BACCALAUREAT C & E 2016

EXERCICE 1

Une urne contient 5 jetons portant les réels $-\sqrt{2}$; $-1; 0; 1$ et $\sqrt{2}$. On tire successivement avec remise deux jetons de l'urne. On appelle x le numéro du premier jeton et y celui du deuxième jeton et on construit le nombre complexe $z = x + iy$.

1) Combien de nombres complexes peut-on ainsi construire ?
2) Quelle est la probabilité d'obtenir :
   a) Un nombre complexe de module $\sqrt{2}$?
   b) Un nombre complexe dont un argument est $\frac{\pi}{2}$?
3) On effectue trois fois de suite le tirage successif et avec remise de 2 jetons de l'urne et on désigne par X la variable aléatoire qui, à l'issue de ces trois tirages associe le nombre de nombres complexes de module $\sqrt{2}$.
   Déterminer la loi de probabilité de X.

EXERCICE 2

On considère dans un repère orthonormé direct $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$ de l'espace, les surfaces (S) et (S') d'équations respectives $z = (x - y)^2$ et $z = xy$. On prendra 1 cm comme unité.

I) 1) Déterminer le vecteur $\vec{\imath} \wedge \vec{\jmath} \wedge (2\vec{k})$.

2) On note (I_2) l'intersection de (S') avec le plan (P_1) d'équation $z = 0$.

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de (I_2).

3) On note (I_3) l'intersection de (S) et de la surface (S'') d'équation $z = -2xy + 4 + 2y^2$.

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques du projeté orthogonal de (I_3) sur le plan $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

II) **<u>(Série C uniquement)</u>**

On note (I_4) l'intersection de (S) et de (S').

Dans cette partie , on veut démontrer que le seul point appartenant à (I_4) dont les coordonnées sont des entiers naturels est le point $O(0; 0; 0)$. On suppose qu'il existe un point M appartenant à (I_4) et dont les coordonnées x, y et z sont des entiers naturels.

1) Montrer que si $x = 0$, alors le point M est le point O.

2) On suppose désormais que l'entier x n'est pas nul.
   a) Montrer que les entiers x et y vérifient $x^2 - 3xy + y^2 = 0$.
   En déduire qu'il existe alors des entiers naturels $x' et\ y'$ premiers entre eux tels que $(x')^2 - 3x'y' + (y')^2 = 0$.
   b) Montrer que x'divise $(y')^2$, puis que x'divise y'.
   c) Etablir que $x = 0$ et conclure.

III) **<u>(Série E uniquement)</u>**

ABCO est un tétraèdre régulier d'arête égale à 2. L'arête $[OB]$ est portée par l'axe des ordonnées. C est un point du plan $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ d'abscisse égale à $\sqrt{3}$.

1)a) Faire un schéma.

b) Montrer que les coordonnées des points A, B et C dans le repère $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$ sont repectivement $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}; 1; \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$; $(0; 2; 0)$ et $(\sqrt{3}; 1; 0)$.

2) En déduire le volume du tétraèdre ABCO.

PROBLEME

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$. On considère l'ensemble (E) des points $M(x; y)$ tels que $\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|} = 1$.

On va déterminer toutes les isométries du plan qui laissent (E) globalement invariant.

Partie A

Soit f la fonction numérique d'une variable réelle définie par : $f(x) = (1 - \sqrt{|x|})^2$ pour tout x appartenant à $[-1; 1]$. On note (C) sa courbe représentative dans le repère $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$. On prendra 3cm comme unité sur les axes.

1) a. Déterminer la parité de f.
   b. Quelle conséquence géométrique peut-on en déduire ?

2) Soit g la restriction de f à $[0; 1]$ et t définie sur $[0; 1]$ par $t(x) = g(x^2)$.

   a. Vérifier que $g(x) = (1 - \sqrt{x})^2$ pour tout $x \in [0; 1]$.

   b. Etudier la dérivabilité de g à droite en 0. Que peut-on en conclure pour la courbe (C) de f.

   c. Montrer que pour tout $x \in]0; 1]$, $g'(x) = \frac{-1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$.

d. Dresser le tableau de variation de g.

e. Montrer que t est solution de l'équation différentielle $y'' - 2 = 0$ sur $[0;1]$.

3) a. Représenter soigneusement dans le repère $(O;\vec{\imath};\ \vec{\jmath})$, la courbe (C) de la fonction f .

b. Déterminer l'aire du domaine limité par l'axe des abscisses et la courbe (C) de f.

4) Soit h la fonction définie sur $[-1;1]$ par $f(x) = -h(x)$. Déduire de (C) la courbe (C') de h dans le même repère $(O;\vec{\imath};\ \vec{\jmath})$.

5) On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

a. Vérifier que la suite (u_n) est bien définie.

b. Montrer que (u_n) n'est ni croissante ni décroissante.

Partie B

On note $(\mathcal{J})$ l'ensemble des isométries du plan qui laissent (E) globalement invariant.

1) Montrer que pour tout $M(x;y)$ appartenant à (E), on a : $-1 \leq x \leq 1$.
2) Montrer que (E) est la réunion des courbes (C) et (C').
3) On considère dans le repère $(O;\vec{\imath};\ \vec{\jmath})$ les points de $I(1;0)$, $J(0;1), K(-1;0)$, et $L(0;-1)$.
   a. Déterminer l'ensemble des couples (A,B) de points de (E) tels que $d(A,B) = 2$.
   b. Soit S une isométrie du plan laissant (E) globalement invariant.
      Montrer que : $S(O) = O$.
   c. En déduire toutes les natures possibles de l'isométrie S.
4) Soit r un déplacement laissant invariant (E).
   a. Vérifier que r est soit une rotation de centre O et d'angle non nul, soit l'application identique du plan.
   b. En déduire par leurs éléments caractéristiques tous les déplacements qui laissent invariants (E) globalement invariant.
5) Soit $S_{(\Delta)}$ une réflexion du plan d'axe (Δ) laissant (E) globalement invariant.
   a. Vérifier que $O \in (\Delta)$.
   b. En déduire par leurs éléments caractéristiques toutes les réflexions qui laissent (E) globalement invariant.
6) Ecrire alors en extension l'ensemble $(\mathcal{J})$.