COLLEGE DE LA RETRAITE

Examen : Probatoire Blanc

Série :C

EPREUVE DE MATHEMATIQUES.

Durée : 3h Coef : 6

L'épreuve comporte trois exercices et un problème obligatoires repartis sur deux pages.

Exercice I : 3.5points

A/ Cocher le numéro de la question et la lettre correspondant à la bonne réponse. Aucune justification

1. Le cercle d'équation $x^2+y^2-2x-1=0$ et la droite $(D): y=x+m$ ($m\in\mathbb{R}$)sont sécants si **0,75pt**

a) $m\in[-3;1]$ b) $m\in[-2;2]$ c) $m\leq\sqrt{2}$ d) $m\in[-3;-2]$

2. L'ensemble solution du système $\begin{cases}2x-y+3z=0\\-x+3y-z=3\\x+y+z\quad=2\end{cases}$ est : **0,75pt**

a) {(2 ;1 ;-1)} b) {(-2 ;-1 ;1)} c) {(1 ;2 ;-1)} d){(2 ;-1 ;1)}

3. L'ensemble de définition de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases}f(x)=\frac{2x-1}{x+1} & si\ x\leq 0\\ f(x)=x^2-1\ si\ x>0\end{cases}$ est **0,5pt**

a) $\mathbb{R}$ b) $\mathbb{R}-\{-1\}$ c) $\mathbb{R}^*$ d) $\mathbb{R}_-$

B/

Pour tout réel x on considère la fonction P définie par $P(x)=\frac{Sin5x}{sinx}-\frac{\cos 5x}{cosx}$. On note (Cp) sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O,I,J)

1. Déterminer le domaine de définition de P. **0,5pt**
2. a) Exprimer $P(x)$ en fonction de $cos2x$. **0,5pt**

b) Déterminer les points de rencontre de (Cp) et de la droite (OI). **0,5pt**

Exercice II.3,5points

ABC est un triangle rectangle en A tel que $AB = a$ et $AC = 2a$.

I désigne le milieu de $[AC]$ et G est le barycentre du système $\{(A\ ;\ 3)\ ;\ (B\ ;\ -2)\ ;\ (C\ ;\ 1)\}$.

1.

2. Construire le point G et préciser la nature du quadrilatère $ABIG$. Exprimer en fonction de a les distances GA, GB et GC. **1pt**

2. À tout point M du plan, on associe le nombre réel :$f\ (M) = 3MA^2 - 2MB^2 + MC^2$.

a) Exprimer $f\ (M)$ en fonction de MG et de a. **0.75pt**

b) Déterminer et construire l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que : $f(M) = 2a^2$. **0.75pt**

3. À tout point M du plan, on associe maintenant le nombre réel : $h(M) = 3MA^2 - 2MB^2 - MC^2$.

a) Démontrer qu'il existe un vecteur $\vec{u}$ non nul tel que $h(M)=\overrightarrow{MB}\cdot\vec{u}-2a^2$ **0.5pt**

On désigne par (Δ)l'ensemble des points M du plan tels que : $h(M) = -2a^2$

b) Vérifier que les points I et B appartiennent à (Δ) et préciser la nature de cet ensemble. Construire (Δ) et (Γ). **1pt**

Exercice III. 3points

Soit $A=\{1,2,3\ldots\ldots n\}$ un ensemble fini de cardinalité $n(n\geq 1)$. On appelle dérangement de k éléments de $A(0\leq k\leq n)$ toute permutation de $\{1,2,3\ldots\ldots n\}$ laissant uniquement k éléments de A invariants ou fixes.

Exemple : Pour A={1,2} le (2,1) est un dérangement de 0 éléments de A.

On désigne par $D_{n,k}$ le nombre de dérangements de k éléments d'un ensemble à n éléments et. On pose $D_{0,0}=1$ Et $d_n=D_{n,0}$

. Dresser la liste de toutes les permutations de {1,2,3} et en déduire la valeur de $D_{3,0}$, $D_{3,1}$, $D_{3,2}$ **1pt**

2. a) Justifier que $D_{n,k} = C_n^k D_{n-k,0}$.

b) En déduire que $n! = \sum_{k=0}^{n} D_{n,k} = D_{n,0} + D_{n,1} + \cdots\cdots + D_{n,n}$. 0,5pt

On admet alors que $d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots\cdots + \frac{1}{n!}\right)$. 0,5pt

3. Cinq personnes en rentrant dans un stade accrochent leurs manteaux sur des porte manteaux aux vestiaires. A La sortie il y a coupure d'énergie, mais chacun rentre avec un manteau.

a) Combien y a-t-il de répartitions possibles des manteaux aux cinq hommes ? 0,75pt

b) Combien y a t-il de répartitions possibles sachant que personne n'est rentré avec son manteau ? 0,75pt

Problème. 10 points

Le problème comporte deux parties indépendantes et obligatoires.

Partie A fonction

A/ Répondre par vrai ou Faux. Aucune justification n'est demandée

Soient f et g deux applications

1. Si $g \circ f$ injective, alors f est injective . 0.5pt
2. Si g et f sont bijectives, alors $(g \circ f)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$. 0.5pt

B/ On considère la fonction numérique d'une variable réelle définie par $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$. On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O,I,J) :

1. $f$est -elle injective, surjective ? Justifier votre réponse. 0.75pt
2. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. 0.75pt
3. Montrer que $f(\mathbb{R}) = [-1;1]$. 0.75pt
4. Montrer que la restriction g de f définie par $g: [-1;1] \longrightarrow [-1;1]$ est une bijection. 0.75pt

Partie B

Dans le plan muni oriente, on considère un triangle rectangle isocèle ABC tel $mes(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}$. I est le milieu de $[BC]$ et O est le milieu de $[AI]$. On désigne par r le quart de tour direct de centre B et r' le quart de tour direct de centre O. t est la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.

1. On considère l'application du plan g définie telle que $g = r' \circ t \circ r$.

a) Déterminer les images des points I et O par g. 1pt

b) Déterminer la nature et le(s) élément(s) caractéristique(s) de g. 1pt

2. Ecrire O comme barycentre des points A, B et C affectes des coefficients a déterminer. 0.5pt

3. Soit h l'application du plan $\mathcal{P}$ dans lui-même qui a un point $M(x, y)$ associe le point $M'(x', y')$ tel que

$$\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$$

a) Montrer que h admet un unique point invariant qu'on déterminera. 0.75pt

b) Montrer que $M' = h(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM'} = 3\overrightarrow{MO}$. 0.75pt

c) Déterminer la nature de h et donner ses éléments caractéristiques. 0.5pt

d) Exprimer x' et y' en fonction de x et y . 0.75pt

e) Déterminer la nature de l'application s tel que $s \circ h^{-1}$=g . 0.75pt