une x_0 appartient à l'intervalle $]1,2[$.

   b) En déduire que $x_0=\sqrt{2+2\ln x_0}$
3. Après avoir étudié les branches infinies de la courbe de f, tracer cette courbe dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$ (unité de longueur sur les axes = 2cm

Partie C

g Est une fonction définie sur $[1,+\infty[$ par $g(x)=\sqrt{2+2\ln x}$

1. a) Montrer que pour tout x de $[1,+\infty[$; $g(x)\geq\sqrt{2}$

   b) montrer que pour tout x de $[1,+\infty[$, $0\leq g'(x)\leq\frac{\sqrt{2}}{2}$

   c) Calculer $g(x_o)$ en fonction de x_o, x_o étant la solution de 2.a)
2. Soit (U_n) la suite réel définie par : $U_o=\sqrt{2}$ et $U_{n+1}=\sqrt{2+2\ln U_n}$

   a) Montrer que pour tout entier naturel n , $U_n\geq\sqrt{2}$

   b) Etablir pour tout entier naturel n les inégalités suivantes :

   - ❖ $U_{n+1}-x_o\left|\leq\frac{\sqrt{2}}{2}\right|U_n-x_o$ (on pourra utiliser la partie A)
   - ❖ $|U_o-x_o|\leq\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$

   c) En déduire la suite (U_n) est convergente et donner sa limite.